Géométrie

Chapitre 1

Répétition de géométrie

1.1 Quelques définitions

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques notions de géométrie vues à l'école secondaire. Nous allons nous baser sur quelques définitions intuitives :

*"Le **point** est ce qui n'a aucune partie, la **ligne** est une longueur sans largeur, la **ligne droite** est celle qui est placée entre ses points."*

Ces définitions sont tirées des écrits d'Euclide ...

1.1.1 Notations

Dans ce cours, nous utiliserons les notations suivantes :

$A,\ B,\ C\ \ldots$	points
$a,\ b,\ c\ \ldots$	droites
$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots$	angles ou mesure d'angles
(AB)	la droite passant par A et B
$\delta(A;B)$ ou AB	la distance de A à B
$[AB]$	le segment (de droite) d'extrémités A et B
$[AB)$	la demi droite d'origine A et passant par B
$\widehat{AOB}$	angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$
$\overset{\frown}{AB}$	arc de cercle d'extrémité A et B

Rappel

Nous donnons ci-dessous l'ensemble des lettres de l'alphabet grec avec leur nom.

Alphabet grec						
Minuscule	Majuscule	Nom		Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha		ν	N	nu
β	B	bêta		ξ	Ξ	ksi ou xi
γ	Γ	gamma		o	O	omicron
δ	Δ	delta		π ou ϖ	Π	pi
ε ou ϵ	E	epsilon		ρ ou ϱ	P	rho
ζ	Z	zêta		σ ou ς	Σ	sigma
η	H	êta		τ	T	tau
θ ou ϑ	Θ	thêta		υ	Υ	upsilon
ι	I	iota		φ ou ϕ	Φ	phi
κ	K	kappa		χ	X	khi ou chi
λ	Λ	lambda		ψ	Ψ	psi
μ	M	mu		ω	Ω	oméga

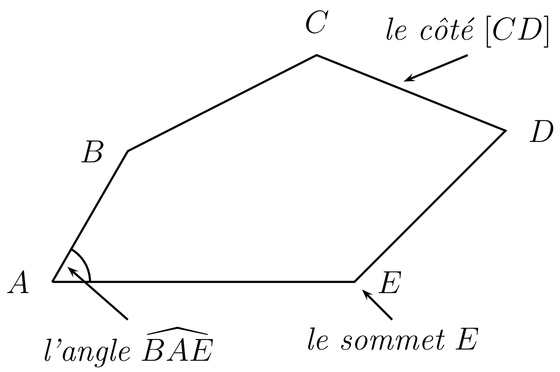
1.1.2 Les polygones

Un **polygone** est une figure plane limitée par des segments de droites consécutifs. Pour rappel, un **figure plane** est une partie du plan limitée par une ligne fermée.

Les extrémités des segments sont appelés les **sommets** du polygone. Les segments de droites entre deux sommets sont appelés les **côtés** du polygone.

En général, on nomme un polygone par l'énumération des sommets, en respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent sur le pourtour du polygone.

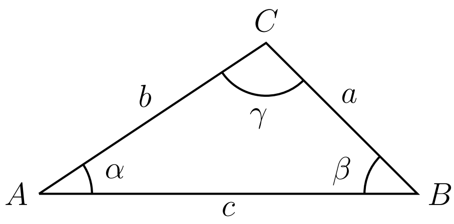
Exemple



En respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent sur le pourtour de ce polygone, on pourrait l'appeler "le polygone ABCDE", mais aussi "CDEAB" ou encore "AEDCB",... Mais, par exemple, on ne peut pas l'appeler "le polygone "ABCED".

1.1.3 Les triangles

Un **triangle** est un polygone à trois côtés.



Définition 1.1
Nous pouvons définir quelques droites remarquables dans les triangles quelconques.

- La médiane :

Droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
Chacune des trois médianes divise le triangle en deux triangles d'aires égales.

- La médiatrice :

Droite passant perpendiculairement par le milieu d'un côté du triangle.
Plus généralement, la **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
De plus, cette médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

- La hauteur :

Droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé.
L'intersection de la hauteur et du côté opposé s'appelle le **pied** de la hauteur.

- La bissectrice intérieure :

Droite passant par un sommet du triangle et coupant l'angle intérieur formé par les deux côtés en deux parties égales.
Plus généralement, la **bissectrice** d'un secteur angulaire est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. Elle forme de ce fait l'axe de symétrie de cet angle.
De plus, la **bissectrice** de deux droites est l'ensemble des points à égale distance des deux droites.

A faire : dessiner des exemples de médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices.

Définition 1.2
On peut définir quelques familles de triangles particuliers.

- Triangle isocèle :

Triangle ayant deux côtés **isométriques** (≡ de même longueur) ou deux angles de même mesure.
Un triangle isocèle est caractérisé par un axe de symétrie et par le fait que la médiane, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives à la base et à l'angle au sommet sont confondues.

- Triangle équilatéral :

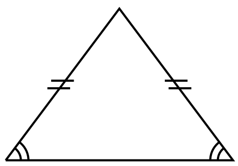
Triangle ayant ses trois côtés isométriques ou ses trois angles de même mesure.
Un triangle équilatéral est un triangle trois fois isocèle.

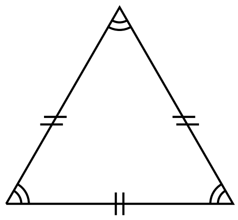
- Triangle rectangle :

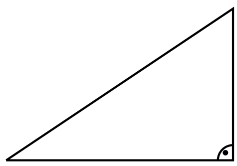
Triangle possédant un angle droit. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** et les côtés de l'angle droit les **cathètes** .

- Triangle scalène :

Triangle ne possédant pas de symétrie particulière.


Triangle isocèle


Triangle équilatéral


Triangle rectangle

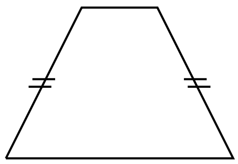
1.1.4 Les quadrilatères

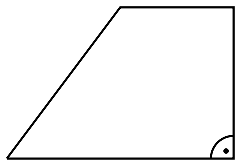
Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés.

Définition 1.3
On peut définir quelques familles de quadrilatères particuliers.

- Trapèze :

Quadrilatère ayant au moins une paire de côtés parallèles.


Trapèze isocèle


Trapèze rectangle

- Parallélogramme :

Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles.

Propriétés : - les diagonales se coupent en leur milieu,
- les côtés parallèles sont isométriques,
- il possède un centre de symétrie.

- Rectangle :

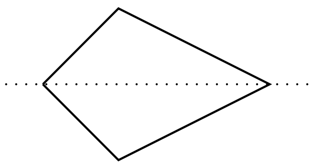
Parallélogramme ayant au moins un angle droit.

Propriétés : - les mêmes que celles du parallélogramme,
- les diagonales sont isométriques,
- il possède deux axes de symétrie.

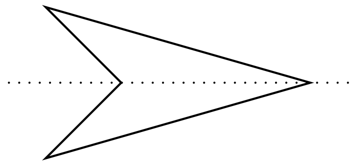
- Rhomboïde :

Quadrilatère dont au moins une des diagonales est un axe de symétrie.

Propriétés : - les diagonales sont perpendiculaires,
- il possède au moins une paire d'angles égaux,
- il possède deux paires de côtés consécutifs isométriques,
- il possède un axe de symétrie.



Cerf-volant



Fer-de-lance

- Losange :

Quadrilatère dont les deux diagonales sont des axes de symétries.

Propriétés : - les diagonales sont perpendiculaires,
- les diagonales se coupent en leur milieu,
- les quatre côtés sont isométriques,
- les angles opposés sont isométriques.

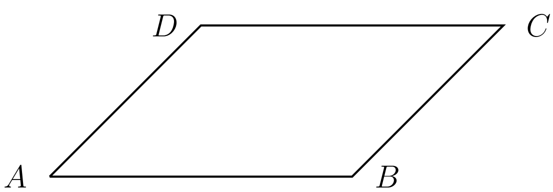
- Carré :

Losange ayant au moins un angle droit.

Propriétés : - toutes celles du losange,
- il possède quatre axes de symétries.

Théorème 1.1

1. Tout quadrilatère qui possède une paire de côtés parallèles et isométriques est un parallélogramme.
2. Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.



Démonstration.

1. Admettons que $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et isométriques. Il existe alors une translation qui déplace $[AB]$ sur $[CD]$.
   A allant sur D et B sur C, $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles et isométriques. $ABCD$ est donc un parallélogramme.
2. Soit O l'intersection des diagonales. La symétrie de centre O déplace C sur A et D sur B. Or, par symétrie centrale, tout segment est transformé en un segment parallèle et isométrique.
   $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et isométriques. $ABCD$ est un parallélogramme.

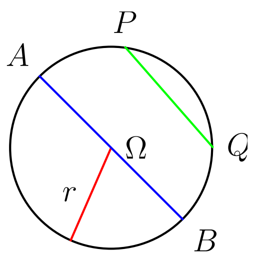
□

1.1.5 Les cercles et les disques

Un **cercle** est l'ensemble de tous les points situés à une distance fixée, appelé **rayon** et notée r, d'un point donné, appelé **centre** et noté Ω.

On appelle **disque** la surface enfermée par un cercle.

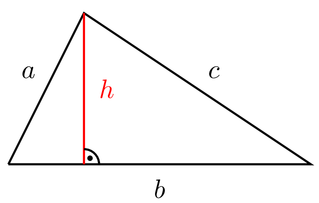
Sur le dessin :
- $[AB]$ est un **diamètre** du cercle,
- $[PQ]$ est un corde du cercle,
- $\overset{\frown}{PQ}$ est un arc de cercle.



1.1.6 Formules de calcul du périmètre et l'aire

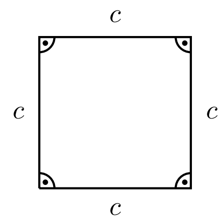
On donne ci-dessous les formules pour le calcul du périmètre, p, et de l'aire, $\mathcal{A}$, de figures planes présentées dans les pages précédentes.

Triangle



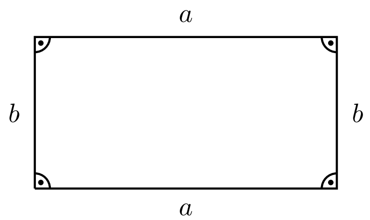
$p = a + b + c$ | $\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Carré



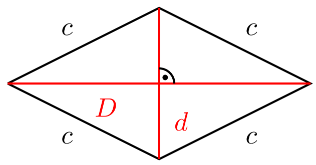
$p = 4 \cdot c$ | $\mathcal{A} = c^2$

Rectangle



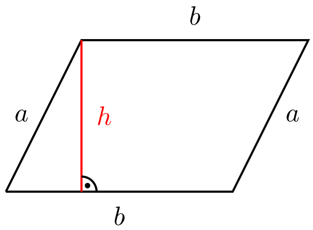
$p = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $\mathcal{A} = a \cdot b$

Losange



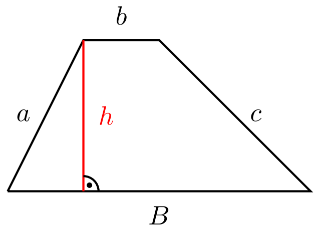
$p = 4 \cdot c$ | $\mathcal{A} = \frac{D \cdot d}{2}$

Parallélogramme



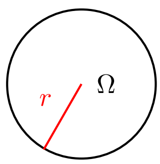
$p = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $\mathcal{A} = b \cdot h$

Trapèze



$p = a + B + c + b$ | $\mathcal{A} = \dfrac{B + b}{2} \cdot h$

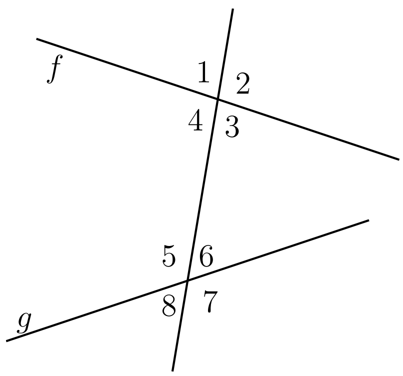
Cercle et disque



$p = 2\pi \cdot r$ | $\mathcal{A} = \pi \cdot r^2$

1.1.7 Les angles

Définition 1.4



- Les angles $1-3$ ($2-4$, $5-7$, $6-8$) sont appelés **opposées par le sommet**.
- Les angles $1-5$ ($2-6$, $3-7$, $4-8$) sont appelés **correspondants**.
- Les angles $3-5$ et $4-6$ sont appelés **alternes-internes**.
- Les angles $1-7$ et $2-8$ sont appelés **alternes-externes**.
- Si la somme de deux angles fait 180°, ces deux angles sont dit **supplémentaires**. Les angles $1-2$, $3-4$, $5-6$ et $7-8$ sont supplémentaires.

Proposition 1.2

1. Les angles opposés par le sommet sont égaux.
2. Si les droites f et g sont *parallèles*, alors les angles correspondants, alternes-internes et alternes-externes, sont tous *égaux*. La réciproque est vraie.

1.2 Quelques théorèmes

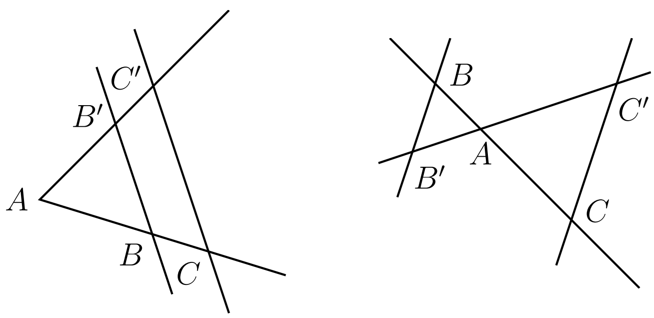
1.2.1 Théorème de Thalès

Le **Théorème de Thales** est un théorème de géométrie, attribué selon la légende au mathématicien et philosophe grec Thalès de Milet ; en réalité Thalès s'est davantage intéressé aux angles opposés dans des droites sécantes, aux triangles isocèles et aux cercles circonscrits.

Cette propriété de proportionnalité était connue des Babyloniens. Mais la première démonstration de ce théorème est attribuée à Euclide qui la présente dans ses Eléments (proposition 2 du livre IV) : il le démontre par proportionnalité d'aires de triangles de hauteur égale.

Le Théorème de Thalès sert notamment à calculer des longueurs dans un triangle, à condition d'avoir deux droites parallèles.

Théorème 1.3 (Théorème de Thalès)



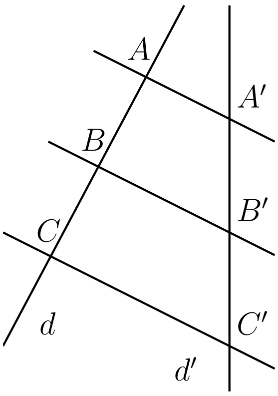
Dans les situations ci-contre $((BB') \mathbin{//} (CC'))$, on a :

$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}}$$

On peut permuter certains termes de ces fractions pour obtenir d'autres égalités de rapports, comme $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AB'}{AB}$.

En réalité, le théorème de Thalès concerne une propriété plus générale :

Trois droites parallèles déterminent sur deux droites sécantes (quelconques) des segments homologues proportionnels.



Autrement dit :

Si trois droites parallèles rencontrent deux droites d et d', respectivement et dans cet ordre, en A, B, C et A', B', C', alors :

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}}$$

En permutant certains termes de ces fractions, on peut faire naître d'autres égalités de rapports :

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{AC} \quad \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{BC}{AC} \quad \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

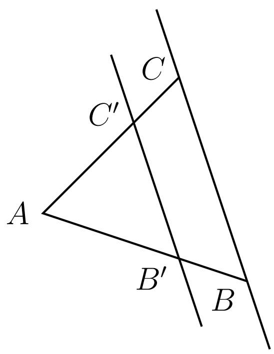
Remarque

Dans le cas général du théorème de Thalès (ci-dessus) avec $A \neq A'$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{BB'}{CC'} \qquad \text{et} \qquad \frac{A'B'}{A'C'} \neq \frac{BB'}{CC'}$$

contrairement au cas particulier du théorème avec $A = A'$ où ces rapport sont égaux.

Théorème 1.4 (Réciproque du théorème de Thalès)
Le théorème de Thalès, dans son sens direct, permet de déduire certaines proportions dès que l'on connaît un certain parallélisme. Sa réciproque permet de déduire un parallélisme dès que l'on connaît l'égalité de certains rapports.



Dans un triangle ABC, si les points A, B', B sont alignés *dans cet ordre* ($B' \in [AB]$) et les points A, C', C sont alignés *dans cet ordre* ($C' \in [AC]$) et si, de plus, les rapports $\dfrac{AB'}{AB}$ et $\dfrac{AC'}{AC}$ sont égaux $\left(\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}\right)$ alors :

les droites (BC) et $(B'C')$ sont **parallèles**.

Des théorèmes analogues existent pour des points A, B, B' alignés dans cet ordre et pour des points B', A, B alignés dans cet ordres.

1.2.2 Angle au centre

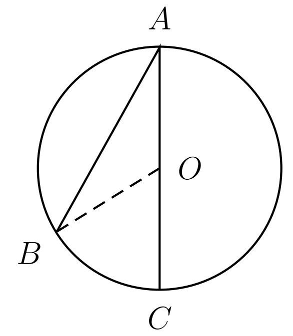
Définition 1.5
Un angle est dit **inscrit** dans un cercle quand son sommet est sur le cercle et ses côtés

coupent le cercle.

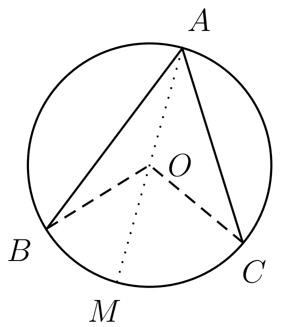
Un angle est dit **au centre** quand son sommet est au centre d'un cercle.

Théorème 1.5
Tout angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

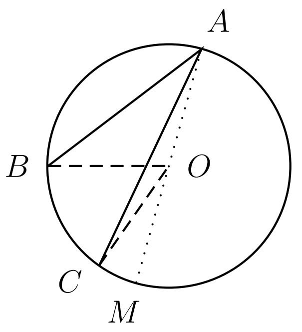
Démonstration. On désire démontrer que l'angle au centre $\widehat{BOC}$ vaut le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$: $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. On Nous distinguons trois cas :

1. 

Le triangle OAB est isocèle. Nous obtenons les résultats suivant :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \alpha$
- $\widehat{AOB} = 180° - 2\alpha$
- $\widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 180°$
- et donc : $\widehat{BOC} = 180° - \widehat{AOB} = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$

2. 

D'après le cas particulier ci-dessus :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{BOM} + \widehat{MOC}$
- $\widehat{BOM} = 2 \cdot \widehat{BAM}$ et $\widehat{MOC} = 2 \cdot \widehat{MAC}$
- et donc : $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAM} + 2 \cdot \widehat{MAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$

3. 

D'après le cas particulier du début :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAM} - \widehat{MAC}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{BOM} - \widehat{MOC}$
- $\widehat{BOM} = 2 \cdot \widehat{BAM}$ et $\widehat{MOC} = 2 \cdot \widehat{MAC}$
- et donc : $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAM} - 2 \cdot \widehat{MAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$.

□

Corollaire 1.6

1. Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.
2. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont isométriques.

1.2.3 Triangles semblables

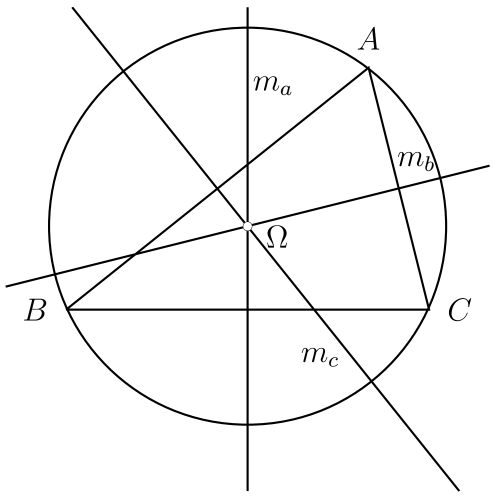
Définition 1.6
Deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels. Les cotés proportionnels sont dit **analogues** ou **correspondants**.

Proposition 1.7
Deux triangles sont semblables quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre.

Proposition 1.8
Deux triangles sont semblables quand deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et les angles déterminés par ces côtés sont égaux.

1.2.4 Cercle circonscrit à un triangle

Théorème 1.9
Les médiatrices d'un triangle sont **concourantes** ($\equiv$ se coupent au même point).



Démonstration.

Hyp. : m_a est la médiatrice de BC, m_b la médiatrice de AC et m_c la médiatrice de AB

Concl. : $m_a \cap m_b = \{\Omega\}$ et $\Omega \in m_c$

Démo. : m_a et m_b ne sont pas parallèles, sinon $[BC]$ et $[AC]$ le seraient aussi. Donc m_a et m_b se coupent en un point Ω.

$$\left.\begin{array}{lll} \Omega \in m_a & \Rightarrow & B\Omega = C\Omega \\ \Omega \in m_b & \Rightarrow & C\Omega = A\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow A\Omega = B\Omega$$

Donc $\Omega \in m_c$.

$\square$

Conséquence

A tout triangle, on peut associer un et un seul point équidistant des sommets du triangle. Par suite, on peut associer un et un seul cercle passant par les 3 sommets. Ce cercle est appelé **cercle circonscrit au triangle**.

Cas particulier

Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A. Soit Ω le milieu de $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à Ω. $ABA'C$ est un rectangle.

Donc Ω est équidistant de A, A', B, C. Par suite, le cercle de centre Ω passe par ABC.

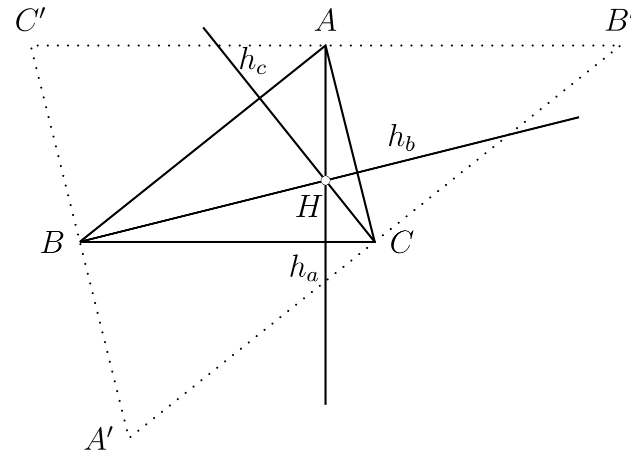
En d'autres termes : dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit admet l'hypothénuse comme diamètre.

La réciproque est aussi vraie : lorsque le cercle circonscrit d'un triangle ABC admet le côté BC comme diamètre, le triangle est rectangle en A.

Définition 1.7
Le **cercle de Thalès** d'un segment est le cercle admettant ce segment comme diamètre.

1.2.5 Orthocentre d'un triangle

Théorème 1.10
Les hauteurs d'un triangle sont **concourantes**.



Démonstration.

Hyp. : $A \in h_A$, $h_A \perp [BC]$, $B \in h_B$, $h_B \perp [AC]$, $C \in h_C$, $h_C \perp [AB]$.

Concl. : $h_A \cap h_B = h_A \cap h_C = h_B \cap h_C = H$.

Démo. : Traçons $[B'C'] \,//\, [BC]$ par A et $[A'C'] \,//\, [AC]$ passant par B.

Le quadrilatère $ACBC'$ est un parallélogramme. AC' et BC sont donc isométriques.

Pour la même raison, BC et AB' sont isométriques. A est donc le milieu de $B'C'$.

Donc $h_A \perp B'C'$ est la médiatrice de $B'C'$. De même, h_B est la médiatrice de $A'C'$ et h_C celle de $A'B'$.

Donc, d'après le théorème précédent, H existe et est le point d'intersection des trois hauteurs.

$\square$

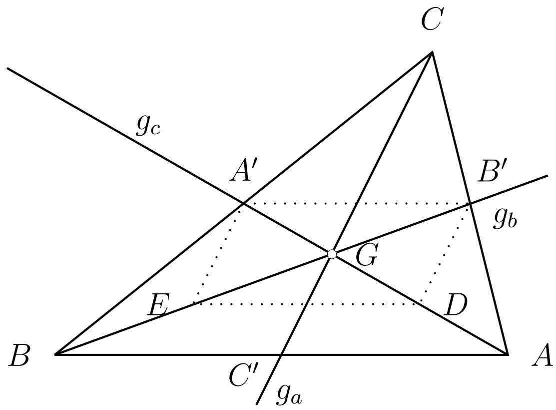
Définition 1.8
L'**orthocentre** d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.

Remarque

L'orthocentre est donc le centre du cercle circonscrit au triangle **augmenté**.

1.2.6 Centre de gravité

Théorème 1.11
Les médianes d'un triangle se coupent en un point intérieur du triangle, situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir des sommets correspondants.



Démonstration.

Hyp. : $A'B = A'C, \quad A' \in [BC]$
$B'C = B'A, \quad B' \in [AC]$
$C'A = C'B, \quad C' \in [AB]$

Concl. : 1. $g_A \cap g_B \cap g_C = G$
2. $GA = 2GA'$
$GB = 2GB'$
$GC = 2GC'$

Démo. : $[AA']$ et $[BB']$ se coupent à l'intérieur de ABC. Soit G ce point, D le milieu de $[GA]$ et E le milieu de $[GB]$.

1. Le quadrilatère $A'B'DE$ est un parallélogramme. En effet, $[A'B'] \,//\, [AB]$ et $A'B' = \frac{1}{2}AB$. De même que $[DE] \,//\, [AB]$ et $DE = \frac{1}{2}AB$ (segments de ABG).
2. Donc $\left.\begin{array}{r} GA' = DG \\ AD = DG \end{array}\right\} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AA'$ et de même, on voit que $BG = \dfrac{2}{3}BB'$.

   En remplaçant $[BB']$ par $[CC']$, il existe un point G' avec $G'A = 2G'A'$. On aurait donc

$$\begin{array}{rcc} GA = 2GA' & \text{avec} & G \in AA' \\ \text{et } G'A = 2G'A' & \text{avec} & G' \in AA'. \end{array}$$

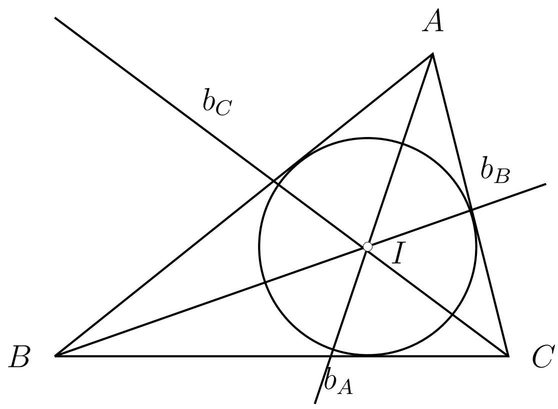
   Par suite $G = G'$

□

Définition 1.9
Le **centre de gravité** ou **barycentre** d'un triangle est le point d'intersection des médianes de ce triangle.

1.2.7 Cercle inscrit dans un triangle

Théorème 1.12
Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.



Démonstration.

Hyp. : b_A, b_B, b_C sont les bissectrices intérieures.

Concl. : $b_A \cap b_B \subset b_C$, $(b_A \cap b_B \cap b_C = \{I\})$.

Démo. : b_A coupe le côté opposé au sommet d'où elle est issue. Il en est de même pour b_B.

Donc $b_A \cap b_B = \{I\}$, un point intérieur de ABC.

$$\left.\begin{array}{lcl} I \in b_A & \Rightarrow & \delta(I;[AB]) = \delta(I;[AC]) \\ I \in b_B & \Rightarrow & \delta(I;[AB]) = \delta(I;[BC]) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta(I;[AC]) = \delta(I;[BC])$$

Donc I appartient à la bissectrice intérieure issue de C, donc appartient à b_C.

□

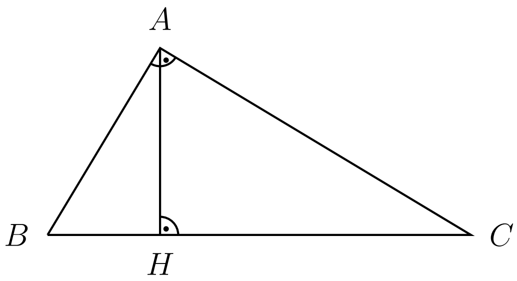
Conséquence

A tout triangle, on peut associer un et un seul point équidistant des côtés du triangle. Par suite, on peut associer un et un seul cercle tangent aux 3 côtés du triangle. Ce cercle est appelé **cercle inscrit au triangle**.

1.2.8 Théorèmes relatifs au triangle rectangle

Nous allons énoncer ci-dessous trois théorèmes importants liés au triangle rectangle : les théorèmes **de la hauteur, d'Euclide et de Pythagore**. Les démonstrations de ces théorèmes seront effectuées en exercices.

On considère un triangle rectangle en A. Le point H désigne le pied de la hauteur issue du sommet A.



Rappel

La **moyenne arithmétique** de deux nombres x et y est donnée par $\dfrac{x+y}{2}$.

La **moyenne géométrique** de deux nombres x et y est donnée par $\sqrt{x \cdot y}$.

Théorème 1.13 (Théorème de la hauteur)
La hauteur d'un triangle rectangle est la moyenne géométrique entre les 2 segments qu'elle détermine sur l'hypothénuse. Autrement dit :

$$\boxed{AH^2 = BH \cdot CH}$$

Théorème 1.14 (Théorème d'Euclide)
Dans un triangle rectangle, chaque cathète est la moyenne géométrique entre sa projection sur l'hypothénuse et l'hypothénuse entière. Autrement dit :

$$\boxed{AB^2 = BH \cdot BC} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{AC^2 = CH \cdot CB}$$

Théorème 1.15 (Théorème de Pythagore)
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux cathètes. La réciproque est encore vraie. Autrement dit :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

1.3 Exercices

1) Dans un triangle ABC, tel que l'angle en A égale deux fois l'angle en B, on prend sur $[AB]$ un point quelconque M ; on prolonge $[CA]$ d'une longueur AM et on place D à l'extrémité du segment obtenu ($AD = AM$). Enfin, on mène la droite (DM) qui coupe $[BC]$ en N.

   a) Comparer les angles $\widehat{ADM}$ et $\widehat{AMD}$ avec l'angle $\widehat{BAC}$.

   b) Montrer que $MN = NB$.

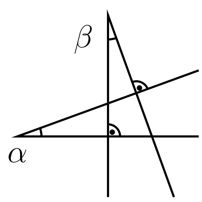
   c) Montrer que l'angle $\widehat{CND}$ et que l'angle $\widehat{BAC}$ sont isométriques.

2) Sur les côtés d'un angle de sommet O, on prend des longueurs égales $OA = OB$. En A, on élève la perpendiculaire à (OA) qui coupe la droite (OB) en C. En B, on élève la perpendiculaire à (OB) qui coupe la droite (OA) en D. Ces perpendiculaires se coupent en I.

   a) Montrer que l'on a : i) $OC = OD$
   ii) $IC = ID$
   iii) $IA = IB$

   b) Montrer que $[OI)$ est la bissectrice de l'angle de sommet O.

3) Montrer que deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont isométriques.



4) Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle ; la bissectrice intérieure de l'angle en A coupe le cercle en M ; la bissectrice intérieure de l'angle en B coupe le cercle en N et rencontre (AM) en I.
   Comparer les angles $\widehat{BIM}$ et $\widehat{IBM}$ et montrer que $IM = BM$.

5) On trace les hauteurs $[AA']$, $[BB']$ d'un triangle ABC. Elles se coupent en H. La hauteur $[AA']$ recoupe le cercle circonsrcit en H'.

   a) Comparer les angles $\widehat{CAA'}$ et $\widehat{CBB'}$.

   b) Comparer les angles $\widehat{CBH'}$ et $\widehat{CAH'}$.

   En déduire une propriété remarquable des symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux trois côtés du triangle.

6) Un **lieu géométrique** désigne l'ensemble des points du plan ou de l'espace possédant une certaine propriété.

   Exemple : *le lieu géométrique des points M dont la distance à un point fixe A est égale à R est le cercle de centre A et de rayon R.*

   Construire le lieu géométrique des points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de 90° et celui d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de 30°.

7) Montrer que la hauteur $[AH]$ d'un triangle rectangle en A détermine deux triangles rectangles semblables au triangle donné. En déduire les théorème de la hauteur, d'Euclide et de Pythagore.

8) Construire les longueurs données par les expressions suivantes dans lesquels a, b et c sont des longueurs données.

   a) $x = \sqrt{a^2 + 4b^2}$ b) $x = a\sqrt{7}$ c) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

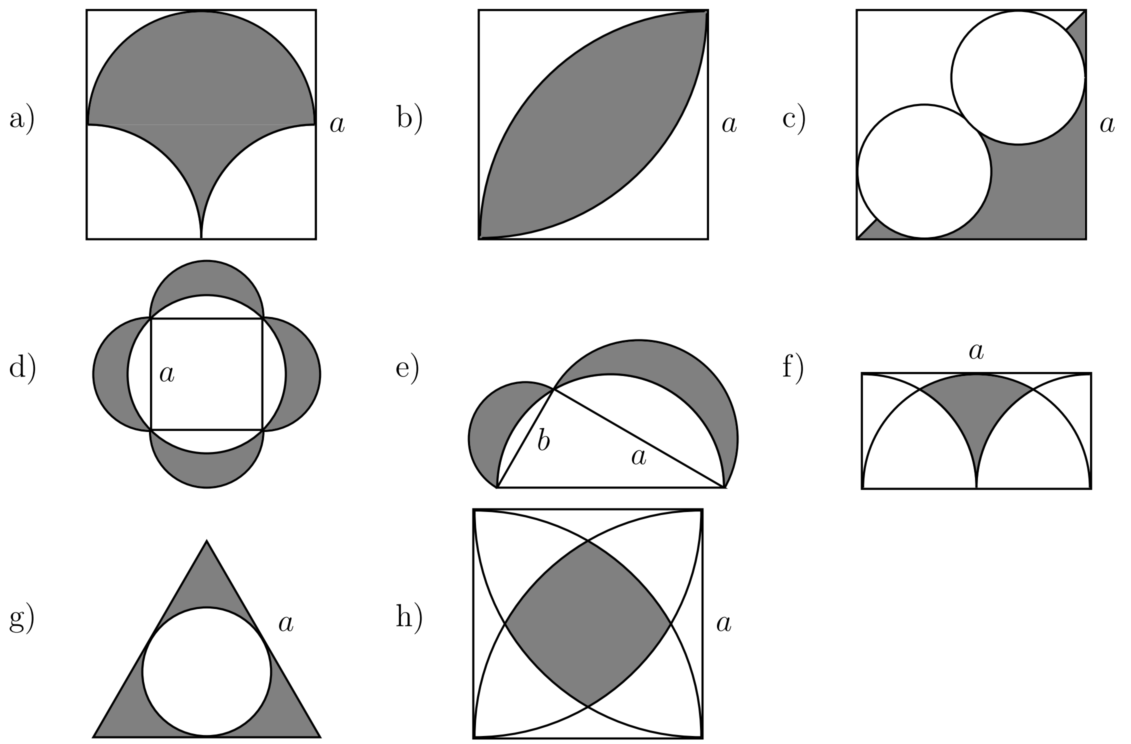
9) Quelle est la valeur de la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a ? Que vaut son aire ?

10) Partager un segment donné en n parties de même longueur ; prendre $n = 4$ puis $n = 7$.

11) Construire un triangle ABC, connaissant α, b et b_A (la longueur de la bissectrice intérieure issue de A).

12) Construire un triangle ABC, connaissant c, h_B (la longueur de la hauteur issue de B) et β.

13) Calculer les aires des domaines grisés ci-dessous :



14) Entourez un ballon de football d'une ficelle rouge. Allongez la ficelle de manière à entourer le ballon tout en restant à 1 mètre de sa surface. Entourez alors la Terre (supposée sphérique) entière avec une ficelle bleue et allongez cette ficelle de façon à entourer la Terre tout en restant à 1 mètre de sa surface. Quel est, selon vous, le plus grand des deux allongements ? Celui de la ficelle rouge autour du ballon ou celui de la ficelle bleue entourant la Terre ?

15) Le jour du solstice d'été, le fond d'un puits situé en Haute-Egypte à Syrène (l'actuel Assouan) est éclairé par le soleil. Au même moment, à Alexandrie, distant de 800 km et sur le même méridien, on voit le soleil sous un angle de 7° par rapport à la verticale du lieu. Déduire le rayon de la terre de cette observation.

16) Soit un cube d'arête a.
   a) Calculer le volume de la sphère inscrite au cube.
   b) Calculer l'aire de la sphère tangente aux douze arêtes du cube.
   c) Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube.

17) On dispose d'une corde de longueur $l = \pi$. Parmi les trois figures géométriques suivantes, laquelle doit-on former avec la corde pour couvrir la plus grande surface : un triangle équilatéral, un carré ou un cercle ?

1.4 Solutions des exercices

9) $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

13) a) $\frac{a^2}{2}$ b) $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$ c) $\frac{3 + 2\sqrt{2} - \pi}{6 + 4\sqrt{2}}a^2$ d) a^2

e) $\frac{ab}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}a^2$ g) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}a^2$ h) $\left(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)a^2$

15) $6548\ km$

16) a) $V = \frac{\pi}{6}a^3$ b) $A = 2\pi a^2$ c) $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}a^3$

Chapitre 2

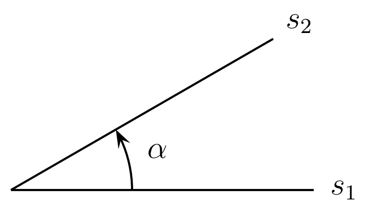
Trigonométrie

2.1 Mesure d'un angle

2.1.1 Angles et degrés

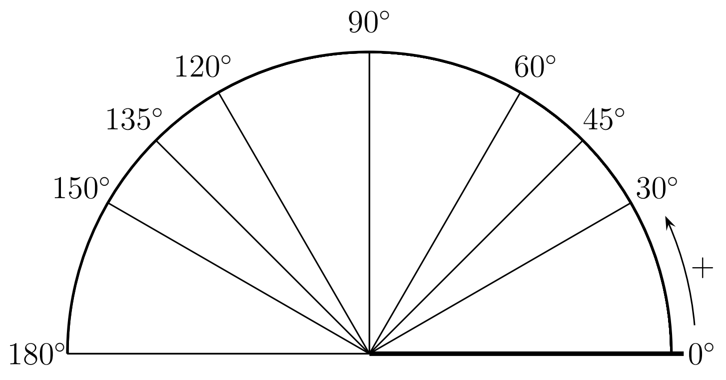
Inventée par les Grecs il y a plus de 2000 ans, la trigonométrie est une partie des mathématiques qui s'occupe des relations entre les longueurs et les angles des triangles. Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

Un angle est une grandeur permettant de décrire l'amplitude d'une rotation. On utilise très souvent des lettres grecques α (alpha), β (bêta), γ (gamma), ϕ (phi) ou θ (thêta) pour nommer les angles (voir les conventions de notation sous 1.1.1).

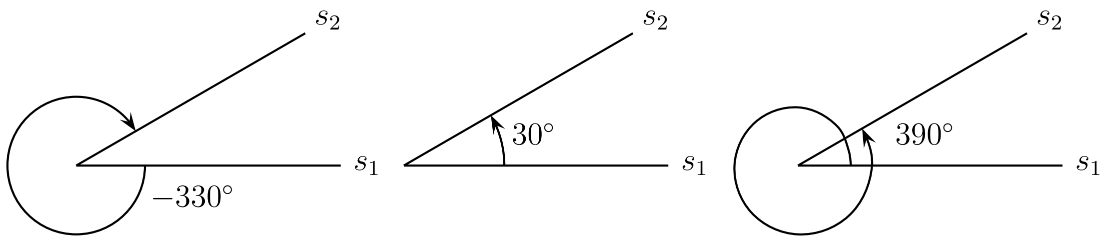


Afin de résoudre des problèmes ayant trait à l'astronomie, les Babyloniens ont divisé le disque en 360 parties égales identifiant un **degré**[°]. On mesure le nombre de degrés depuis la demi-droite de référence du 0° dans le **sens trigonométrique** (sens contraire de celui des aiguilles d'une montre).

Ce choix se justifiait par le fait que 360 a un grand nombre de diviseurs. En effet, 360 est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 et 180.



A une même situation peuvent correspondre plusieurs angles (une infinité !). En effet, on peut faire autant de tours que l'on veut dans un sens comme dans l'autre. Par exemple, voici trois façons d'amener le segment s_1 sur le segment s_2 par une rotation.



Voici quelques-uns des angles correspondant à la situation ci-dessus.

$$\ldots, -1050°, -690°, -330°, 30°, 390°, 750°, 1100°, \ldots$$

Ces angles sont les mêmes à un multiple de 360° près, ce qui correspond à un tour.

Définition 2.1
Un angle α est dit :

- **aigu** si $\alpha > 0°$ et $\alpha < 90°$.
- **droit** si $\alpha = 90°$.
- **obtus** si $\alpha > 90°$ et $\alpha < 180°$.
- **plat** si $\alpha = 180°$.

2.1.2 Angles et radians

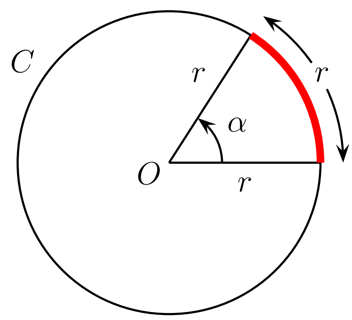
Jusqu'à présent, vous avez toujours représenté les angles en degrés. C'est la manière la plus courante de se représenter les angles, mais ce n'est pas toujours la plus pratique en mathématiques. Une autre façon de mesurer un angle serait de prendre la longueur de l'arc correspondant. Toutefois cette longueur dépend du rayon du cercle.

Définition 2.2
Soit C un cercle de centre O et de rayon r. Soit encore α un angle de sommet O.

Si la longueur de l'arc de cercle intercepté par l'angle α est égale à r, on dit que l'angle α mesure un **radian** (de radius = rayon).

Comme la circonférence du cercle vaut $2\pi r$, il en découle que :

$$1 \text{ tour} = 2\pi \text{ radians}$$



Or, 1 tour correspond également à 360°. On a donc la correspondance suivante :

$$\boxed{360° \longleftrightarrow 2\pi \qquad \text{ou} \qquad 180° \longleftrightarrow \pi}$$

On prononce "2 pi radians correspond à 360 degrés".

Exemple

$$180° \longleftrightarrow \pi \ radians \ \cong 3.14 \ radians$$

$$1° \longleftrightarrow \frac{\pi}{180} \ radians \ \cong 0.0175 \ radian$$

Un angle de 1 radian correspond à un angle de $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \cong 57.2958°$.

Ainsi, pour convertir des degrés en radians, il faut multiplier le nombre de degrés par $\frac{\pi}{180}$. Inversement, pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier le nombre de radians par $\frac{180}{\pi}$.

A vous :

degrés	0°	15°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
radians						$\frac{\pi}{2}$			

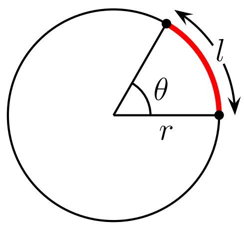
Par convention, quand on ne précise pas l'unité d'un angle, il est exprimé en **radians**. Si vous voulez travailler en degrés, n'oubliez pas le °.

2.1.3 Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire

Considérons un cercle de rayon r et un angle au centre de θ radians.

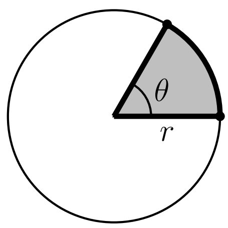
D'après la définition du radian, la longueur l de l'arc correspondant à l'angle θ est donnée par

$$\boxed{l = r\theta}$$



De même, l'aire S du secteur circulaire correspondant à l'angle θ est donnée par

$$\boxed{S = \frac{1}{2}r^2\theta}$$



2.2 Le cercle trigonométrique

Définition 2.3
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère orthonormé.

Dans ce cas, un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur 1 et un angle de θ radians correspond à un arc de longueur θ.

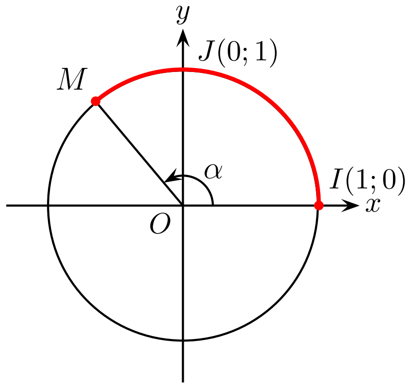
Nous allons "enrouler la droite réelle autour du cercle trigonométrique" de manière à visualiser tout nombre réel comme la mesure en radians d'un angle.

Plus précisément, à tout nombre réel $\alpha > 0$, on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique tel que :

l'arc $\widehat{IM}$ a une longueur égale à α et est orienté positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Si $\alpha < 0$, l'arc est orienté négativement.

Le nombre α est donc une **mesure en radians** de l'angle $\widehat{IOM}$. Cette mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc correspondant sur le cercle trigonométrique et s'écrit sans unité.



Un angle possède plusieurs mesures en radians qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π.

2.2.1 Les fonctions trigonométriques

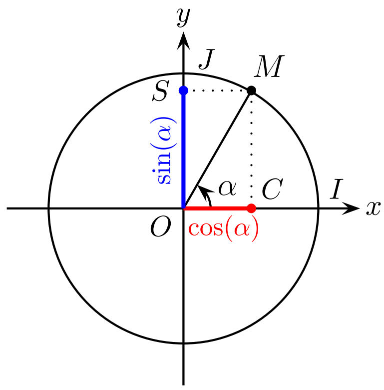
Les fonctions sinus et cosinus

Définition 2.4
Soit $P(1; 0)$ sur le cercle trigonométrique. Soit encore M, l'image de P par une rotation de centre O et d'angle α.

On appelle **cosinus** de l'angle α, noté $\cos(\alpha)$, la première coordonnée ou abscisse de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OC, où C est la projection de M sur l'axe des abscisses.

On appelle **sinus** de l'angle α, noté $\sin(\alpha)$, la seconde coordonnée ou ordonnée de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OS, où S est la projection de M sur l'axe des ordonnées.

On note : $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$



Remarques

- Si le point S est au-dessus de O, le sinus est positif ; si S est au-dessous de O, le sinus est négatif.
- Si le point C est à droite de O, le cosinus est positif ; si C est à gauche de O, le cosinus est négatif.
- Des valeurs approximatives de $\sin(\alpha)$ et de $\cos(\alpha)$, pour tout angle α, peuvent être facilement obtenues au moyen d'une machine à calculer.

  Exemple : $\sin(35°) = 0,5735\ldots$; $\cos(3) = -0,9899\ldots$

Propriétés

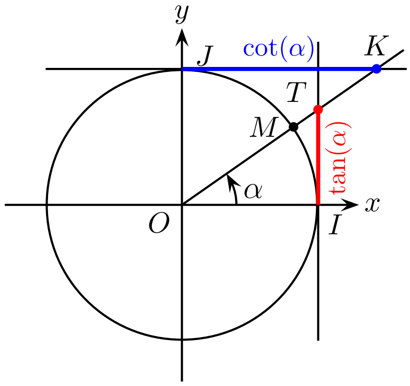
Il découle de la définition que :

$$\boxed{-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1} \quad \text{et} \quad \boxed{-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1}$$

Les fonctions tangente et cotangente

Définition 2.5
Soit $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ sur le cercle trigonométrique. On définit le point T comme l'intersection entre la droite passant par $(0;0)$ et M et la droite verticale tangente au cercle au point $I(1;0)$.

On définit encore le point K comme l'intersection entre la droite passant par $(0;0)$ et M (la même que ci-dessus) et la droite horizontale tangente au cercle au point $J(0;1)$.



On appelle **tangente** de l'angle α, noté $\tan(\alpha)$, l'ordonnée de T. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment IT.

On appelle **cotangente** de l'angle α, noté $\cot(\alpha)$, l'abscisse de C. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment JK.

On note : $T(1; \tan(\alpha))$ et $K(\cot(\alpha); 1))$.

Remarques

- Si T est au-dessus de I, la tangente est positive ; si T est au-dessous de I, la tangente est négative.
- Si K est à droite de J, la cotangente est positive ; si K est à gauche de J, la cotangente est négative.

Relations fondamentales entre les fonctions trigonométriques d'un même arc

Les trois relations suivantes permettent de déterminer le sinus, le cosinus, la tangente ou la cotangente d'un angle lorsqu'une seule de ces valeurs est connue. Elles sont très importantes. Il faut donc les connaître par cœur.

Proposition 2.1
Soit un angle α. On a l'égalité

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

et, si toutes les expressions sont bien définies (si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ pour la première et si $\alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ pour la seconde), les égalités

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

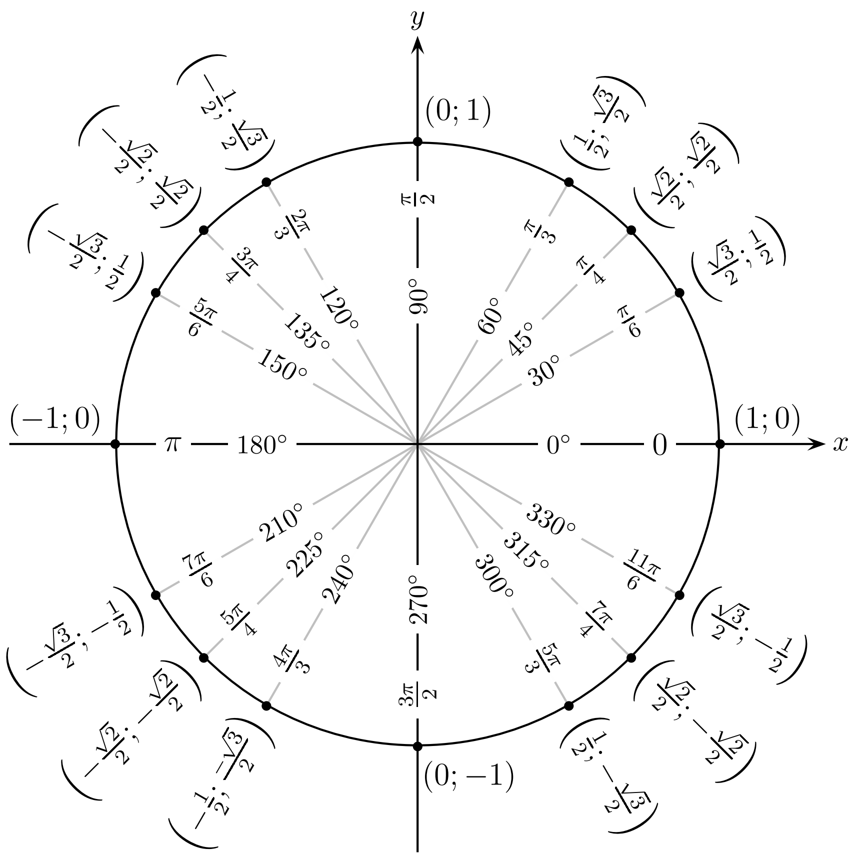
Ces égalités seront établies en exercices.

2.2.2 Valeurs exactes des fonctions trigonométriques

Il est bon de connaître par cœur les valeurs exactes des fonctions trigonométriques de quelques angles particuliers qu'on retrouve fréquemment.

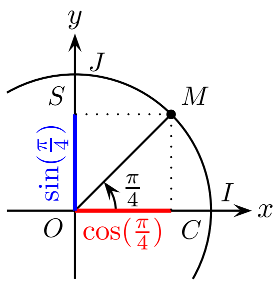
α (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
α (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$
$\cot(\alpha)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	0

Au lieu de représenter ces valeurs sous forme d'un tableau, on peut également utiliser le cercle trigonométrique.



Démonstration. Nous allons déterminer les valeurs du sinus et du cosinus pour les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Les valeurs de la tangente et de la cotangente s'obtiennent ensuite aisément en utilisant les relations : $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$.

– $\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (= 45°)$



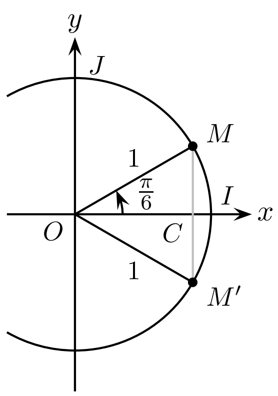
On sait que $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En effet le triangle OMC est isocèle ($\widehat{MOC} = \widehat{OMC} = \frac{\pi}{4}$, voir le dessin).

Donc $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

– $\alpha = \frac{\pi}{6} \quad (= 30°)$



Dans le dessin ci-contre, on voit que comme l'angle $\widehat{COM}$ vaut $\frac{\pi}{6}$, l'angle $\widehat{OMC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$, de même que l'angle $\widehat{OM'C}$ (par symétrie). Le triangle OMM' est donc équilatéral et la longueur de chacun de ses côtés vaut 1 (rayon du cercle).

On en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = CM = \frac{1}{2}$.

De plus, le théorème de Pythagore écrit dans le triangle OMC permet d'écrire $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$. Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a finalement : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

– $\alpha = \frac{\pi}{3} \quad (= 60°)$

On peut montrer que $\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (voir le chapitre sur les fonctions trigonométriques en analyse) .

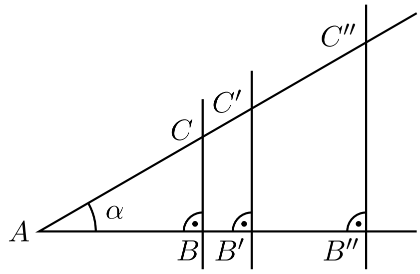
On a alors que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

□

2.3 Les triangles rectangles

Définition 2.6 (Rappel)
Un **triangle rectangle** est un triangle possédant un angle droit. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** et les côtés de l'angle droit les **cathètes**.

Une particularité intéressante des triangles rectangles est le fait que tous ces triangles qui ont un angle aigu α de même mesure sont semblables : leur côtés sont donc proportionnels. Le théorème de Thalès nous permet d'écrire pour les triangles ABC, $AB'C'$ et $AB''C''$ (angle aigu α commun) :



$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}.$$

Ce rapport ne dépend que de la mesure de α. On peut donc définir le rapport :

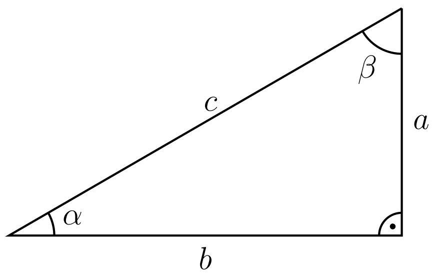
sinus défini par $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète opposée à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$

On utilise les notations définies par la figure ci-dessous.

On définit également les deux autres rapports :

cosinus défini par $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète adjacente à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$

tangente défini par $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète opposée à } \alpha}{\text{longueur de la cathète adjacente à } \alpha} = \frac{a}{b}}$

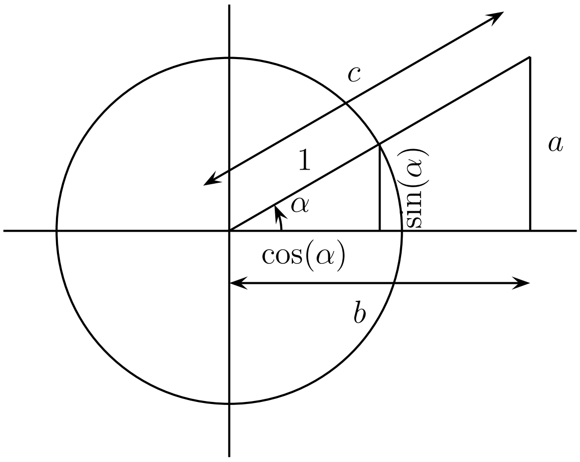


On peut, de la même manière, définir le sinus, le cosinus et la tangente pour le second angle aigu du triangle rectangle, l'angle β.

Proposition 2.2
Les rapports sinus, cosinus et tangente définis ci-dessus correspondent bien aux définitions des fonctions trigonométriques pour les angles aigus.

Démonstration. A chaque angle aigu α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, on peut associer un triangle rectangle de côtés de longueur 1 pour l'hypothénuse et $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ pour les deux cathètes.

Tout triangle rectangle avec un angle α de même mesure est semblable au triangle rectangle défini ci-dessus. On oriente ce triangle pour obtenir la figure représentée ci-dessous.



En utilisant le théorème de Thalès, on trouve :

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{a}{c}.$$

De plus, on a bien que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. □

2.3.1 Résolution de triangles rectangles

Définition 2.7
Résoudre un triangle consiste à calculer les éléments non donnés (côtés et angles)

On pourra s'aider de la machine pour le calcul des fonctions trigonométriques.

Exemple

Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne le côté $c = 4.25$ *et l'angle* $\beta = 67.2°$.

On obtient d'abord $\alpha = 90° - \beta = 22.8°$.
Comme $\cos(67.2°) = \frac{a}{4.25}$, *on obtient avec la machine :*

$$a = 4.25 \cdot \cos(67.2°) \cong 1.65$$

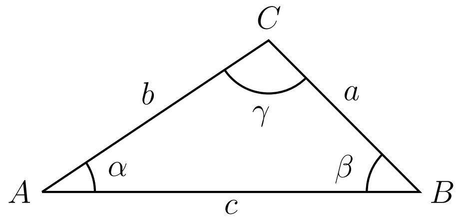
Comme $\sin(67.2°) = \frac{b}{4.25}$, *on obtient avec la machine :*

$$b = 4.25 \cdot \sin(67.2°) \cong 3.92$$

Pour résoudre un triangle rectangle (i.e. déterminer toutes ses caractéristiques), il faut connaître :
– la longueur d'au moins deux côtés de ce triangle, ou
– la longueur d'un côté de ce triangle et un angle.

2.4 Les triangles quelconques

Dans ce paragraphe, on considère un triangle quelconque ABC. On note ses sommets dans le sens positif par A, B et C. Les angles associés aux sommets seront notés α, β et γ et les côtés opposés aux sommets a, b et c.



Cette convention doit être respectée dans le but de pouvoir appliquer les théorèmes qui suivent.

Lorsqu'on a parlé des triangles rectangles, la connaissance de deux caractéristiques (angle ou longueur de côté) nous permettait de trouver toutes ses caractéristiques. Dans le cas d'un triangle quelconque, c'est au moins trois caractéristiques qu'il faut connaître pour pouvoir déterminer toutes les autres. Les théorèmes ci-dessous nous permettront de résoudre un triangle quelconque.

2.4.1 Théorème du sinus

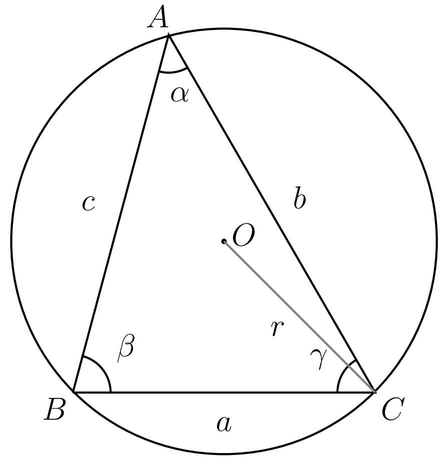
Théorème 2.3

Considérons un triangle quelconque ABC inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r.

On a les relations suivantes :

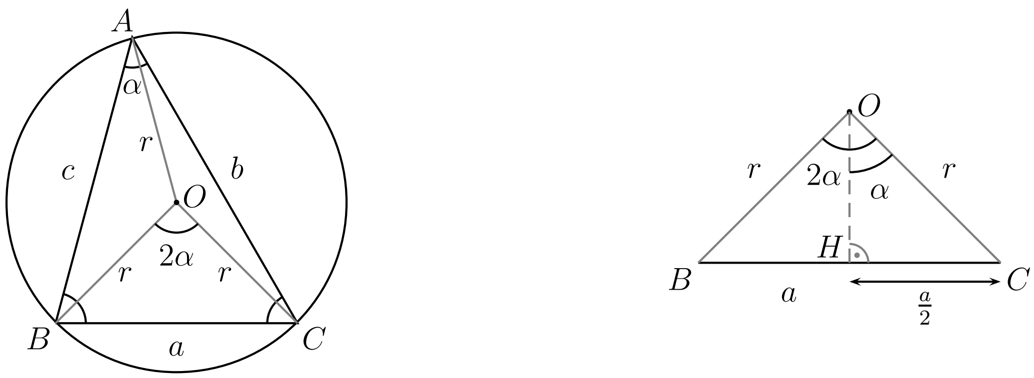
$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r}$$

où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.



Autrement dit : dans un triangle quelconque, le rapport entre le côté opposé à un angle et le sinus de cet angle est égal au rapport entre le côté opposé à un autre angle et le sinus de cet autre angle. Ce rapport est aussi égal au double du rayon du cercle circonscrit.

Démonstration. Considérons un triangle quelconque ABC inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O.



Le triangle OBC est isocèle en O, car les côtés $[OB]$ et $[OC]$ sont d'égale longueur.

On en déduit que $[OH]$ est en même temps bissectrice de l'angle en O et hauteur issue de O.

Or l'angle en O vaut 2α ; et l'angle $\widehat{COH} = \alpha$. On a donc $\dfrac{CH}{OC} = \sin(\alpha)$.

Or $CH = \dfrac{a}{2}$ et $OC = r$. On peut donc réécrire l'égalité précédente sous la forme : $\sin(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$.

Finalement, en transformant cette égalité, on a :

$$2r = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

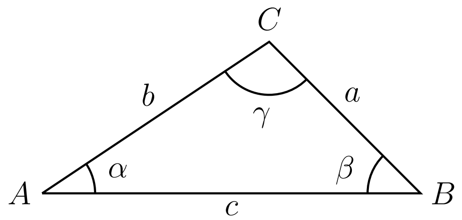
Pour achever la démonstration, il suffit de choisir les triangles OAC et OAB et appliquer le même raisonnement. □

2.4.2 Théorème du cosinus

Théorème 2.4
Considérons un triangle quelconque ABC.

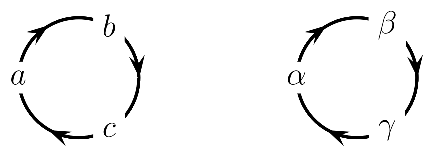
On a les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 & = & c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{array}}$$



Autrement dit : le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés moins deux fois le produit des longueurs des deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle entre eux.

Pour passer d'une relation à l'autre, on fait les permutations circulaires suivantes.



Cela nous permet de ne mémoriser qu'une seule relation.

Démonstration. Considérons un triangle quelconque ABC. Nous allons démontrer la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Pour cela, nous allons examiner la hauteur partant du sommet C. On doit distinguer trois cas suivant où se situe le pied de cet hauteur : entre A et B, à gauche de A ou à droite de B.

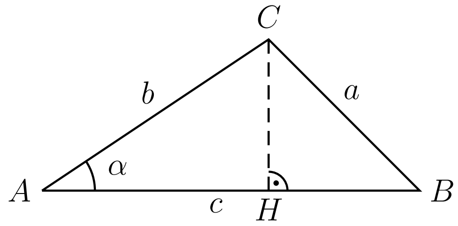
1. Premier cas : la hauteur "tombe" entre A et B : les trois angles du triangle sont aigus.

En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

– $\sin(\alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\alpha)$

– $\cos(\alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\alpha)$

De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = c - AH = c - b\cos(\alpha)$.



Pour obtenir a^2, on peut maintenant utiliser le théorème de Pythagore sur le triangle CHB :

$$\begin{aligned}
a^2 &= CH^2 + HB^2 \\
&= b^2\sin^2(\alpha) + (c - b\cos(\alpha))^2 \\
&= b^2\sin^2(\alpha) + c^2 + b^2\cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\
&= b^2 \underbrace{(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}_{1} + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

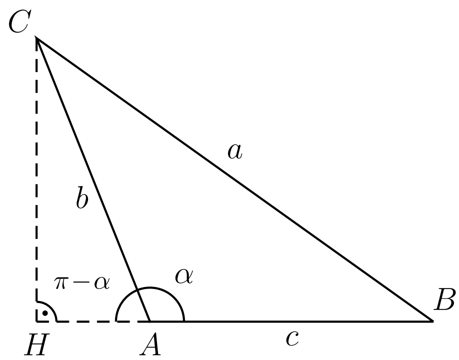
2. <u>Deuxième cas :</u> la hauteur "tombe" à gauche de A : l'angle α est obtus.

   En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

   – $\sin(\pi - \alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\pi - \alpha) = b\sin(\alpha)$

   – $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\pi - \alpha) = -b\cos(\alpha)$

   De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = c + AH = c - b\cos(\alpha)$.



   Comme pour le cas 1, on utilise le théorème de Pythagore sur le triangle CHB pour obtenir a^2. On peut reprendre ici la démonstration du cas 1, puisque HB à la même forme qu'en 1.

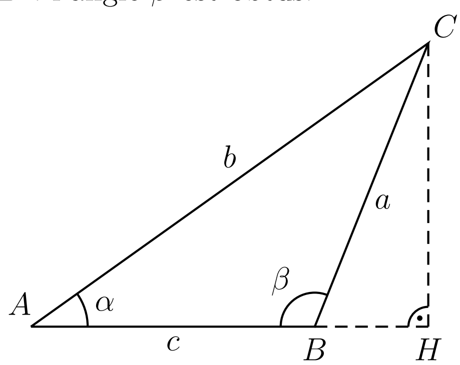
3. <u>Troisième cas :</u> la hauteur "tombe" à droite de B : l'angle β est obtus.

   En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

   – $\sin(\alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\alpha)$

   – $\cos(\alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\alpha)$

   De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = AH - c = b\cos(\alpha) - c$.



   Comme pour le cas 1, on utilise le théorème de Pythagore sur le triangle CHB pour obtenir a^2. On peut reprendre ici la démonstration du cas 1, puisque HB pour 3 est l'opposé de HB pour 1 et que l'on considère le carré de HB dans le développement.

On peut, de la même manière, montrer les relations pour b^2 et c^2. □

2.4.3 Résolution de triangles quelconques

A partir de ces deux théorèmes, les informations minimales que l'on doit connaître pour résoudre un triangle quelconque (i.e. déterminer toutes ses caractéristiques) sont :
– la longueur des trois côtés de ce triangle, ou
– la longueur de deux côtés de ce triangle et un angle, ou
– la longueur d'un côté de ce triangle et deux angles.

Exemple

Résoudre le triangle ABC dont on donne le côté $a = 70.24$*, le côté* $b = 82.12$ *et l'angle* $\gamma = 30.69°$.

Par le théorème du cosinus, on obtient que le carré du côté c vaut

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma) = (70.24)^2+(82.12)^2-2\cdot 70.24\cdot 82.12\cos(30.69°) \cong 1756.88$$

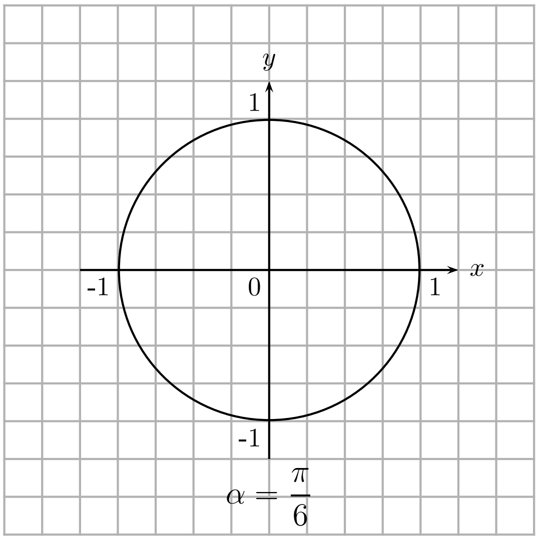
Et donc que $c \cong 41.92$
Avec cette information, on peut utiliser le théorème du sinus pour déterminer α. *On sait que* $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. *On en déduit que*

$$\sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c} = \frac{70.24\cdot\sin(30.69°)}{41.92} \cong 0.8552$$

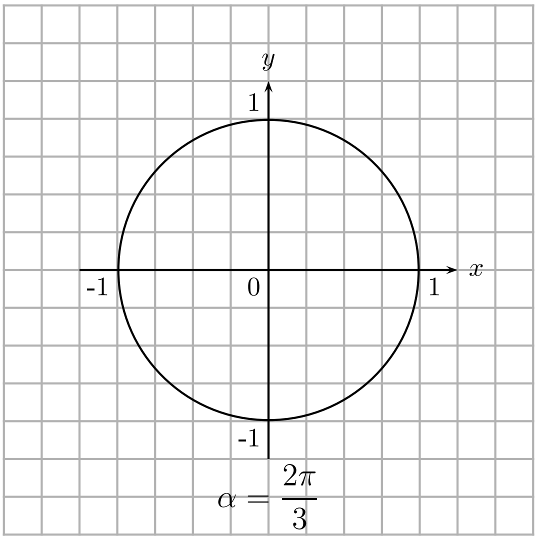
A l'aide de la machine à calculer, on détermine l'angle α *qui a pour sinus* 0.8552 *:* $\alpha \cong 58.79°$.
Finalement, on trouve que $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 90.52°$.

2.5 Exercices

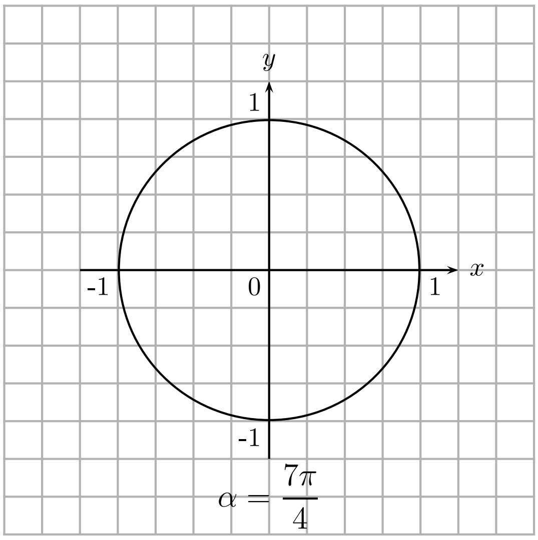
1) Sur les trois cercles trigonométriques ci-dessous, représenter graphiquement le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles indiqués sous le cercle ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{4}$). Pour chaque dessin, évaluer ensuite les valeurs de ces quatre mesures et les contrôler à l'aide d'une machine à calculer.
(Pour dessiner les angles, les convertir au préalable en degrés)



$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$



$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$



$\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$

2) En utilisant une machine à calculer, trouver les valeurs de :

a) $\sin(128°)$	b) $\cos(315°)$	c) $\tan(123°)$
d) $\sin(2)$	e) $\cos(0.7)$	f) $\tan(4)$

3) En utilisant le cercle trigonométrique et des théorèmes de géométrie élémentaire, prouver les relations suivantes :

a) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

b) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c) $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

4) Construire les angles aigus ayant

a) 0.43 pour sinus b) $\frac{2}{3}$ pour cosinus,

puis les mesurer.

5) Est-il possible de construire un angle α tel que

a) $\sin(\alpha) = 1.4$ b) $\cos(\alpha) = 1.2$ c) $\tan(\alpha) = 2.5$

6) Utiliser les relations fondamentales entre $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ (voir exercice 3) pour résoudre (sans machine) les questions suivantes.

a) Si α est un angle du deuxième quadrant tel que $\sin(\alpha) = 0.8$ que vaut $\cos(\alpha)$?

b) Le cosinus d'un angle du quatrième quadrant vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Que vaut son sinus ?

c) Trouver $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sachant que α est un angle du deuxième quadrant et que $\tan(\alpha) = -\sqrt{8}$.

d) Trouver $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sachant que α est un angle du quatrième quadrant et que $\tan(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$.

e) Montrer que : $1 + \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

7) Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1 - \cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)}$ b) $\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$

c) $\dfrac{\sin^2(\alpha) - \sin^4(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \cos^4(\alpha)}$ d) $\tan(\alpha)\cos(\alpha)$

e) $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\tan^2(\alpha)$ f) $\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\tan(\alpha)$

8) $\boxed{\textit{ex 93, TR 4}}$ Résoudre les équations trigonométriques suivantes en donnant les solutions entre 0° et 360°.

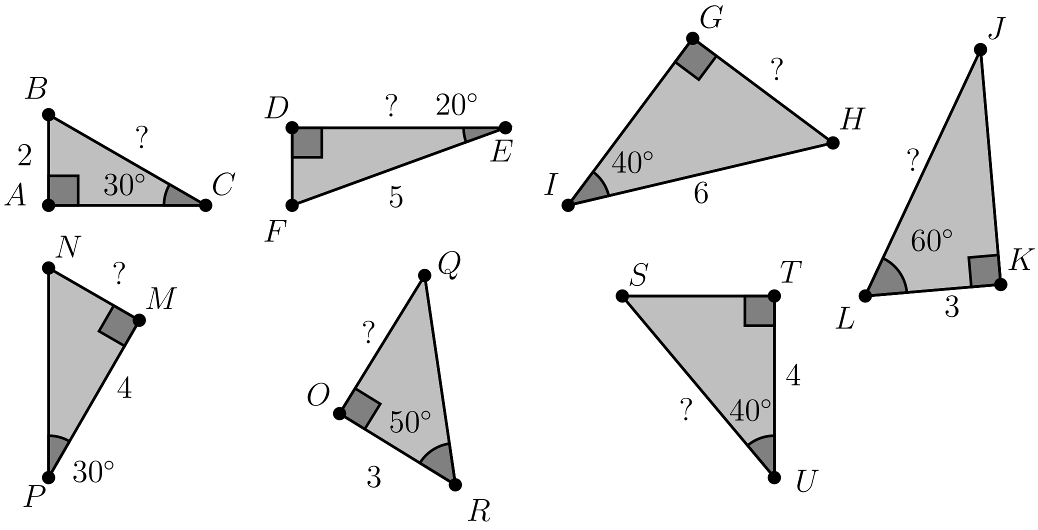
a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ b) $\cos(x) = -0.4$ c) $\sin(x) = -1.2$

d) $\cos(x) = 0.7$ e) $\tan(x) = -1.4$ f) $\cos(x) = 2.3$

g) $\tan(x) = 0.2$ h) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\tan(x) = \sqrt{3}$ k) $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9) *ex 95, TR 6* Calculer le côté indiqué dans les triangles suivants, si possible.



10) *ex 96, TR 6*

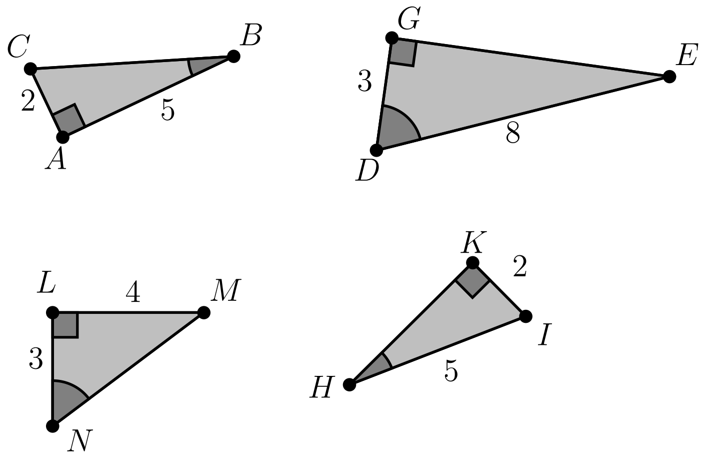
a) Le triangle ABC est rectangle en B tel que $AB = 7$, $\widehat{C} = 65°$. Calculer BC.

b) Le triangle DEF est rectangle en F tel que $DE = 10$, $\widehat{D} = 65°$. Calculer DF.

c) Le triangle JKL est tel que $JK = 8$, $\widehat{J} = 90°$, $\widehat{L} = 40°$. Calculer KL.

d) Le triangle GHI est tel que $GH = 3$, $\widehat{G} = 30°$, $\widehat{H} = 60°$. Calculer HI.

11) *ex 97, TR 7* Calculer l'angle indiqué dans les triangles suivants, si possible.



12) *ex 98, TR 7*

(a) Le triangle VWX est rectangle en V tel que $WX = 81$ et $VX = 54$. Calculer $\widehat{X}$.

(b) Le triangle YZA est rectangle en Z tel que $YZ = 34$ et $YA = 61$. Calculer $\widehat{Z}$.

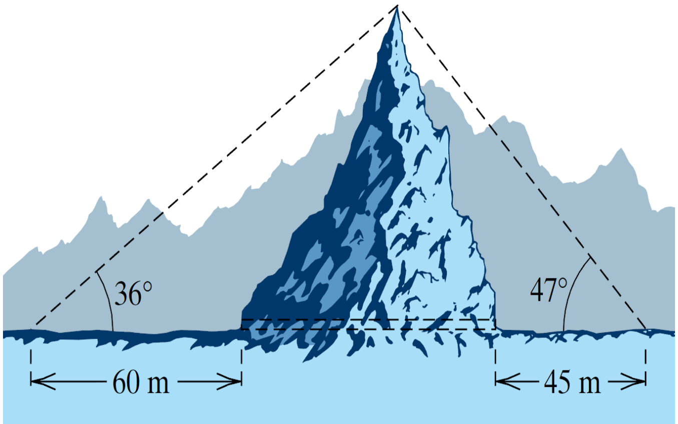
(c) Le triangle BMP est rectangle en P tel que $BM = 26$ et $MP = 12$. Calculer $\widehat{M}$.

13) Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ? (Rayon de la Terre : 6370 km)

14) Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55°W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70°E à 28.5 km/h.
Calculer la distance séparant les bateaux à 15h00.

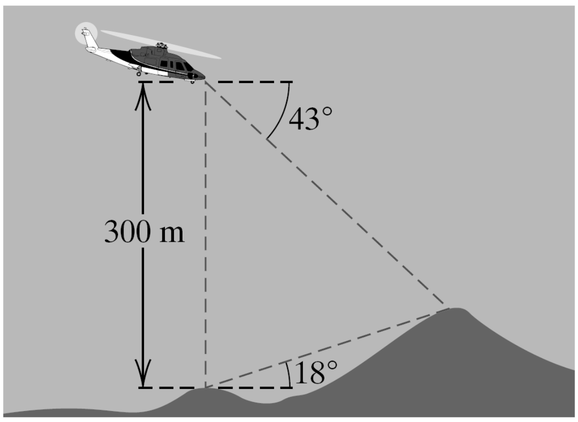
15) On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 80 m de haut. A une distance de 60 m de la base de la montagne, l'angle d'élévation est de 36° (voir figure). Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 45 m est de 47°.

Calculer la longueur du tunnel au mètre près.



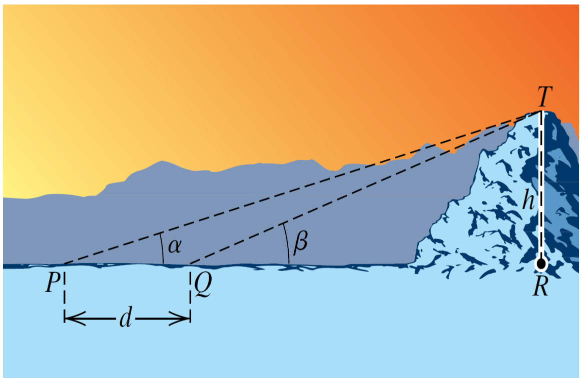
16) Un hélicoptère est en vol stationnaire à 300 m au-dessus du sommet d'une montagne qui culmine à 1560 m, comme le montre la figure. Du sommet de cette montagne ou de l'hélicoptère, on peut voir un deuxième pic, plus élevé. Vu de l'hélicoptère, son angle de dépression est de 43° et vu du petit sommet, son angle d'élévation est de 18°.

Calculer l'altitude du sommet le plus élevé et la distance séparant l'hélicoptère de ce sommet.



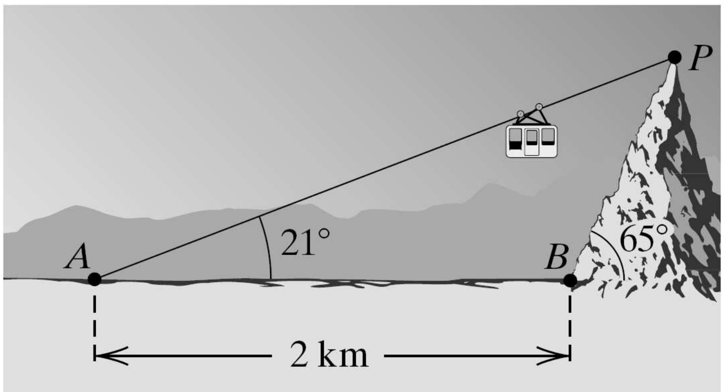
17) Si on observe le sommet d'une montagne à partir du point P représenté dans la figure, l'angle d'élévation est de $\alpha = 15°$. A partir du point Q, plus proche de la montagne de $d = 3$ km, l'angle d'élévation est de $\beta = 20°$.

Calculer la hauteur de la montagne.

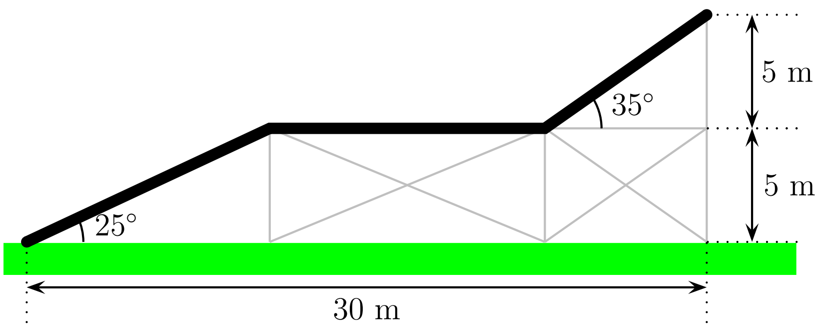


18) La figure ci-dessous représente un téléphérique transportant des passagers d'un point A, qui se trouve à 2 km du point B situé au pied de la montagne, à un point P au sommet de la montagne. Les angles d'élévation de P aux points A et B sont respectivement de 21° et 65°.

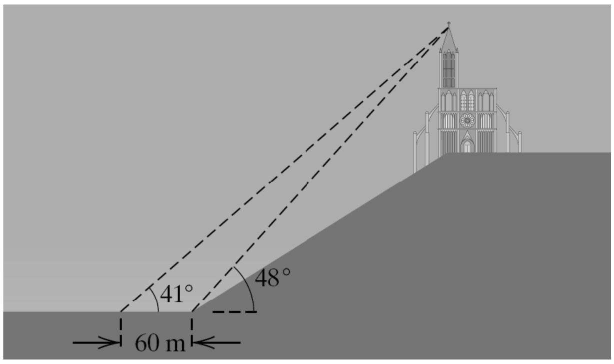
Calculer la hauteur de la montagne (par rapport au point B).



19) La figure ci-dessous représente une partie d'un plan de toboggan d'une piscine. Trouver la longueur totale du toboggan.

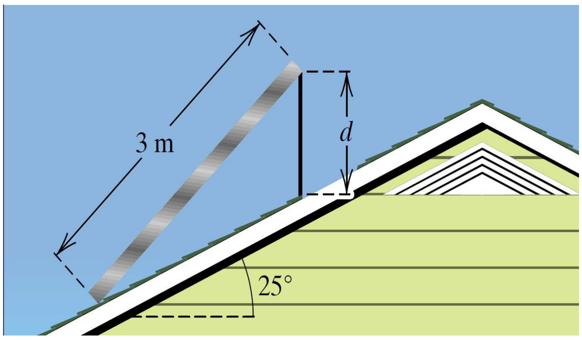


20) Une cathédrale est située au sommet d'une colline (voir schéma ci-dessous). En observant le sommet de sa flèche depuis le pied de la colline, l'angle d'élévation est de 48°. Si on l'observe à 60 m de la base de la colline, l'angle d'élévation de la flèche est de 41°. La pente de la colline forme un angle de 32°. Calculer la hauteur de la cathédrale.



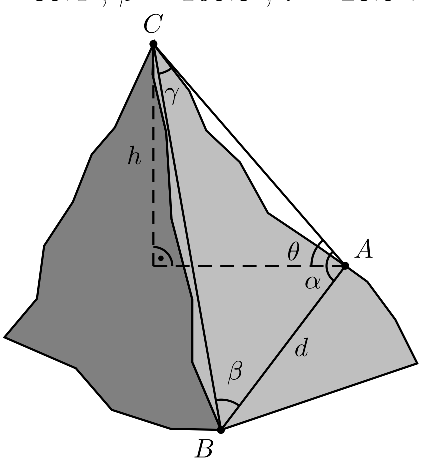
21) La figure ci-dessous représente un panneau solaire de 3 m de large qui doit être fixé sur un toit qui forme un angle de 25° avec l'horizontale.

Calculer la longueur d du support afin que le panneau fasse un angle de 45° avec l'horizontale.



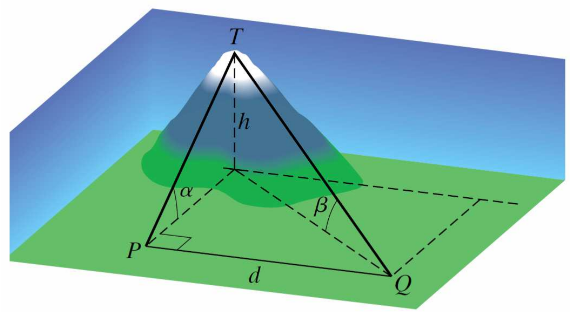
22) Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux point A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet. A et B ne sont pas forcément à la même altitude mais ils sont séparés d'une distance d. On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A (angle entre AC et l'horizontale).
Quelle est l'altitude de C si celle de A est h_A ?

Application numérique :
$d = 450$ m, $h_A = 920$ m, $\alpha = 35.4°$, $\beta = 105.8°$, $\theta = 23.5°$.



23) En observant le sommet d'une montagne à partir d'un point P au sud de la montagne, l'angle d'élévation est α (voir figure). L'observation à partir d'un point Q, situé à d km à l'est de P, donne un angle d'élévation β.

Déterminer la hauteur h de la montagne si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$ et $d = 16$ km.



24) Un triangle ABC est donné par $b = 35,2$, $c = 26,2$ et $\alpha = 123,2°$.

Calculer la longueur du segment $[AP]$, où P est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et le côté $[BC]$.

25) Un géomètre, situé à une altitude de 912 m, observe une antenne de communication située sur une colline en face de lui. Il mesure, au moyen d'un théodolite, les angles d'élévation du sommet et du pied de l'antenne et détermine comme valeurs pour ces angles : respectivement 17.15° et 14.03°.

Si la hauteur de l'antenne est de 35 m, à quelle altitude se trouve le pied de cette dernière ?

26) Un ingénieur se promène sur le Champ-de-Mars en direction de la tour Eiffel, qui culmine à une hauteur de 324 mètres. Il remarque alors que l'angle d'élévation sous lequel il voit le sommet de la tour est de 32.8°. 5 minutes plus tard, il constate que cet angle est passé à 52°.

A quelle vitesse l'ingénieur s'est-il déplacé entre ses deux observations du sommet de la tour Eiffel ? *La réponse doit être donnée en km/h.*

(On suppose que le sommet de la tour et les points où sont effectués les observation sont dans le même plan vertical. On suppose également que la vitesse, à laquelle l'ingénieur se déplace, est constante.)

2.6 Solutions des exercices

2) a) $0,788$ b) $0,707$ c) $-1,539$
d) $0,909$ e) $0,765$ f) $1,158$

6) a) $\cos(\alpha) = -0,6$ b) $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$
c) $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$; $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{8}}{3}$ d) $\cos(\alpha) = \frac{5}{6}$; $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

7) a) $\frac{1}{\sin(\alpha)}$ b) $\sin(\alpha)$ c) 1
d) $\sin(\alpha)$ e) 1 f) $\frac{1}{\cos(\alpha)}$

8) a) $S = \{30°; 150°\}$ b) $S = \{113.58°; 246.42°\}$ c) $S = \emptyset$
d) $S = \{45.57°; 314.43°\}$ e) $S = \{125.54°, 305.54°\}$ f) $S = \emptyset$
g) $S = \{11.31°; 191.31°\}$ h) $S = \{60°; 120°\}$ i) $S = \{45°; 315°\}$
j) $S = \{60°; 240°\}$ k) $S = \{30°; 210°\}$

9) a) $BC = 4$ b) $DE \cong 4.70$ c) $GH \cong 3.86$
d) $JL = 6$ e) $MN \cong 2.31$ f) $OQ \cong 3.58$
g) $SU \cong 5.22$

10) a) $BC \cong 3.26$ b) $DF \cong 4.23$ c) $KL \cong 12.45$ d) $HI \cong 1.5$

11) a) $\widehat{B} \cong 21.8°$ b) $\widehat{D} \cong 67.98°$ c) $\widehat{N} \cong 53.13°$ d) $\widehat{H} \cong 23.58°$

12) a) $\widehat{X} \cong 48.19°$ b) $\widehat{Y} \cong 56.13°$ c) $\widehat{M} \cong 62.51°$

13) 1183 km

14) $106,5$ km

15) 80 m

16) $1637,5$ m et $326,21$ m

17) $3,05$ km

18) 935 m

19) $32,69$ m

20) 105 m

21) $1,13$ m

22) 1196 m

23) $7,50$ km

24) $14,28$

25) 1061 m

26) environ 3 km/h