Math | App dérivées, croissance

Ex 4.6., p. 130

5) $f(x) = \frac{2x+5}{2x-3}$

[1] $f'(x) = \frac{2\cdot(2x-3) - (2x+5)\cdot 2}{(2x-3)^2} = \frac{-16}{(2x-3)^2}$

[2] $f'(x) = 0 \rightarrow -16 = 0$ ↯

Pour le tableau de signe, on calcule également les zéros du dénom : $(2x-3)^2 = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

[3]

	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
-16		$-$		$-$	
$(2x-3)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	↑	↘	

f n'existe pas en $\frac{3}{2}$

7) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

[1] $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

[2] $f'(x) = 0 \rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$

↳ $5x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

↳ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 = 2^2$

$x_{1;2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

[3]

	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$		↗		↗	pt à tg hor	↗	MAX	↘	MIN	↗		

MAX : $(1; f(1)) = (1; 2)$
MIN : $(3; f(3)) = (3; -26)$
pt à tg hor : $(0; f(0)) = (0; 1)$

8) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

[1] $f'(x) = 3x^2 + \frac{0 \cdot x - 3 \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$

[2] $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^4 - 3 = 0 \quad | : 3$

$x^4 - 1 = 0$

$x^4 = 1$

$x = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$

Zéro dénom : $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

[3]

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$3x^4 - 3$		+	0	−		−	0	+	
x^2		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	MAX	↘		↘	MIN	↗	

MAX : $(-1; f(-1)) = (-1; -4)$
MIN : $(1; f(1)) = (1; 4)$

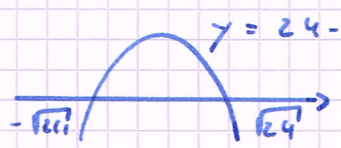
9) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{24 - x^2}$

⚠ Domaine de définition : $\sqrt{\ldots}$: $24 - x^2 \geq 0$

$24 - x^2 = 0$

$x^2 = 24 \rightarrow x = \pm \sqrt{24}$

$Df = [-\sqrt{24}; \sqrt{24}]$



[1] $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{24 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{24 - x^2}} \cdot (-2x)$

$= \frac{2x \cdot (24 - x^2) - x^3}{\sqrt{24 - x^2}} = \frac{x\,(2 \cdot (24 - x^2) - x^2)}{\sqrt{24 - x^2}}$

$$= \frac{x\,(48 - 3x^2)}{\sqrt{24 - x^2}}$$

[2] $f'(x) = 0 \rightarrow x \cdot (48 - 3x^2) = 0$

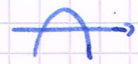
↳ $x_1 = 0$

↳ $48 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x_{2,3} = \pm 4$

[3]

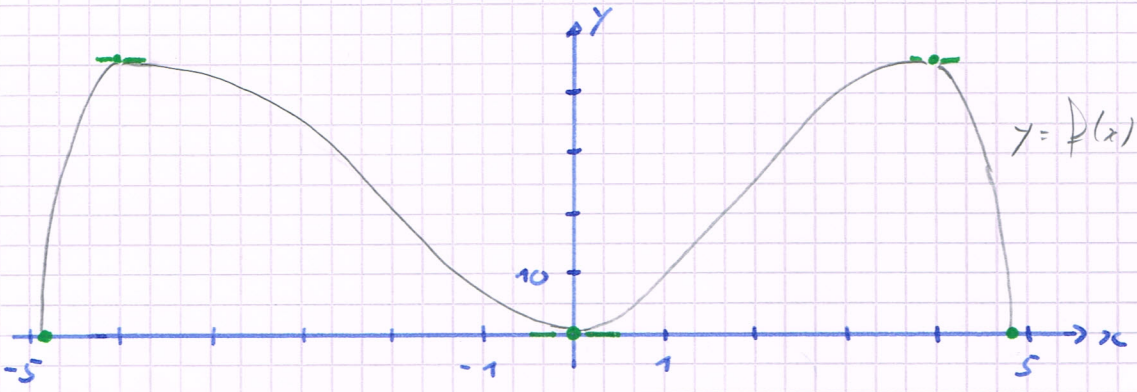
	$-\sqrt{24}$		-4		0		4		$\sqrt{24}$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$48 - 3x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{24 - x^2}$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		↗	MAX	↘	MIN	↗	MAX	↘	



MAX : $(-4;\ f(-4)) = (-4;\ 16\sqrt{8}) = (-4;\ 32\sqrt{2})$

$(4;\ f(4)) = (4;\ 16\sqrt{8}) = (4;\ 32\sqrt{2})$

Min : $(0;\ f(0)) = (0;\ 0)$



Représentation graphique symétrique car f est paire : $f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt{24 - (-x)^2} = x^2 \cdot \sqrt{24 - x^2} = f(x)$

10] $f(x) = \sin^3(x)$

[1] $f'(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$

[2] $f'(x) = 0 \rightarrow 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 0$

↳ $\sin^2(x) = 0$

$$\sin(x) = 0 \quad \text{"}0\text{"}$$

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin(0) + k \cdot 2\pi \\ x_2 = \pi - \arcsin(0) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + k \cdot 2\pi \quad [1] \\ x_2 = \pi + k \cdot 2\pi \quad [2] \end{cases}$$

↳ $\cos(x) = 0 \quad \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x_3 = \arccos(0) + k \cdot 2\pi \\ x_4 = -\arccos(0) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad [3] \\ x_4 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad [4] \end{cases}$$

[3] Comme $\sin(x)$ est 2π-périodique, la fct $f(x) = \sin^3(x)$ est aussi 2π-périodique.
On réalise le tableau de signe sur un intervalle qui a comme longueur 2π → Choix : $[0; 2\pi]$
2 cvcs sur $[0; 2\pi]$: 0 [1] ; $\frac{\pi}{2}$ [3] ; π [2] ; $\frac{3\pi}{2}$ [4] ; 2π [1]

	$-\infty$ …	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π … $+\infty$
3	… +	+		+		+		+		+ …
$\sin^2(x)$	… +	0	+		+	0	+		+	0 + …
$\cos(x)$	… +		+	0	−		−	0	+	+ …
$f'(x)$	…	0	+	0	−	0	−	0	+	0 + …
$f(x)$		tg hor	↗	MAX	↘	tg hor	↘	MIN	↗	tg hor

Considérer ce qui se passe juste avant 0 pour savoir si on a un min ou un max en 0, bord de l'intervalle d'étude.

tg hor : $(0; f(0)) = (0; 0)$; $(\pi; f(\pi)) = (0; 0)$
$(2\pi; f(2\pi)) = (0; 0)$

MAX : $\left(\frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$

MIN : $\left(\frac{3\pi}{2}; f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}; -1\right)$

Math | App. dérivées, croissance

