Géométrie vectorielle et analytique de l'espace

Chapitre 1

Vecteurs dans l'espace

1.1 Définitions

La présentation de la notion de vecteurs dans l'espace est analogue à celle des vecteurs du plan. Nous nous bornerons à rappeler les principaux termes utilisés, sans redonner toutes les propriétés des éléments et des opérations considérés.

On désigne par ε l'ensemble des points de l'espace.

Définition 1.1
On appelle **bipoint** (ou **flèche**) de l'espace tout couple $(A; B)$ de points de l'espace. A est l'**origine** et B l'**extrémité** de ce bipoint. Si A et B sont distincts, la droite (AB) est le **support** du bipoint $(A; B)$. La longueur du bipoint $(A; B)$ est la distance $\delta(A; B)$.

Deux bipoints ont la **même direction** si leurs supports sont parallèles ou confondus. Deux bipoints de même direction sont soit de **même sens** soit de **sens contraire**.

Deux bipoints $(A; B)$ et $(A'; B')$ sont **équipollents** si les segments $[AB']$ et $[A'B]$ ont le même milieu. Dans ce cas on note : $(A; B) \sim (A'; B')$.

De manière équivalente, deux bipoints sont équipollents s'ils sont de :
– même direction,
– même sens,
– même longueur.

Propriété

La relation d'**équipollence** définie dans $\varepsilon \times \varepsilon$ est une relation d'équivalence.

Définition 1.2
Soit $(A; B)$ un bipoint de l'espace. L'ensemble des bipoints $(M; N)$ équipollents au bipoint $(A; B)$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$, appelée **vecteur** et notée $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{(M; N) \mid (M; N) \sim (A; B)\}$$

Le bipoint $(A; B)$, ou tout autre bipoint de $\overrightarrow{AB}$, est un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En d'autres termes, le bipoint $(A; B)$ définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$(A; B) \sim (C; D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Un vecteur, sans référence à un représentant, se note $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

L'ensemble des vecteurs de l'espace se note $\mathbf{V}_3$.

1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

De la même façon que dans $\mathbf{V}_2$, on définit dans $\mathbf{V}_3$ la **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, et le **produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel** λ, noté $\lambda \cdot \vec{u}$.

Dans $\mathbf{V}_3$, l'addition et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel jouissent des mêmes propriétés que les opérations correspondantes de $\mathbf{V}_2$.

Comme le plan vectoriel $\mathbf{V}_2$, l'espace $\mathbf{V}_3$ muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, a une structure d'**espace vectoriel réel**.

1.3 Combinaison linéaire

Dans ce qui suit, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... sont des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbf{V}_3$ et λ, β, γ, ... des nombres réels.

Définition 1.3
On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{m}$, de coefficients respectifs α, β, γ, ..., μ, le vecteur

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m}$$

Définition 1.4
Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{m}$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des nombres α, β, γ, ..., μ non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0}$$

Ceci signifie que l'un des vecteurs au moins peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{m}$, sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = \ldots = \mu = 0$$

Ceci signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.5
Deux vecteurs $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Remarques

1. Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
2. Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'il sont colinéaires.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition 1.6
Trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbf{V}_3$ sont **coplanaires** si l'un au moins est combinaison linéaire des deux autres.

Remarques

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur quelconque. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux nombres λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.
2. Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.
3. Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires.
4. Quatre points O, A, B et C de l'espace ε appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires.

1.4 Base de $\mathbf{V}_3$ et composantes scalaires

Définition 1.7

On appelle **base** de l'espace vectoriel $\mathbf{V}_3$ tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_3$ tel que **chaque vecteur** $\vec{u}$ de $\mathbf{V}_3$ peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

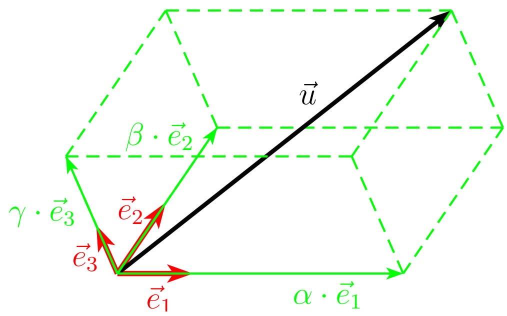
Proposition 1.1

Une base de $\mathbf{V}_3$ est constituée d'un triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs linéairement indépendants ou, de manière équivalente, d'un triplet de vecteurs non coplanaires. $\mathbf{V}_3$ est donc un espace vectoriel réel de dimension 3.

Propriétés

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbf{V}_3$, alors tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbf{V}_3$ peut s'écrire comme une combianaison linéaire *unique* de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. Il existe un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de nombres réels, et un seul, tel que

$$\boxed{\vec{u} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3}$$



α, β et γ sont les **composantes scalaires** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note alors

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

Opérations sur les composantes

Soit une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbf{V}_3$, un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires relativement à la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} \vec{u}+\vec{v} & = & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} \\ \lambda \cdot \vec{u} & = & \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Test du déterminant

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbf{V}_3$, soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires.

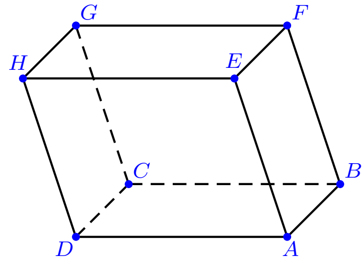
$$\boxed{\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont linéairement indépendants } \iff Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0}$$

Remarque

Le déterminant de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de $\mathbf{V}_3$, $Det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, est égal au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

1.5 Exercices

1) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.



Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$ d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$ f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$

2) Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$.

Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté à l'exercice 1.

Déterminer si les trois vecteurs donnés constituent une base de $\mathbf{V}_3$.

a) $(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG})$ b) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AB})$

c) $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CD})$ d) $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{GH})$

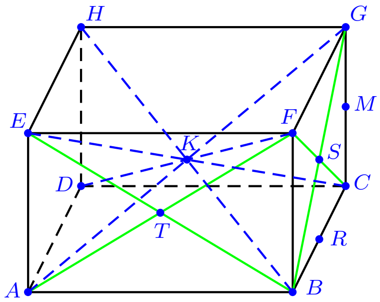
4) Déterminer, dans les cas suivants, si les trois vecteurs donnés relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_3$ sont coplanaires.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -10 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

5) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ et on note

K l'intersection des diagonales de ce parallélépipède
T l'intersection des diagonales de la face $ABFE$
S l'intersection des diagonales de la face $BCGF$
R le milieu de l'arête BC
M le milieu de l'arête CG



a) Dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Construire les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Soit la base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BR})$.

Dans la base $\mathcal{B}'$ déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{HS}$, $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{TH}$.

6) Relativement à une base $\mathcal{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathbf{V}_3$, on considère les vecteurs

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\18\\6\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-16\\10\\7\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}-6\\4\\7\end{pmatrix}$$

a) Dans la base $\mathcal{B}$ calculer les composantes du vecteur $\vec{w}=4\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{c}$.

b) Prouver que le triplet $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ constitue une base de $\mathbf{V}_3$. On note cette base $\mathcal{B}'$.

c) Exprimer le vecteur $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

1.6 Solutions des exercices

1) a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{HA}$
d) $\vec{d} = \overrightarrow{EA}$ e) $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ f) $\vec{f} = \overrightarrow{AE}$

2) a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$ c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$
d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$ e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$ f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

3) a) non b) non
c) oui d) non

4) a) oui b) non
c) non d) oui

5) b)
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{HA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{RA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

6) a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} -32 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$

Chapitre 2

Espace affine

2.1 Repère de l'espace ε

Soit ε l'ensemble des points de l'espace.

Définition 2.1
On appelle **repère** de l'espace affine ε tout quadruplet $(O; E_1; E_2; E_3)$ de points non coplanaires.

Si $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2; E_3)$ est un repère de ε, les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ déterminent une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{V}_3$, appelée **base associée** au repère $\mathcal{R}$. Le point O est appelé **origine**, les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ **vecteurs de base** du repère $\mathcal{R}$.

On note également ce repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Coordonnées d'un point relativement à un repère

Soit $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2; E_3)$ un repère du plan ε.

Les **coordonnées** x, y et z relativement à $\mathcal{R}$ d'un point M de ε sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ relativement à la base associée $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3})$. On note $M(x; y; z)$.

$$\boxed{M(x;y;z) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OE_1} + y \cdot \overrightarrow{OE_2} + z \cdot \overrightarrow{OE_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

x, la première coordonnée du point M, est appelée **abscisse** de M.
y, la deuxième coordonnée du point M, est appelée **ordonnée** de M.
z, la troisième coordonnée du point M, est appelée **cote** de M.

Remarque

On peut associer un système d'axes de coordonnées à un repère de l'espace affine ε.

Le premier vecteur de la base associée, $\vec{e}_1$, donne la direction et le sens du premier axe de coordonnées ou axe des x, noté Ox. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\vec{e}_1$.

Le deuxième vecteur de la base associée, $\vec{e}_2$, donne la direction et le sens du deuxième axe de coordonnées ou axe des y, noté Oy. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\vec{e}_2$.

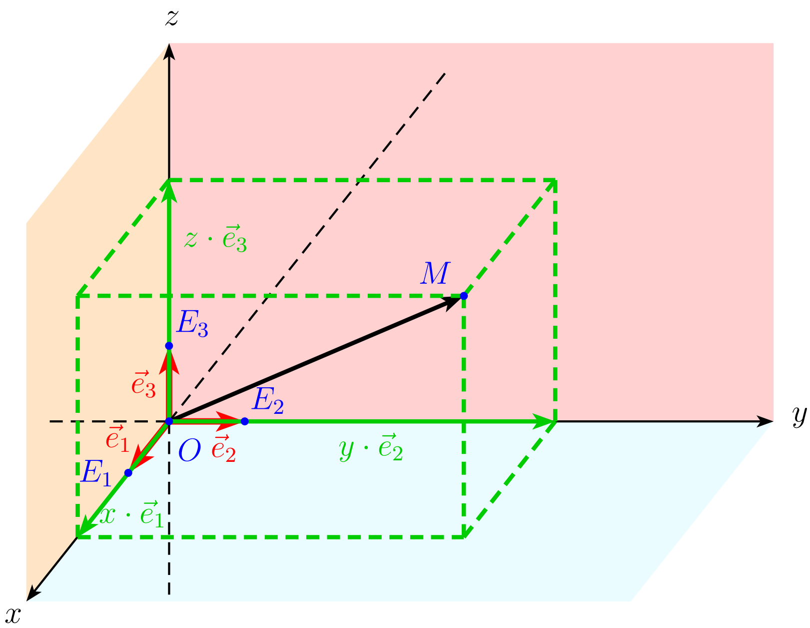
Le troisième vecteur de la base associée, $\vec{e}_3$, donne la direction et le sens du troisième axe de coordonnées ou axe des z, noté Oz. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\vec{e}_3$.

Les axes de coordonnées définissent trois plans dans l'espace, appelés **plans de référence**.

Le premier plan de référence, ou plan Oxy, est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid z = 0\}$. Il contient l'axe Ox et l'axe Oy. Il est représenté en bleu ci-dessous.

Le deuxième plan de référence, ou plan Oxz, est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid y = 0\}$. Il contient l'axe Ox et l'axe Oz. Il est représenté en orange ci-dessous.

Le troisième plan de référence, ou plan Oyz, est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid x = 0\}$. Il contient l'axe Oy et l'axe Oz. Il est représenté en rouge ci-dessous.



2.2 Calculs avec les coordonnées

Dans un repère $(O; E_1; E_2; E_3)$ de l'espace affine ε, on donne les points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$.

2.2.1 Composantes d'un vecteur

Comme on a vu que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$$

2.2.2 Milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$, noté $M_{[AB]}$, sont :

$$\boxed{M_{[AB]}\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)}$$

Les coordonnées du milieu du segment sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des extrémités du segment.

Démonstration. Soit $M_{[AB]}$, ou plus simplement M pour cette démonstration, le milieu du segment $[AB]$. Dans ce cas, les deux égalités suivantes sont vraies :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\\\frac{z_A+z_B}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

2.2.3 Centre de gravité d'un triangle

Les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, noté G, sont :

$$\boxed{G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}$$

Les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des sommets du triangle.

Démonstration. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Dans ce cas, l'égalité suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

où A' est le milieu du segment $[BC]$. On peut donc écrire :

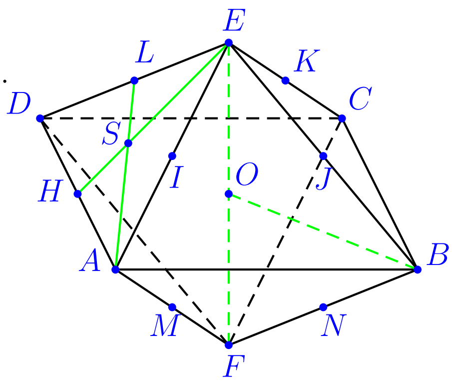
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C\\y_C\\z_C\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\\\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

2.3 Exercices

1) Soit $ABCDEF$ on octaèdre régulier de centre O. Les points H, I, J, K, L, M, N sont des milieux d'arêtes.

   Dans le repère $(B; A; O; E)$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, O et S.



2) Dans un repère $(O; E_1; E_2; E_3)$, on donne les points $A(2; 0; 3)$, $B(5; 4; 1)$, $C(1; -2; 4)$ et $D(-3; 6; -1)$.

   Construire ces points.

3) On donne les points $A(5; 2; -3)$, $B(8; 0; 5)$, $C(-2; -4; 1)$ et $D(4; -6; 3)$.

   Calculer les composantes des vecteurs suivants :

   a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

   d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ e) $4 \cdot \overrightarrow{CD} - 3 \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

4) On donne les points $A(-4; 1; 3)$, $B(4; 3; 6)$ et $C(4; -6; 3)$.

   a) Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

   b) Calculer les coordonnées du milieu E de la diagonale $[AC]$.

   c) Calculer les coordonnées des centres de gravité G_1 et G_2 des triangles ABC et ACD.

   d) Calculer les coordonnées du milieu F du segment $[G_1G_2]$. *Constatation.*

5) On donne deux sommets $A(3; -2; 5)$ et $B(7; 5; 10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5; 4; 6)$ de ses diagonales.

   Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

6) On donne les points $M(0; 8; -2)$, $N(4; 2; 4)$ et $H(2; -3; 5)$.

   Calculer les coordonnées des images M' et N' de M et N par l'homothétie de centre H et de rapport -2.

   Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$.

7) On donne les points $A(12; -11; 18)$ et $B(-8; 7; -6)$.

   Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en trois parties égales.

8) Prouver que les quatre points A, B, C, et D sont coplanaires.

   a) $A(0; 2; 4)$ $B(1; -1; 3)$ $C(-8; 2; 1)$ $D(-6; -4; -1)$

   b) $A(5; 2; 1)$ $B(-6; 3; -2)$ $C(2; 5; 2)$ $D(0; 0; -2)$

2.4 Solutions des exercices

1) a) $A(1;0;0)$ b) $B(0;0;0)$ c) $C(-1;2;0)$
d) $D(0;2;0)$ e) $E(0;0;1)$ f) $F(0;2;-1)$
g) $H(\frac{1}{2};1;0)$ h) $I(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ i) $J(0;0;\frac{1}{2})$
j) $K(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2})$ k) $L(0;1;\frac{1}{2})$ l) $M(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$
m) $N(0;1;-\frac{1}{2})$ n) $O(0;1;0)$ o) $S(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$

3) a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 33 \\ -14 \\ 32 \end{pmatrix}$

4) a) $D(-4;-8;0)$
b) $E(0;-\frac{5}{2};3)$
c) $G_1(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};4)$, $G_2(-\frac{4}{3};-\frac{13}{3};2)$
d) $F(0,-\frac{5}{2};3)$

5) $C(7;10;7)$, $D(3;3;2)$

6) $\overrightarrow{M'N'} = -2\overrightarrow{MN}$, $M'(6;-25;19)$ et $N'(-2;-13;7)$

7) $I_1(\frac{16}{3};-5;10)$, $I_2(-\frac{4}{3};1;2)$

Chapitre 3

La droite

3.1 Définitions

Définition 3.1
Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Droite déterminée par deux points

Soit deux points distincts A et B.

Définition 3.2
La **droite** (AB) est l'ensemble des points M de l'espace ε alignés avec A et B :

$$(AB) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB},\ k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB).

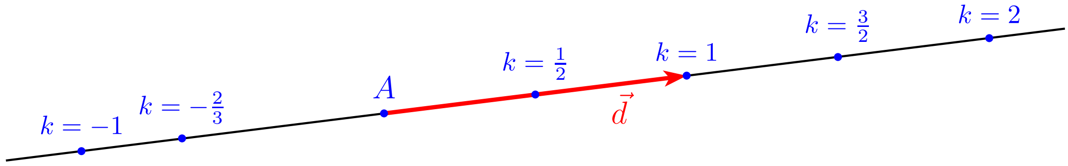
Droite déterminée par un point et une direction

Soit un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul.

Définition 3.3
La droite passant par A (appelé **point d'ancrage**) et de direction $\vec{d}$, notée $d(A;\vec{d})$, est l'ensemble des points M de l'espace ε tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires :

$$\boxed{d(A,\vec{d}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d},\ k \in \mathbb{R}\}}$$

Le vecteur $\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de la droite $d(A,\vec{d})$.



Remarque

A chaque valeur du nombre réel k correspond un unique point de la droite.
A chaque point de la droite correspond un unique nombre réel k.

3.2 Equations paramétriques d'une droite

L'espace ε est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Soit la droite d passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

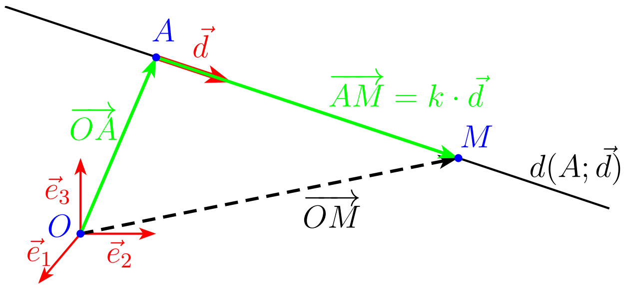
Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite d si et seulement s'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d}$. Ainsi, pour tout point M de la droite d, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{d} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}$$

où $k \in \mathbb{R}$. Cette équation est une **représentation paramétrique** de la droite d. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de d :

$$\boxed{d : \begin{cases} x &= x_A + k \cdot d_1 \\ y &= y_A + k \cdot d_2 \\ z &= z_A + k \cdot d_3 \end{cases}}$$

où $k \in \mathbb{R}$.



Remarque

Dans l'espace, une droite n'a pas d'équation cartésienne.

Exemple

Soit les points $A(-3; 2; 1)$ et $B(-1; 3; -2)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques de la droite (AB).

1. *Un vecteur directeur de la droite (AB) :*

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. *Les équations paramétriques de (AB) sont (une représentation possible parmi l'infinité des représentations possibles de la droite (AB)) :*

$$(AB) : \begin{cases} x &= -3 + k \cdot 2 \\ y &= 2 + k \cdot 1 \\ z &= 1 + k \cdot (-3) \end{cases}$$

On peut maintenant donner des points appartenant à la droite (AB) en choisissant une valeur de k. Par exemple, pour $k = 5$, on obtient le point

$$C : \begin{cases} x = -3 + 5 \cdot 2 = 7 \\ y = 2 + 5 \cdot 1 = 7 \\ z = 1 + 5 \cdot (-3) = -14 \end{cases} \Rightarrow C(7; 7; -14)$$

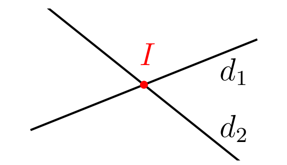
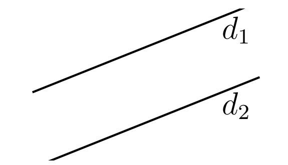
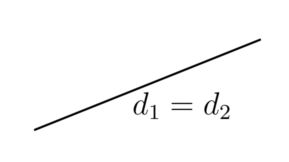
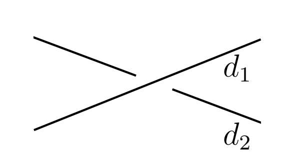
De plus, on peut déterminer si un point appartient ou non à la droite (AB) en déterminant s'il existe une valeur unique de k tel que les équations paramétriques sont vérifiées pour les coordonnées du point. Par exemple, pour le point $D(-9; 8; 10)$, on a

$$D : \begin{cases} -9 = -3 + k \cdot 2 & \Rightarrow k = -3 \\ 8 = 2 + k \cdot 1 & \Rightarrow k = 6 \\ 10 = 1 + k \cdot (-3) & \Rightarrow k = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

3.3 Position relative de deux droites dans l'espace

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux droites d_1 et d_2.

<table>
<tr><th rowspan="2">Sécantes</th><th colspan="2">Parallèles</th><th rowspan="2">Gauches</th></tr>
<tr><th>distinctes</th><th>confondues</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Un unique point I d'intersection</td><td>Aucun point d'intersection</td><td>Infinité de points d'intersection (droites)</td><td>Aucun point d'intersection</td></tr>
<tr><td colspan="3">Droites coplanaires</td><td></td></tr>
</table>

Calcul du point d'intersection de deux droites sécantes

On donne ici une méthode pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Ecrire les équations paramétriques des deux droites en désignant leurs paramètres par des lettres différentes.

En posant l'égalité des coordonnées de même rang, on obtient un système de trois équations à deux inconnues (les paramètres).

On résout le système formé par deux équations choisies parmi ces trois équations, puis on vérifie si l'éventuelle solution obtenue satisfait l'équation restante.

Si oui, les droites sont sécantes et on obtient le point d'intersection en injectant la valeur obtenue d'un des paramètres dans les équations de la droite correspondante.

Exemple

Nous allons déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection des droites

$$d : \begin{cases} x = -3 + k \cdot 2 \\ y = 2 + k \cdot 1 \\ z = 1 + k \cdot (-3) \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad g : \begin{cases} x = 6 + s \cdot 1 \\ y = -1 + s \cdot (-1) \\ z = 0 + s \cdot 1 \end{cases}$$

On pose le système suivant d'équations

$$\begin{cases} -3 + 2k = 6 + s \\ 2 + k = -1 - s \\ 1 - 3k = s \end{cases}$$

On commence par résoudre le système formé par les deux premières équations. On peut sommer ces deux équations et trouver

$$-1 + 3k = 5 \quad \to \quad 3k = 6 \quad \to \quad k = 2$$

On obtient alors $s = -9 + 2 \cdot 2 = -5$. *On vérifie la solution* $(2; -5)$ *dans la troisième équation :*

$$1 - 3 \cdot 2 \stackrel{?}{=} -5$$

Comme cette égalité est vraie, les deux droites s'intersectent en un point unique I*. Pour le trouver, on utilise les équations paramétriques d'une des deux droites et la valeur du paramètre associé.*

$$I : \begin{cases} x = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \\ y = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ z = 1 + 2 \cdot (-3) = -5 \end{cases} \Rightarrow I(1; 4; -5)$$

3.4 Traces d'une droite

Définition 3.4

On appelle **traces** d'une droite les points d'intersection de cette droite avec les plans de référence Oxy, Oxz et Oyz.

3.5 Exercices

1) Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

   a) $M(3;1;-1)$ $N(2;0;4)$ $P(-3;2;5)$

   b) $M(2;-1;0)$ $N(1;1;-2)$ $P(4;-5;-11)$

   c) $M(3;1;\frac{1}{2})$ $N(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $P(9;4;\frac{1}{2})$

2) Soit la droite d passant par les points $A(1;-2;5)$ et $B(-3;6;1)$.

   a) Déterminer deux autres points de la droite d.

   b) Déterminer deux vecteurs directeurs de la droite d.

3) Une droite d est définie par un point $A(2;4;5)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite d.

   b) Vérifier que le point $P(7;-1;3)$ appartient à la droite d.

4) Soit le point $A(2;0;-3)$.

   Ecrire une représentation paramétrique des droites suivantes :

   a) d_1 passant par les points A et $B(1;4;5)$.

   b) d_2 passant par le point A et parallèle à la droite $g : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 2t \\ y & = & 0 & + & 3t \\ z & = & 2 & + & 5t \end{array} \right.$.

   c) d_3 passant par le point A et parallèle à l'axe des y.

5) Soit la droite $d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 2t \\ y & = & 0 & + & 3t \\ z & = & 2 & - & 5t \end{array} \right.$.

   Donner deux autres représentations paramétriques de la droite d.

6) Soit la droite $d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 5t \\ y & = & -1 & + & t \\ z & = & 0 & + & 3t \end{array} \right.$.

   Déterminer le point de d :

   a) qui a une abscisse égale à 12.

   b) qui a une ordonnée égale à 5.

   c) qui a une cote égale à -2.

   d) dont l'abscisse et la cote sont égales.

   e) dont la cote est égale au double de l'ordonnée.

7) Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, étudier les positions relatives des droites :

a)	$d : A(6;3;0)$	$\vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	et	$g : B(0;0;4)$	$\vec{w} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$
b)	$d : A(-3;-1;2)$	$\vec{v} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$	et	$g : B(4;-1;0)$	$\vec{w} = 4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$
c)	$d : A(7;4;4)$	$\vec{v} = 2\vec{i}+\vec{k}$	et	$g : B(5;-1;0)$	$\vec{w} = -2\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$
d)	$d : A(2;-1;-3)$	$\vec{v} = 4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$	et	$g : B(4;0;-4)$	$\vec{w} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

8) Calculer le point d'intersection des deux droites sécantes suivantes :
$d = (AB)$ avec $A(1;2;-3)$, $B(-2;3;-1)$ et $g = (CD)$ avec $C(0;-1;6)$, $D(2;-3;8)$.

9) On donne un quadrilatère plan $ABCD$ avec $A(1;3;2)$, $B(4;-1;3)$, $C(4;9;-7)$ et $D(1;8;-3)$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

10) Soit la droite d passant par les points $A(6;2;1)$ et $B(-3;8;-2)$

a) Déterminer les traces de la droites d sur les trois plans de référence.
b) Dessiner la droite d avec la partie visible en trait plein (les plans de référence étant supposés opaques).
c) Dessiner les projections de d sur les trois plans de référence.

11) Dessiner la droite g passant par les points $A(-4;-5;1)$ et $B(2,10;4)$ avec la partie visible en trait plein.

12) a) Déterminer une droite d dont la projection sur le plan Oxy est un point.
b) Déterminer une droite g non parallèle à l'axe Oy et dont la projection sur le plan Oyz est parallèle à Oy.

3.6 Solutions des exercices

1) a) non
   b) non
   c) oui

2) a) $M(-7;14;-3)$, $N(9;-18;13)$ par exemple
   b) $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$ par exemple

3) a) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

4) a) $d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + 4t \\ z = -3 + 8t \end{cases}$
   b) $d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$
   c) $d_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 + t \\ z = -3 \end{cases}$

5) $d : \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$, $d : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 12 + 3t \\ z = -18 - 5t \end{cases}$ par exemple

6) a) $(12;-3;-6)$ b) $(-28;5;18)$ c) $(\frac{16}{3};-\frac{5}{3};-2)$
   d) $(\frac{3}{4};-\frac{3}{4};\frac{3}{4})$ e) $(12;-3;-6)$

7) a) Les deux droites sont gauches.
   b) Les deux droites sont strictement parallèles.
   c) Les deux droites sont sécantes en $(3;4;2)$.
   d) Les deux droites sont confondues.

8) $I(-5;4;1)$

9) $I(2;5;-1)$

10) a) Sur le plan Oxy : $T_1(3;4;0)$, sur le plan Oxz : $T_2(9;0;2)$, sur le plan Oyz : $T_3(0;6;-1)$

12) a) $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ par exemple
    b) $g : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ par exemple

Chapitre 4

Le plan

4.1 Définitions

Définition 4.1
Quatre points distincts A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Il existe alors trois nombres réels α, β et γ non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} + \gamma \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Plan déterminé par trois points

Soit trois points distincts A, B et C non alignés.

Définition 4.2
Le (ABC) est l'ensemble des points M de ε coplanaires aux points A, B et C :

$$(ABC) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC},\ k, n \in \mathbb{R}\}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs

Soit un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 4.3
Le plan passant par le point A (appelé **point d'ancrage**) et de **vecteurs directeurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $p(A; \vec{u}; \vec{v})$, est l'ensemble des points M de l'espace ε tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires :

$$\boxed{p(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v},\ k, n \in \mathbb{R}\}}$$

Remarques

1. A chaque couple de nombres $(k; n)$ correspond un unique point du plan.

   A chaque point du plan correspond un unique couple de nombres $(k; n)$.
2. Un plan peut également être déterminé par :
   – une droite et un point ne lui appartenant pas

- deux droites sécantes
- deux droites parallèles distinctes

4.2 Equations paramétriques d'un plan

L'espace ε est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.
Soit le plan p passant par le point d'ancrage $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant comme vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

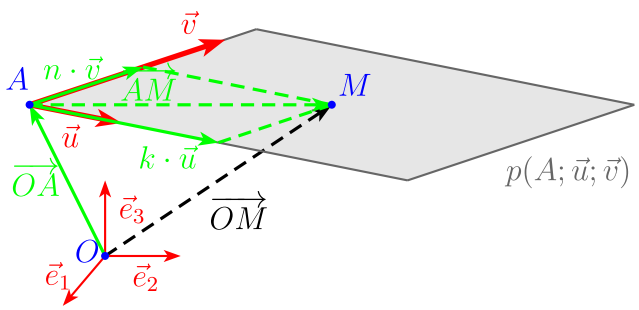
Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan p si et seulement s'il existe un couple de nombres $(k; n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$. Ainsi, pour tout point M de plan p, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}$$

où $(k; n) \in \mathbb{R}^2$. Cette équation est une **représentation paramétrique** du plan p. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de p :

$$\boxed{p : \begin{cases} x = x_A + k \cdot u_1 + n \cdot v_1 \\ y = y_A + k \cdot u_2 + n \cdot v_2 \\ z = z_A + k \cdot u_3 + n \cdot v_3 \end{cases}}$$

où $(k; n) \in \mathbb{R}^2$.



Exemple

Soit les points $A(-3; 2; 1)$, $B(-1; 3; -2)$ et $C(-3; -2; -2)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques du plan (ABC).

1. Deux vecteurs directeurs du plan (ABC) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Les équations paramétriques de (ABC) sont (une représentation possible parmi l'infinité des représentations possibles du plan (ABC)) :

$$(ABC):\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & -3 & + & k\cdot 2 & + & n\cdot 0 \\ y & = & 2 & + & k\cdot 1 & + & n\cdot(-4) \\ z & = & 1 & + & k\cdot(-3) & + & n\cdot(-3)\end{array}\right.$$

On peut maintenant donner des points appartenant au plan (ABC) en choisissant un couple de nombres $(k;n)$. Par exemple, pour $(k;n)=(5;-2)$, on obtient le points

$$D:\left\{\begin{array}{lllllllll} x & = & -3 & + & 5\cdot 2 & + & (-2)\cdot 0 & = & 7 \\ y & = & 2 & + & 5\cdot 1 & + & (-2)\cdot(-4) & = & 15 \\ z & = & 1 & + & 5\cdot(-3) & + & (-2)\cdot(-3) & = & -8\end{array}\right. \Rightarrow C(7;15;-8)$$

4.3 Equation cartésienne d'un plan

Soit le plan p passant par le point d'ancrage $A(x_A;y_A;z_A)$ et admettant comme vecteurs directeurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$.

Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan p si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Or, ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si $Det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ ou :

$$Det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x-x_A & u_1 & v_1 \\ y-y_A & u_2 & v_2 \\ z-z_A & u_3 & v_3\end{vmatrix}=0$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient une équation du type

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de p.

Exemple

Soit le plan (ABC) de l'exemple précédent passant par les points $A(-3;2;1)$, $B(-1;3;-2)$ et $C(-3;-2;-2)$. Nous allons déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

On pose et on développe le déterminant :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 0 \\ y-2 & 1 & -4 \\ z-1 & -3 & -3\end{vmatrix} &= (-3)\cdot(x+3)-8\cdot(z-1)-12(x+3)+6(y-2) \\ &= -15(x+3)+6(y-2)-8(z-1)=-15x+6y-8z-49\end{aligned}$$

Finalement, on posant que la valeur de ce déterminant doit être égale à zéro, on obtient l'équation cartésienne de (ABC) :

$$-15x+6y-8z-49=0$$

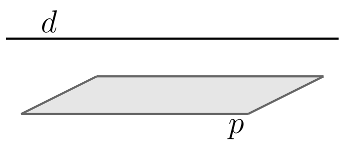
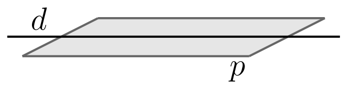
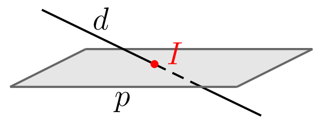
On peut maintenant déterminer si un point appartient ou non au plan (ABC) en déterminant si l'équation cartésienne est vérifiée pour les coordonnées du point. Par exemple, pour le point $E(-4;2;7)$, on a

$$\underbrace{(-15)\cdot(-4)+6\cdot 2-8\cdot 7-49}_{=-33}\overset{?}{=}0$$

Ainsi $E \notin (ABC)$.

4.4 Positions relatives d'une droite et d'un plan

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'un plan p.

<table>
<tr><th colspan="2">d parallèle à p</th><th rowspan="2">d et p sécants</th></tr>
<tr><th>strictement</th><th>$d \subset p$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Aucun point d'intersection</td><td>Infinité de points d'intersection (d)</td><td>Un unique point I d'intersection</td></tr>
</table>

Calcul de l'intersection d'une droite et d'un plan

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan p.

Substituer les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne du plan p.

On obtient alors une équation de degré 1 à une inconnue (le paramètre), qu'on résout.
- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point I. On obtient ce point en injectant la valeur obtenue du paramètre dans les équations de la droite d.
- Si cette équation a une infinité de solutions, alors l'intersection est la droite d.
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soit le plan $p : x-2y-3z+6=0$ et la droite $d : \begin{cases} x = 1 + k\cdot 2 \\ y = 2 + k \\ z = -2 - k \end{cases}$. Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

On substitue tout d'abord les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne du plan p :

$$1\cdot(1+2k)-2\cdot(2+k)-3\cdot(-2-k)+6=0$$

On résout l'équation obtenue :

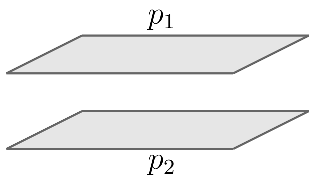
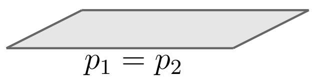
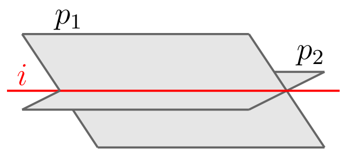
$$3k+9=0 \quad\rightarrow\quad 3k=-9 \quad\rightarrow\quad k=-3$$

La droite d et le plan p s'intersectent en un point I. Pour l'obtenir, on injecte la valeur $k = -3$ dans les équations paramétriques de la droite :

$$I : \begin{cases} x &= 1 + (-3) \cdot 2 = -5 \\ y &= 2 + (-3) = -1 \\ z &= -2 - (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-5; -1; 1)$$

4.5 Positions relatives de deux plans

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux plans p_1 et p_2.

<table>
<tr><td colspan="2">p_1 et p_2 parallèles</td><td rowspan="2">p_1 et p_2 sécants</td></tr>
<tr><td>distincts</td><td>confondus</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aucun point d'intersection</td><td>Infinité de points d'intersection (plans)</td><td>Une unique droite i d'intersection</td></tr>
</table>

Equations cartésiennes de deux plans parallèles

Théorème 4.1
Soient les plans, donnés par leurs équations cartésiennes, $p_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (avec $a_1, b_1, c_1 \neq 0$) et $p_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ (avec $a_2, b_2, c_2 \neq 0$).

Les plan p_1 et p_2 sont **parallèles** si et seulement si les coefficients a, b et c sont proportionnels :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}} \begin{cases} \neq \dfrac{d_1}{d_2} & \text{pour } p_1 \text{ et } p_2 \text{ parallèles distincts} \\ = \dfrac{d_1}{d_2} & \text{pour } p_1 \text{ et } p_2 \text{ parallèles confondus} \end{cases}$$

Calcul de l'intersection de deux plans sécants

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection de deux plans p_1 et p_2 sécants.

Poser le système formé par les équations cartésiennes des deux plans. Ce système contient deux équations à trois inconnues.

On se ramène à un système de deux équations à deux inconnues en considérant provisoirement une des inconnues comme constante. On nomme alors cette "inconnue" k.

On résout ce système et et on obtient, pour chaque inconnue, une relation la liant à la constante k.

Ces trois équations constituent les équations paramétriques de la droite i d'intersection et le nombre k est le paramètre.

Exemple

Soit les plans sécants $p_1 : 5x + 3y - 2z - 4 = 0$ *et* $p_2 : 5x + 3y + 2z - 6 = 0$. *Nous allons déterminer leur droite d'intersection.*

On pose le système de deux équations à trois inconnues (x, y, et z) :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z &= 4 \\ 5x + 3y + 2z &= 6 \end{cases}$$

On pose alors, par exemple, $x = k$ *et on résout les système de deux équations à deux inconnues (y et z) :*

$$\begin{cases} 5k + 3y - 2z &= 4 \qquad ① \\ 5k + 3y + 2z &= 6 \qquad ② \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{array}{lcll} ① + ② & : & 10k + 6y = 10 & \rightarrow \quad y = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}k \\ ① - ② & : & -4z = -2 & \rightarrow \quad z = \frac{1}{2} \end{array}$$

Finalement, les équations paramétriques de la droite d'intersection i sont :

$$i : \begin{cases} x &= 0 + k \\ y &= \frac{5}{3} - k \cdot \frac{5}{3} \\ z &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

4.6 Traces d'un plan

Définition 4.4
On appelle **traces** d'un plan les droites d'intersection de ce plan avec les plans de référence Oxy, Oxz, Oyz.

4.7 Exercices

1) Vérifier que les points $A(-4;0;3)$, $B(-2;3;0)$, $C(0;2;1)$ et $D(2;1;2)$ sont situés dans un même plan.

2) On donne les équations paramétriques du plan p : $\begin{cases} x = 3 - 2k + t \\ y = 1 + 1k - 4t \\ z = 5 + 3k + 3t \end{cases}$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan p ?

a) $A(-2;7;8)$ b) $B(4;4;3)$ c) $C(\frac{11}{6};-\frac{29}{6};15)$

3) Déterminer les équations paramétriques des plans suivants :

a) p_1 passant par $A(6;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

b) p_2 passant par $A(2,3;5)$, $B(1;0;5)$, $C(6;-2;5)$.

c) p_3 contenant le point $A(1;2;5)$ et la droite définie par $B(6;0;0)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) p_4 contenant les droites $d : A(2;0;3), \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $g : B(4;0;0), \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e) p_5 contenant les droites $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 9 - t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$.

4) On donne l'équation cartésienne du plan $p : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan p ?

a) $A(0;2;2)$ b) $B(4;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ c) $C(\frac{4}{5};-\frac{2}{5};\frac{7}{5})$

5) On donne les équations paramétriques d'un plan p. Déterminer l'équation cartésienne de p.

$$p : \begin{cases} x = 2 + k - 3t \\ y = 5 - k + 2t \\ z = 1 + k - t \end{cases}$$

6) Déterminer les équations cartésiennes des plans de l'exercice 3.

7) Trouver les équations paramétriques des plans d'équations cartésiennes :

a) $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ b) $2x - y + z - 4 = 0$

8) On donne le plan $p : 2x - y + 3z - 6 = 0$

Déterminer la position de p relativement aux droites :

a) $d : A(2;1;-2), \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $g : B(2;1;-1), C(3;0;-2)$

c) $h : D(1;2;2), \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

9) On donne le plan $p : 3x - 2y + z - 6 = 0$.
Déterminer les intersections de p avec les axes de référence.

10) On donne les points $A(1;2;6)$, $B(5;7;4)$, $C(2;3;5)$, $D(4;6;1)$ et $E(3;4;2)$.
Calculer le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan (CDE).

11) On donne le plan $p : 2x - 5y + z - 3 = 0$. Ecrire l'équation cartésienne d'un plan :
a) parallèle au plan p et passant par l'origine.
b) parallèle au plan p et passant par $A(2;-1;4)$.

12) On donne les équations cartésiennes de deux plans p et q.
Déterminer si ces deux plans sont sécants, parallèles ou confondus.
a) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 3x + 2y + 5z = 4$
b) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 6x - 4y + 10z = 4$
c) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : -15x + 10y - 25z = -20$

13) Soit le plan $p : 3x - 4y - 2z + 12 = 0$.
Déterminer les traces de p sur les plans de référence.
Dessiner p et hachurer sa partie visible, les plans de référence étant supposés opaques.

14) On donne deux plans $p : 3x - 5y + z + 4 = 0$ et $q : x + y - 2z + 3 = 0$
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de ces deux plans.

15) Existe-t-il un point appartenant aux trois plans p, q et r ?

$$p : x + 2y - 3z = -6 \qquad q : 2x + 4y - z = 18 \qquad r : 3x - 2y + z = 2$$

16) Déterminer une droite d passant par $A(3;-2;-4)$, coupant la droite g définie par $B(2;-4;1)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan $p : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$.

17) Trouver les équations paramétriques d'une droite d passant par $A(2;3;5)$ et parallèle aux deux plans $p : 3x - y + z = 0$ et $q : x - y + z = 0$.

18) Déterminer les équations paramétriques de la droite d qui passe par le point $A(4;-7;5)$ et qui rencontre les deux droites suivantes :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & k \\ y & = & 1 & + & 2k \\ z & = & 1 & - & k \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & 3t \\ y & = & 3 & + & t \\ z & = & 3 & + & 2t \end{array} \right.$$

19) On donne une droite d par deux de ses projections :

$$d' : \left\{ \begin{array}{c} x + y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad d'' : \left\{ \begin{array}{c} y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer les équations paramétriques de la droite d.

4.8 Solutions des exercices

2) a) oui b) non c) oui

3) a) $p_1 : \begin{cases} x = 6 - 3k - 2t \\ y = 0 + 2k \\ z = 0 + t \end{cases}$ b) $p_2 : \begin{cases} x = 2 - k + 4t \\ y = 3 - 3k - 5t \\ z = 5 \end{cases}$

c) $p_3 : \begin{cases} x = 1 + 5k - t \\ y = 2 - 2k + 3t \\ z = 5 - 5k + t \end{cases}$ d) $p_4 : \begin{cases} x = 2 + k + 2t \\ y = 0 - k \\ z = 3 + k - 3t \end{cases}$

e) $p_5 : \begin{cases} x = 1 + 3k - 3t \\ y = 3 - 4k - t \\ z = 2 + k + 4t \end{cases}$

4) a) non b) oui c) non

5) $p : x + 2y + z - 13 = 0$

6) a) $p_1 : 2x + 3y + 4z + 12 = 0$ b) $p_2 : z - 5 = 0$
c) $p_3 : x + z - 6 = 0$ d) $p_4 : 3x + 5y + 2z - 12 = 0$
e) $p_5 : x + y + z - 6 = 0$

7) a) $p_1 : \begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = -1 + 4t \\ z = -2 - k + 3t \end{cases}$ b) $p_2 : \begin{cases} x = 0 + k \\ y = 0 + t \\ z = 4 - 2k + t \end{cases}$

8) 1) La droite intersecte le plan dans le point $(-1; -5; 1)$
2) La droite est parallèle au plan.
3) La droite est contenue dans le plan.

9) Axe des x : $(2; 0; 0)$, axe des y : $(0; -3; 0)$, axe des z : $(0; 0; 6)$

10) $I(2; \frac{13}{4}; \frac{11}{2})$

11) a) $2x - 5y + z = 0$
b) $2x - 5y + z - 13 = 0$

12) a) Les deux plans sont sécants.
b) Les deux plans sont strictement parallèles.
c) Les deux plans sont confondus.

13) Trace sur le plan Oxy : $t_1 : \begin{cases} x = k \\ y = 3 + \frac{3}{4}k \\ z = 0 \end{cases}$

Trace sur le plan Oxz : $t_2 : \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 6 + \frac{3}{2}k \end{cases}$

Trace sur le plan Oyz : $t_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$

14) $i : \begin{cases} x = 1 + 9k \\ y = 2 + 7k \\ z = 3 + 8k \end{cases}$

15) $I(2;5;6)$

16) $d : \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -2 - 6k \\ z = -4 + 9k \end{cases}$

17) $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + k \\ z = 5 + k \end{cases}$

18) $d : \begin{cases} x = 4 - 9k \\ y = -7 + 22k \\ z = 5 - 11k \end{cases}$

19) $d : \begin{cases} x = 8 - 2k \\ y = -4 + 2k \\ z = k \end{cases}$

Chapitre 5

Produit scalaire

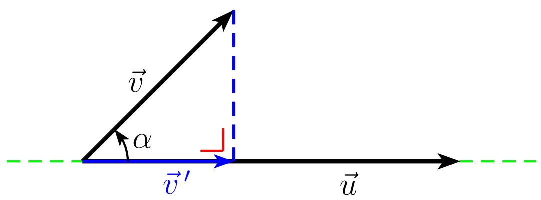
5.1 Définitions produit scalaire et norme

Les propriétés et les formules du produit scalaire dans l'espace sont analogues à celle établies dans le plan, comme deux vecteurs de l'espace sont toujours "coplanaires".

Définition 5.1
On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit de la mesure algébrique (avec signe) $\bar{u}$ de $\vec{u}$ et de la mesure algébrique $\bar{v}'$ de la projection orthogonale, $\vec{v}\,'$, de $\vec{v}$ sur une droite de direction $\vec{u}$.

On note le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}'}$$



Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Commutativité :	$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
2. Bilinéarité :	$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
3. Produit par un nombre réel :	$(\lambda \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})$
4. Positivité :	$\vec{u} \bullet \vec{u} \geqslant 0$
5. Vecteur nul :	$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Définition 5.2
On appelle **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, la racine carrée du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{u}$. La norme de $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}}$$

Remarque

La **norme** d'un vecteur est synonyme de sa **longueur**.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Positivité : $\|\vec{u}\| \geqslant 0$
2. Vecteur nul : $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
3. Produit par un nombre réel : $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$
4. Inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Proposition 5.1
Si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$ (α est l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{v}$), on a

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

On appelle cette égalité l'**expression géométrique** du produit scalaire.

Définition 5.3
On appelle vecteur **unitaire** un vecteur de norme 1.

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur unitaire} \Longleftrightarrow \|\vec{u}\| = 1}$$

Proposition 5.2
Si $\vec{v} \neq 0$, les vecteurs unitaires de même direction que $\vec{v}$ sont

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 5.4
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

Remarques

1. Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs $\vec{v}$, car $\vec{0} \bullet \vec{v} = 0$.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul, sans que l'un des vecteurs soit nul.

Théorème 5.3
Si le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démonstration. Soient $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$, combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{a} &= \vec{u} \bullet (\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) \overset{bil.}{=} \vec{u} \bullet (\alpha \cdot \vec{v}) + \vec{u} \bullet (\beta \cdot \vec{w}) \\ &\overset{prod.}{=} \alpha \cdot (\underbrace{\vec{u} \bullet \vec{v}}_{=0}) + \beta \cdot (\underbrace{\vec{u} \bullet \vec{w}}_{=0}) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux. □

Conséquence

Si un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui sont des vecteurs directeurs d'un plan p, alors le vecteurs $\vec{u}$ est orthogonal à chaque vecteur défini par deux points A et M du plan p : $\vec{u} \perp \overrightarrow{AM}$.

En effet, comme, par définition de p, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, $\overrightarrow{AM}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Définition 5.5
On appelle **vecteur normal** à un plan p tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs de ce plan.

5.2.2 Droites orthogonales

Définition 5.6
Les droites d et g de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont **orthogonales** si les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{d} \bullet \vec{g} = 0$.

Remarques

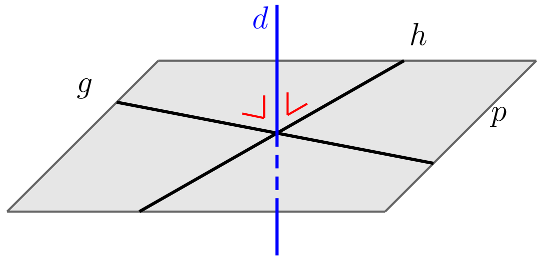
1. Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.
2. Deux droites orthogonales et sécantes sont dites **perpendiculaires**.

5.2.3 Droite et plan perpendiculaires

Définition 5.7
Une droite d et un plan p sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur $\vec{d}$ de la droite et un vecteur normal $\vec{n}$ au plan sont colinéaires, c'est-à-dire si $\vec{n} = \alpha \cdot \vec{d}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une droite orthogonale à un plan est aussi appelée **normale** de ce plan.

Théorème 5.4
Si une droite d est orthogonale à deux droites g et h sécantes d'un plan p, alors la droite d est orthogonale au plan p.



Démonstration. Soit une droite d orthogonale à deux droites g et h sécantes d'un plan p. Comme g et h sont sécantes, leurs vecteurs directeurs $\vec{g}$ et $\vec{h}$ sont des vecteurs directeurs de p.

Ainsi, le vecteur directeur $\vec{d}$ de d est un vecteur normal de p comme il est orthogonal à deux vecteurs directeurs de p. $\vec{d}$ est donc colinéaire aux autres vecteurs normaux de p. □

Remarques

1. Une droite d est orthogonale à un plan p si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de p.
2. Si une droite d est orthogonale à une droite d'un plan p, on ne peut pas en déduire que la droite d est orthogonale au plan p.
3. Etant donné une droite d et un point A, il existe un seul plan passant par A et orthogonal à d.
4. Etant donné un plan p et un point A, il existe une seule droite passant par A et normale à p.

5.2.4 Plans perpendiculaires

Définition 5.8
Deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Théorème 5.5
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre.

5.3 Repère orthonormé

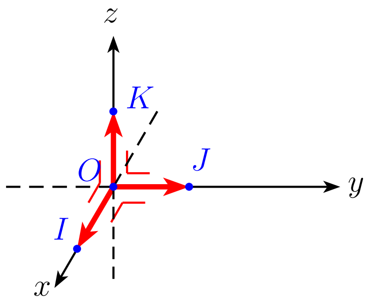
5.3.1 Définitions

Définition 5.9
Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbf{V}_3$ est dite **orthonormée** si

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{i} \bullet \vec{k} = \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Un repère $(O; I; J; K)$ de ε est dit **orthonormé** si

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1 \\ \overrightarrow{OI} \bullet \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} \bullet \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} \bullet \overrightarrow{OK} = 0 \end{cases}$$



Remarques

1. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs de cette base sont orthogonaux deux à deux et unitaires (de longueur 1).
2. Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases de $\mathbf{V}_3$ comme étant orthonormées et les repères de ε comme étant également orthonormés.

5.3.2 Expression analytique du produit scalaire

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 5.6
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}$$

Démonstration. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (en utilisant les propriétés du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) \bullet (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}) \\ &= u_1 v_1 \cdot \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{i}}_{=1} + u_2 v_2 \cdot \underbrace{\vec{j} \bullet \vec{j}}_{=1} + u_3 v_3 \cdot \underbrace{\vec{k} \bullet \vec{k}}_{=1} \\ &\quad + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{j}}_{=0} + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{k}}_{=0} + (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cdot \underbrace{\vec{j} \bullet \vec{k}}_{=0} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

$\square$

5.3.3 Expression analytique de la norme

On considère le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ donné en composantes dans une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 5.7
La **norme** du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

5.3.4 Vecteur normal à un plan

Proposition 5.8

Le plan d'équation cartésienne $p : ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme **vecteur normal**.

Démonstration. Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ d'un plan d'équation cartésienne $p : ax + by + cz + d = 0$. Nous allons montrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = a \cdot (x_B - x_A) + b \cdot (y_B - y_A) + c \cdot (z_B - z_A) \\ &= \underbrace{(ax_B + by_B + cz_B)}_{=-d, \text{ car } B \in p} - \underbrace{(ax_A + by_A + cz_A)}_{=-d, \text{ car } A \in p} = 0 \end{aligned}$$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs formés à partir de deux points du plan p, $\vec{n}$ est normal à p. □

Remarque

Un plan peut être déterminé par **un point et un vecteur normal**.

Exemple

Nous allons déterminer l'équation cartésienne du plan p passant par le point $A(3; -1; 7)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(3; -4; 6)$ et $C(2; 4; 9)$.

1. *Un vecteur normal du plan p est :*

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   L'équation cartésienne partielle de p est $-x + 8y + 3z + d = 0$

2. *Comme $A \in p$, on peut déterminer d en résolvant l'équation*

$$(-1) \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -10$$

   L'équation cartésienne de p est : $-x + 8y + 3z - 10 = 0$

5.4 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer : $\vec{u} \bullet \vec{v}$; $\vec{u} \bullet \vec{u}$; $\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v})$

   b) Calculer : $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|(-2) \cdot \vec{u}\|$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

2) Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

   b) Déterminer les vecteurs de norme 9 colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

3) Déterminer deux vecteurs $\vec{w}$ orthogonaux au vecteur $\vec{u}$ de l'exercice 1.

4) Déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à chacun des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

5) Soit la droite $d : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 0 & + & t \\ z & = & -4 & - & t \end{array} \right.$.

   Déterminer une droite g perpendiculaire à d.

6) Déterminer la droite d passant par le point $A(2; 3; 5)$ et perpendiculaire au plan p d'équation cartésienne $3x - 2y + z + 5 = 0$.

7) Ecrire une équation cartésienne du plan p passant par le point $A(3; 1; 1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(1; 0; 5)$ et $C(3; -3; 8)$.

8) Ecrire une équation cartésienne du plan p passant par l'origine et par le point $A(1; 1; 1)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z + 2 = 0$.

9) Déterminer l'équation cartésienne du plan p perpendiculaire au plan Oxy et contenant la droite $d : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 3 & + & 2t \\ y & = & 0 & - & t \\ z & = & 4 & + & 3t \end{array} \right.$.

10) Déterminer la droite d passant par le point $A(2;3;5)$ et coupant perpendiculairement la droite (BC) avec $B(1;1;1)$ et $C(2;0;3)$.

11) On donne les points $A(2;-1;4)$ et $B(1;3;2)$.

    Etablir l'équation du plan perpendiculaire au segment $[AB]$ et passant par le milieu du segment $[AB]$.

    Déterminer une propriété caractéristique des points M de ce plan.

12) On donne le plan p : $2x + y - z + 4 = 0$ et les points $A(-8;5;-4)$, $B(3;2;4)$ et $C(-2;1;0)$.

    a) Déterminer le symétrique du point A par rapport au point B.
    b) Déterminer le symétrique du point A par rapport au plan p.
    c) Déterminer le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).

5.5 Solutions des exercices

1) a) a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = -4$ b) $\vec{u} \bullet \vec{u} = 14$ c) $\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = 10$

   b) a) $||\vec{u}|| = \sqrt{14}$ b) $||\vec{v}|| = \sqrt{5}$ c) $|| - 2\vec{u}|| = 2 \cdot \sqrt{14}$

   d) $||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{11}$

2) a) $\pm \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ b) $\pm \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple

4) $a = 4$, $b = -5$

5) $g : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases}$ par exemple

6) $d : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 3 - 2k \\ z = 5 + k \end{cases}$

7) $p : 2x - 3y + 3z - 6 = 0$

8) $p : x - z = 0$

9) $p : x + 2y - 3 = 0$

10) $d : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 - 19k \\ z = 5 - 10k \end{cases}$

11) $p : -2x + 8y - 4z + 7 = 0$

    Tous les points M du plan p sont équidistants de A et B.

12) a) $A'(14; -1; 12)$

    b) $A''(-6; 6; -5)$

    c) $A'''(-6; -5; -4)$

Chapitre 6

Distances

6.1 Distance de deux points

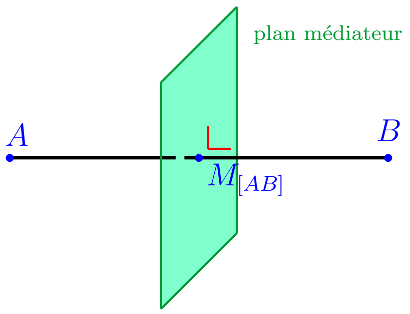
Définition 6.1
On appelle **distance** de deux points A et B la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La distance de A à B se note $\delta(A;B)$.

$$\boxed{\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\|}$$

Equidistance

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan appelé **plan médiateur** de $[AB]$

La plan médiateur de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple

Nous allons établir l'équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(-2;-1;4)$ et $B(-1;3;-2)$

1. *Un vecteur normal du plan médiateur m est :*

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de m est $x + 4y - 6z + d = 0$.

2. *Comme m passe par le point milieu de $[AB]$, $M_{[AB]} = (-\frac{3}{2};1;1)$, on peut déterminer d en résolvant l'équation :*

$$-\frac{3}{2} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{7}{2}$$

L'équation cartésienne de m est : $x + 4y - 6z + \frac{7}{2} = 0$

6.2 Distance d'un point à un plan

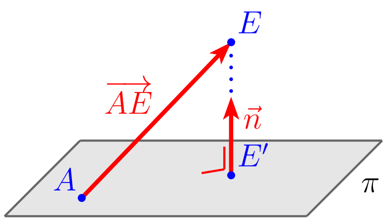
Définition 6.2
La distance $\delta(E;\pi)$ d'un point E à un plan π est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur π.

Formule vectorielle

Soit π le plan passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La distance du point E au plan π est :

$$\boxed{\delta(E;\pi) = \frac{|\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$



Formule analytique

Soit π le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

La distance de point $E(x_0;y_0;z_0)$ au plan π est :

$$\boxed{\delta(E;\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

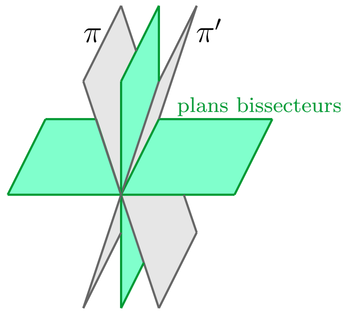
Equidistance

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux plans sécants π et π' est constitué de deux plans appelés **plans bissecteurs** de π et π'.

Les plans sécants d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ont pour plans bissecteurs les deux plans d'équations

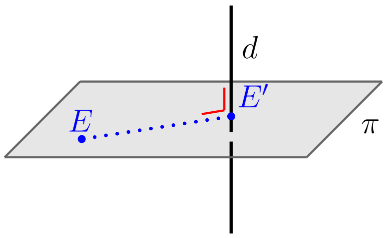
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Ces deux plans sont perpendiculaires.



6.3 Distance d'un point à une droite

Définition 6.3
La distance d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur la droite d.



Formule

Dans le chapitre "Produit vectoriel", nous établirons une formule donnant la distance d'un point à une droite.

Equidistance

L'ensemble des points de l'espace dont la distance à une droite fixe d est une constante r est le **cylindre** de révolution d'axe d et de rayon r.

6.4 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) Calculer la distance des deux points $A(1; -5; 4,3)$ et $B(0,4; 1; -9,1)$.

2) Etablir l'équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(2; -1; 4)$ et $B(1; 3; 2)$.

3) On donne la droite d passant par les points $A(2; 3; 5)$ et $B(1; 2; 8)$.

   Déterminer le point de la droite d situé à égale distance de $C(5; 4; 8)$ et $D(9; -2; 6)$.

4) Calculer la distance du point $E(15; -2; 5)$ au plan p d'équation $3x - 2y + z = 12$.

5) Soit le tétraèdre de sommets $A(2; 4; 6)$, $B(-4; -4; 4)$, $C(5; 0; 3)$ et $D(-1; 7; 5)$.

   Calculer la longueur de la hauteur, issue de A, de ce tétraèdre.

6) Vérifier que les deux plans d'équations $3x+12y-4z-18 = 0$ et $3x+12y-4z+73 = 0$ sont parallèles et calculer leur distance.

7) Déterminer les équations cartésiennes des plans situés à la distance 6 du plan p d'équation $9x + 2y - 6z - 8 = 0$.

8) On donne les plans $p : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $q : 2x - y + 2z + 1 = 0$.

   Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs de p et q.

9) Déterminer les coordonnées des points situés sur la droite $d : \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 13 + 7k \\ z = 7 + 5k \end{cases}$ et équidistants des plans $p : 6x - y - 2z + 3 = 0$ et $q : 3x + 4y - 4z - 9 = 0$.

10) Soient les points $A(1,5; 3)$, $B(5; 3; 7)$ et $C(9; 1; 2)$.

    Déterminer les équations paramétriques de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

11) Calculer la distance du point $E(5; -2; 1)$ à la droite $d : \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 8 + 6k \\ z = 16 + 2k \end{cases}$

6.5 Solutions des exercices

1) $\delta(A, B) \cong 14,7$

2) $p : -2x + 8y - 4z + 7 = 0$

3) $M(9; 10; -16)$

4) $\delta(E; p) = 3\sqrt{14}$

5) $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

6) $\delta = 7$

7) $p_1 : 9x + 2y - 6z - 74 = 0$ et $p_2 : 9x + 2y - 6z + 58 = 0$

8) $p_1 : -x + 3y - 4z - 2 = 0$ et $p_2 : 3x + y = 0$

9) $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$ et $(-1; -1; -3)$

10) $b : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 14k \\ y & = & 5 & - & 7k \\ z & = & 3 & + & 5k \end{array} \right.$

11) $\delta(E; d) = 15$

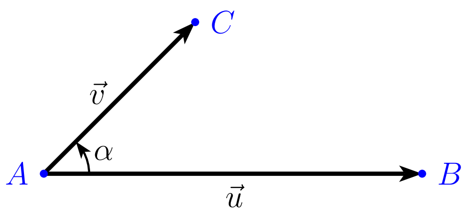
Chapitre 7

Angles

7.1 Angle de deux vecteurs

Définition 7.1
Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

L'**angle** α entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à l'angle $\widehat{BAC}$.



Formule

On peut déterminer l'angle α en se basant sur l'expression trigonométrique du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

7.2 Angle de deux droites

Définition 7.2
On appelle **angle de deux droites** d et g (gauches ou coplanaires) tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$.

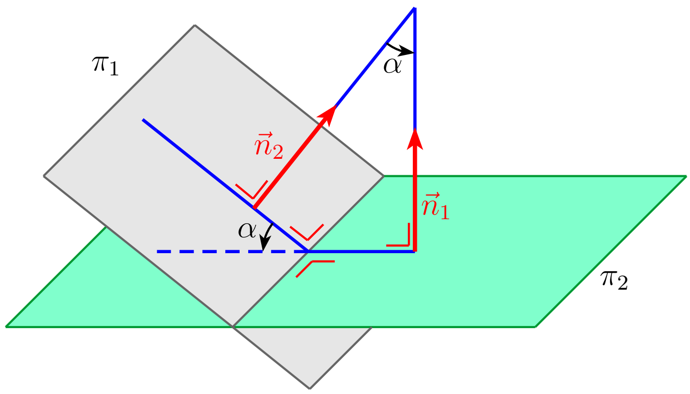
Formule

L'angle aigu α de deux droites d et g est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d} \bullet \vec{g}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{g}\|}$$

7.3 Angle de deux plans

Définition 7.3
On appelle **angle de deux plans** π_1 et π_2 tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.



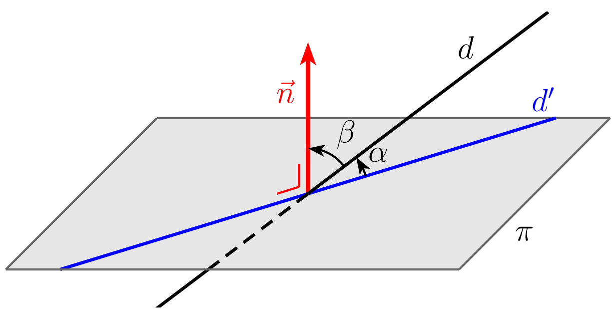
Formule

L'angle aigu α de deux plans π_1 et π_2 est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

7.4 Angle d'une droite et d'un plan sécants

Définition 7.4
On appelle **angle** (aigu ou obtus) d'une droite d et d'un plan π sécants l'angle que forme d avec sa projection orthogonale d' sur π.



Méthode de calcul

1. Calculer l'angle *aigu* β formé par un vecteur directeur de la droite d avec un vecteur normal du plan p.
2. L'angle *aigu* α formé par d et π vaut : $\alpha = 90° - \beta$.

7.5 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) On donne les deux droites $d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -30 & + & k \\ y & = & 8 & + & 3k \\ z & = & 16 & + & k \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 3k \\ y & = & 0 & - & k \\ z & = & -4 & + & k \end{array} \right.$.

   a) Vérifier que ces deux droites sont sécantes.

   b) Calculer l'angle aigu d'intersection de ces deux droites.

2) Soit le triangle de sommets $A(4; 1; 7)$, $B(2; 4; 3)$ et $C(3; 9; 5)$.

   Calculer les trois angles de ce triangle.

3) Calculer l'angle aigu formé par les plans $p : x + 2y - 2z = 0$ et $q : 2x - 3y + 4z = 8$.

4) Soient la droite d passant par $A(1; 2; 3)$ et $B(2; 1; 5)$ et le plan $p : 3x + 2y - 5z = 0$.

   Calculer l'angle formé par la droite d et le plan p.

5) Soit le cône de révolution donné par son sommet $S(9; 1; -1)$, par le point $A(4; 3; 2)$ et par l'équation du plan contenant le cercle de base, $p : 2x + y - 2z + 6 = 0$.

   a) Calculer les coordonnées du centre C du cercle de base.

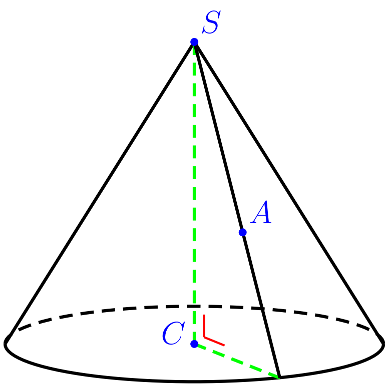
   b) Calculer la hauteur du cône.

   c) Calculer le demi-angle d'ouverture du cône.

   d) Calculer les coordonnées d'un autre point du cône.

   e) Calculer les coordonnées de deux points du cercle de base du cône.

   f) Calculer le rayon du cercle de base.



6) Déterminer les équations cartésiennes des plans passant par les points $A(4; 2; 1)$ et $B(2; 1; -1)$ et qui forment un angle de 45° avec le plan d'équation $x - 4y + z - 8 = 0$.

7.6 Solutions des exercices

1) $\alpha \cong 63°$

2) $\alpha \cong 40,5°, \quad \beta \cong 99,8°, \quad \gamma \cong 39,7°$

3) $\alpha \cong 42,0°$

4) $\alpha \cong 36,6°$

5) a) $C(3; -2; 5)$
   b) $h = 9$
   c) $\alpha \cong 40,8°$
   d) $B(\frac{13}{2}; 2; \frac{1}{2})$ par exemple
   e) $D(-\frac{9}{14}; \frac{68}{14}; \frac{67}{14})$ et $E(\frac{93}{14}; -\frac{124}{14}; \frac{73}{14})$
   f) $r \cong 7,76$

6) $2x - 2y - z - 3 = 0, \quad x + 2y - 2z - 6 = 0$

Chapitre 8

Produit vectoriel

8.1 Définitions et propriétés

Dans le chapitre 5, nous avons défini le produit scalaire de deux vecteurs dont le résultat est un nombre réel.

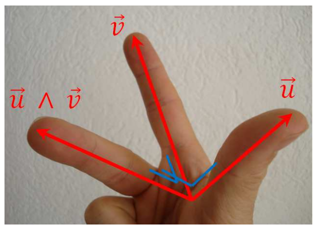
Dans ce chapitre, nous allons définir le produit vectoriel de deux vecteurs dont le résultat est un vecteur.

Définition 8.1
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant un angle φ.

Par définition, le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (lire $\vec{u}$ "cross" $\vec{v}$) tel que :

1. la **direction** de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale aux directions des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
2. le **sens** de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne au triplet $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ une *orientation directe* :

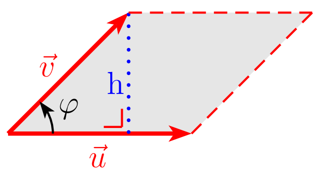
   cette orientation est donnée par la "règle du tire-bouchon" ou par la "règle des trois doigts de la main droite" (pouce, index, majeur), illustrée ci-contre ;



3. la **norme** est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\varphi)|}$$

   (base : $\|\vec{u}\|$, hauteur : $h = \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\varphi)|$).



Remarques

1. On utilise aussi la notation $\vec{u} \times \vec{v}$ au lieu de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. Par convention, la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite **directe** si le vecteur $\vec{k}$ s'obtient à partir des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, pris dans cet ordre, à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite. On dit aussi que cette base est **orientée positivement**.

   Dans le cas contraire, on dit que la base orthonormée est rétrograde ou orientée négativement.

3. Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases comme orthonormées et directes.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Anticommutativité : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
2. Bilinéarité : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
   $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
3. Produit par un nombre réel : $(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$
4. Identité de Lagrange : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$
5. Colinéarité : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

8.1.1 Expression analytique du produit vectoriel

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une *base orthonormée directe* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 8.1
Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}}$$

Remarque

Pour le calcul de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut utiliser (par abus de notation) le pseudo-déterminant suivant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *donnés en composantes dans une base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *orthonormée directe. On peut calculer leur produit vectoriel :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 - 20 \\ -10 - 3 \\ 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou en utilisant le pseudo-déterminant

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & -2 \\ \vec{j} & -3 & 4 \\ \vec{k} & 5 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 4\vec{k} - 10\vec{j} - 6\vec{k} - 20\vec{i} - 3\vec{j} = -29\vec{i} - 13\vec{j} - 2\vec{k}$$

8.2 Applications du produit vectoriel

8.2.1 Détermination du vecteur normal à un plan

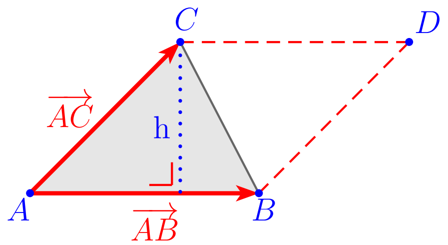
Soit trois points distincts A, B et C non alignés et le plan (ABC).
Un vecteur normal au plan (ABC) est :

$$\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}$$

8.2.2 Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle (ABC) vaut la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

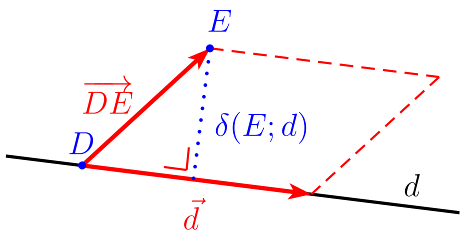
$$\boxed{S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$



8.2.3 Distance d'un point à une droite

La distance d'un point E à une droite $d(D;\vec{d})$ est donnée par :

$$\boxed{\delta(E;d) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}}$$



Démonstration. Par définition du produit vectoriel, l'aire du parallélogramme sur $\overrightarrow{DE}$ et $\vec{d}$ vaut $\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|$. Or, cette aire est également donnée par le produit entre la base, $\|\vec{d}\|$, et la hauteur, $\delta(E;d)$.

$$S = \|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\| = \|\vec{d}\| \cdot \delta(E;d) \quad \Rightarrow \quad \delta(E;d) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

□

8.2.4 Perpendiculaire commune à deux droites gauches

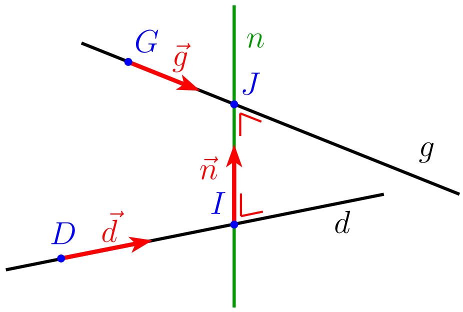
Soit deux droites gauches $d(D;\vec{d})$ et $g(G;\vec{g})$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{d} \wedge \vec{g}$.

La perpendiculaire commune n aux deux droites d et g est contenue dans le plan $p(D;\vec{d};\vec{n})$, passe par le point d'intersection de la droite g et du plan p et a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

8.2.5 Distance de deux droites gauches

Définition 8.2
Soit deux droites gauches $d(D;\vec{d})$ et $g(G;\vec{g})$.

La distance $\delta(d;g)$ est la distance de I à J, où I et J sont les points d'intersection de la perpendiculaire commune n à d et g.



Propriété

La distance entre les deux droites gauches d et g est donnée par :

$$\boxed{\delta(d;g) = \frac{|\overrightarrow{DG} \bullet (\vec{d} \wedge \vec{g})|}{\|\vec{d} \wedge \vec{g}\|}}$$

Remarques

1. Nous démontrerons cette formule de $\delta(d;g)$ en exercice.
2. Le numérateur de la formule $\delta(d;g)$ comprend un produit scalaire et un produit vectoriel : le résultat de cette double opération est appelé **produit mixte**.

8.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Calculer et comparer :

   a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$

   b) $\vec{u} \wedge (2 \cdot \vec{v})$, $(2 \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v}$ et $2 \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$

   c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$

   d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

   e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$ et $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$

2) Est-ce que $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}$ implique $\vec{b} = \vec{c}$?

3) Démontrer le formule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$ (identité de Lagrange).

4) Calculer $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ lorsque $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\frac{\pi}{6}$.

5) Soit le plan (ABC) avec $A(-6; 3; -2)$, $B(5; 2; 1)$ et $C(2; 5; 2)$.

   Ecrire les équations paramétriques de la droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (ABC).

6) On donne les plans $p : 3x - 2y + 5z = 3$ et $q : x - y - z = -2$.

   Trouver une équation cartésienne du plan r passant par l'origine et perpendiculaire aux deux plans p et q.

7) On donne les points $A(2; 1; -2)$, $B(2; 3; 0)$, $C(6; 6; 5)$ et $D(6; 4; 3)$.

   Vérifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire.

8) Calculer l'aire du triangle de sommets $A(1; 4; -3)$, $B(1; 6; -1)$ et $C(5; 9; 2)$.

9) Soit la droite $d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 2k \\ y & = & 2 & + & 3k \\ z & = & -1 & + & k \end{array} \right.$.

   Calculer la distance du point $A(-5; 4; -2)$ à la droite d.

10) Soient les points $A(2; 1; 3)$, $B(1; 2; 1)$, $C(-1; -2; -2)$ et $D(1; -4; 0)$.

   a) Vérifier que les deux droites (AB) et (CD) sont gauches.

   b) Déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites.

   c) Calculer la distance entre ces deux droites.

8.4 Solutions des exercices

1) a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -21 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \wedge (2\vec{v}) = (2\vec{u}) \wedge \vec{v} = 2(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$

d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -56 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$

e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -98$

2) Non

4) $||\vec{a} \wedge \vec{b}|| = 15$

5) $d : \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 - 3k \end{cases}$

6) $r : 7x + 8y - z = 0$

7) $A = 12$

8) $A = 5,65$

9) $\delta(A; d) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

10) b) Perpendiculaire commune : $\begin{cases} x = -6 + k \\ y = 3 + k \\ z = -7 \end{cases}$

c) $\delta((AB); (CD)) = 3\sqrt{2}$

Chapitre 9

Produit mixte

9.1 Définitions et propriétés

Définition 9.1
On appelle **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pris dans cet ordre, le **nombre réel** noté $\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor$ et défini par la formule :

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Le produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = \lfloor \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rfloor = \lfloor \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rfloor$$

2. Le produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs :

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = -\lfloor \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rfloor = -\lfloor \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \rfloor = -\lfloor \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \rfloor$$

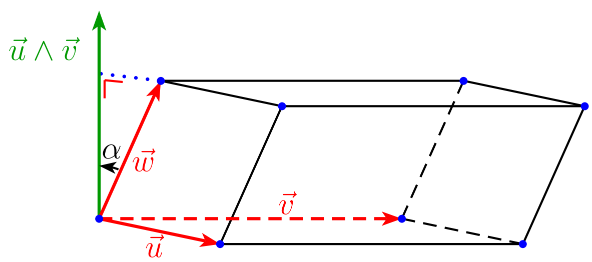
3. Produit par un nombre réel et somme :

$$\begin{aligned} \lfloor \lambda \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor &= \lambda \cdot \lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor \\ \lfloor \vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w} \rfloor &= \lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor + \lfloor \vec{u}', \vec{v}, \vec{w} \rfloor \end{aligned}$$

4. Pseudo - associativité :

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$$

5. Le produit mixte $\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.



Démonstration. On considère le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ représenté ci-dessus. On a :

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w} = \underbrace{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}_{\text{hauteur}} = \text{volume para.}$$

□

9.1.1 Expression analytique du produit mixte

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une *base orthonormée directe* $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 9.1
Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre :

$$\boxed{\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

Démonstration. Soient les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{aligned} \lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor &= \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \\ &= u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

Exemple

Le produit mixte des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est égal à :*

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 0 - 24 - 3 - 0 = -11$$

9.2 Applications du produit mixte

9.2.1 Indépendance linéaire

Le produit mixte permet de déterminer si trois vecteurs (ou quatre points) sont coplanaires :

$$\lfloor \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rfloor = 0 \Longleftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont coplanaires}$$

9.2.2 Equation cartésienne d'un plan

Soient trois points distincts A, B et C non alignés et le plan (ABC).

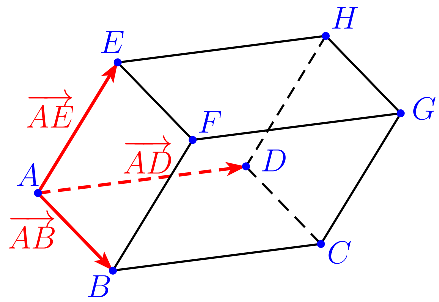
Le produit mixte permet de déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC) en posant :

$$\lfloor \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rfloor = 0$$

9.2.3 Volume d'un parallélépipède

Le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$ est donné par :

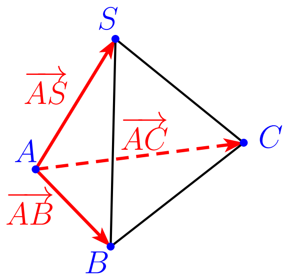
$$\boxed{V = |\lfloor \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \rfloor|}$$



9.2.4 Volume d'un tétraèdre

Le volume du tétraèdre $SABC$ est donné par :

$$\boxed{V = \frac{1}{6}|\lfloor \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS} \rfloor|}$$



9.2.5 Distance de deux droites gauches

Soient deux droites gauches $d(D; \vec{d})$ et $g(G; \vec{g})$.

La distance entre les deux droites gauches d et g est donnée par :

$$\boxed{\delta(d; g) = \frac{|\lfloor \overrightarrow{DG}, \vec{d}, \vec{g} \rfloor|}{\|\vec{d} \wedge \vec{g}\|}}$$

9.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   Calculer les produits mixtes suivants : $\lfloor \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rfloor$, $\lfloor \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rfloor$, $\lfloor \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rfloor$, $\lfloor \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \rfloor$.

2) Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   Déterminer un vecteur $\vec{c}$ tel que $\lfloor \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rfloor = 0$. Constatation.

3) Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs orthogonaux deux à deux, tels que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ et $\|\vec{c}\| = 5$.

   Calculer le produit mixte $\lfloor \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rfloor$.

4) On donne les points $A(7; 1; -3)$, $B(8; 2; -2)$, $C(4; 4; 4)$ et $D(10; 1; -5)$.

   Ces quatre points sont-ils coplanaires ?

5) Soient les points $A(-1; -1; 7)$, $B(-2, 1; 6)$, $C(0; 1; 6)$, $D(1; -1; 7)$, $E(2; -2; 3)$, $F(1; 0; 2)$, $G(3; 0; 2)$ et $H(4; -2; 3)$.

   Vérifier que le polyèdre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume.

6) Soient les points $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ et $S(4; 1; 3)$.

   Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.

9.4 Solutions des exercices

1) $\lfloor\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rfloor = 70$, $\quad\lfloor\vec{a},\vec{c},\vec{b}\rfloor = -70$, $\quad\lfloor\vec{b},\vec{c},\vec{a}\rfloor = 70$, $\quad\lfloor\vec{a},\vec{b},\vec{a}\rfloor = 0$

2) Les vecteurs $\vec{c}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement dépendants. Par exemple $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) $\lfloor\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rfloor = 30$

4) Oui

5) $V = 18$

6) $V = 3$

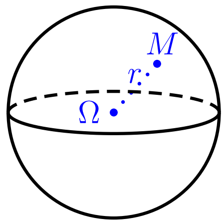
Chapitre 10

La sphère

10.1 Définition

Définition 10.1

On appelle **sphère** Σ de **centre** Ω et de **rayon** r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance r du centre Ω. On a donc :



$$\boxed{M \in \Sigma \Leftrightarrow \delta(\Omega; M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r}$$

On note cette sphère : $\Sigma(\Omega; r)$.

10.2 Equation cartésienne d'une sphère

Soit la sphère Σ de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère Σ si et seulement si $\delta(\Omega; M) = r$. On a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r \quad &\Leftrightarrow \quad \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\| = r \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2} \end{aligned}$$

Cette dernière relation est appelée **équation cartésienne** (canonique) de la sphère Σ.

En développant la formule ci-dessus, on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$$

avec $a \neq 0$, appelée **équation générale** d'une sphère.

Exemple

Soit la sphère Σ donnée par l'équation générale : $x^2+y^2+z^2-10x+4y+6z+22 = 0$. Nous allons déterminer le centre Ω et le rayon r de cette sphère.

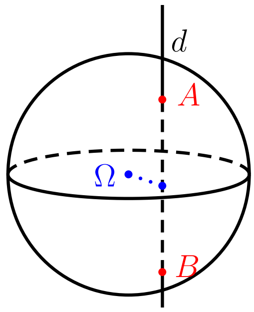
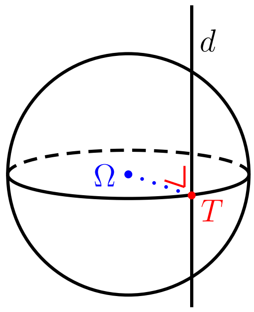
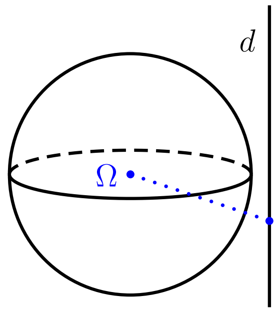
L'idée est de transformer l'équation générale en l'équation cartésienne canonique pour pouvoir y lire directement Ω et r. On commence pour regrouper les termes en x, y et z, puis on "complète les carrés".

$$\begin{aligned}
\underbrace{x^2-10x}_{(x-5)^2-25}+\underbrace{y^2+4y}_{(y+2)^2-4}+\underbrace{z^2+6z}_{(z+3)^2-9}+22 &= 0\\
(x-5)^2+(y+2)^2+(z+3)^2 &= 25+4+9-22\\
(x-5)^2+(y+2)^2+(z+3)^2 &= 16
\end{aligned}$$

La sphère Σ a pour centre $\Omega(5;-2;3)$ et pour rayon $r=\sqrt{16}=4$.

10.3 Positions relatives d'une droite et d'une sphère

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'une sphère $\Sigma(\Omega;r)$.

		
$\delta(\Omega;d)<r$	$\delta(\Omega;d)=r$	$\delta(\Omega;d)>r$
Deux points A et B d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Définition 10.2
Une **droite tangente** à la sphère $\Sigma(\Omega;r)$ est une droite située à la distance r de Ω.

Calcul de l'intersection d'une droite et d'une sphère

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'une sphère Σ.

Substituer les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne de la sphère Σ.

On obtient alors une équation de degré 2 à une inconnue (le paramètre), qu'on résout.
- Si cette équation admet deux solutions, alors l'intersection est constituée de deux points A et B. On obtient ces points en injectant les valeurs obtenues du paramètre dans les équations de la droite d.
- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point T. d est tangente à la sphère Σ en T.
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soit la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2-x-2y+z-3=0$ et la droite d : $\begin{cases} x = 6-2k \\ y = -3+2k \\ z = -4+k \end{cases}$. Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

On substitue tout d'abord les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne de la sphère Σ :

$$(6-2k)^2 + (-3+2k)^2 + (-4+k)^2 - (6-2k) - 2(-3+2k) + (-4+k) - 3 = 0$$

On résout l'équation obtenue :

$$9k^2 - 45k + 54 = 0 \;\rightarrow\; k^2 - 5t + 6 = 0 \;\rightarrow\; (k-2)(k-3) = 0 \;\rightarrow\; k_1 = 2, k_2 = 3$$

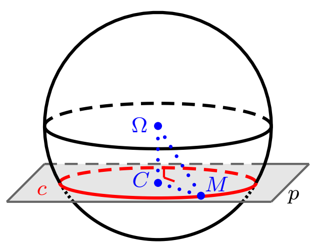
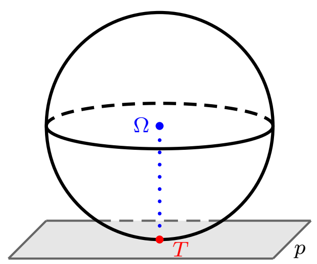
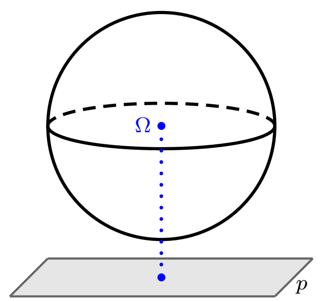
La droite d et la sphère Σ s'intersectent en deux points A et B. Pour les obtenir, on injecte les valeurs de k dans les équations paramétriques de la droite :

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad A : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 6 & - & 2\cdot 2 & = & 2 \\ y & = & -3 & + & 2\cdot 2 & = & 1 \\ z & = & -4 & + & 2 & = & -2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow A(2;1;-2)$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad B : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 6 & - & 2\cdot 3 & = & 0 \\ y & = & -3 & + & 2\cdot 3 & = & 3 \\ z & = & -4 & + & 3 & = & -1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow B(0;3;-1)$$

10.4 Positions relatives d'un plan et d'une sphère

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'un plan p et d'une sphère $\Sigma(\Omega; r)$.

		
$\delta(\Omega; p) < r$	$\delta(\Omega; p) = r$	$\delta(\Omega; p) > r$
Un cercle c d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Remarque

Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On définit un cercle de l'espace en donnant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Définition 10.3

Un **plan tangent** à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ est un plan situé à la distance r de Ω.

Propriété

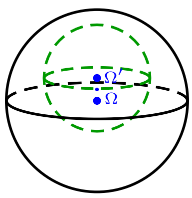
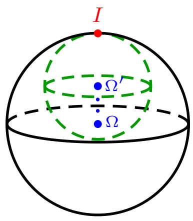
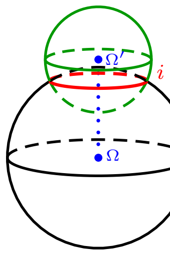
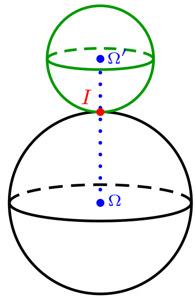
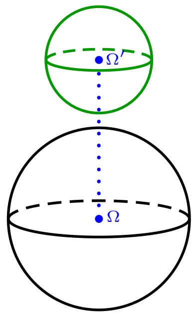
Le plan tangent à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ au point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}$.

Remarque

Le plan tangent en un point T à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ contient toutes les droites tangentes en T à cette sphère.

10.5 Position relatives de deux sphères

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux sphères $\Sigma(\Omega; R)$ et $\Sigma'(\Omega', r)$ avec $R > r$.

				
$\delta(\Omega; \Omega') < R - r$	$\delta(\Omega; \Omega') = R - r$	$\begin{cases} \delta(\Omega; \Omega') > R - r \\ \delta(\Omega; \Omega') < R + r \end{cases}$	$\delta(\Omega; \Omega') = R + r$	$\delta(\Omega; \Omega') > R + r$
$\cap$: $\emptyset$	$\cap$: un point I	$\cap$: un cercle i	$\cap$: un point I	$\cap$: $\emptyset$

10.6 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O;I;J;K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$ de $\mathbf{V}_3$ associée.

1) Ecrire l'équation cartésienne de
   a) la sphère de centre $O(0;0;0)$ et passant par le point $A(3;2;-1)$.
   b) la sphère de centre $C(1;-2;4)$ et passant par le point $A(3;2;-1)$.

2) Ecrire l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$.

3) Les équation suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, déterminer le centre et le rayon.
   a) $x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+22=0$
   b) $x^2+y^2+z^2-12x-2y+6z+56=0$
   c) $2x^2+2y^2+2z^2-2x+8y+2z-87=0$

4) Ecrire l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4;2;-3)$, $B(-1;3;1)$ et ayant sont centre sur la droite (CD) avec $C(2;3;7)$ et $D(1;5;9)$.

5) Ecrire l'équation de la sphère passant par les quatre points $A(5;7;-2)$, $B(3;1;0)$, $C(-5;12;3)$ et $D(-3;-2;-1)$.

6) Soient la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et la droite $d : \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -3 &+& 2k \\ y &=& 6 &-& 2k \\ z &=& -4 &+& k \end{array}\right.$.

   Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d.

7) Soient la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-9=0$ et la droite $d : \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &-& k \\ y &=& 4 &+& k \\ z &=& 4 &+& k \end{array}\right.$.

   Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d.

8) Soient la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z+17=0$ et le point $A(-2;2;3)$.
   a) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ.
   b) Ecrire les équations paramétriques d'une droite d tangente en A à la sphère Σ.
   c) Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère Σ au point A.
   d) Ecrire les équations paramétriques de la droite g tangente en A à la sphère Σ et coupant l'axe des z.

9) Soient la sphère $\Sigma : (x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=289$ et le point $A(14;4;-6)$.
   a) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ.

b) Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère Σ au point A.

10) Ecrire l'équation de la sphère Σ de centre $\Omega(4; 1; -5)$ et tangente au plan p d'équation cartésienne $p : x + 2y + 2z = 4$.

11) Soient la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 159$ et le plan $p : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Déterminer les équations des plans parallèles au plan p et tangents à la sphère Σ.

12) On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et les deux points $A(3; 0; 6)$ et $B(3; 5; 1)$.

Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ et contenant la droite (AB).

13) Soit la sphère Σ de centre $\Omega(2; -3; 7)$ et passant par le point $A(5; 1; -5)$.

Déterminer la droite t tangente à la sphère Σ en A et perpendiculaire à la droite (OA), O étant l'origine.

14) Soient la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ et le plan $p : 2x - 2y - z + 9 = 0$.

a) Prouver que le plan coupe la sphère Σ.

b) L'intersection de p et Σ est un cercle c ; déterminer son centre et son rayon.

15) Soient les sphères $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 81$ et $\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$.

Montrer que les deux sphères Σ et Σ' sont tangentes.

16) On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 2z - 57 = 0$ et la sphère $\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 10y - 8z - 27 = 0$.

Prouver que ces deux sphères se coupent, puis déterminer leur intersection.

10.7 Solutions des exercices

1) a) $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 14$
   b) $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 24 = 0$

2) $\Sigma : (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$

3) 1) Centre : $(-3; 5; 2)$, rayon : 4
   2) Pas une sphère.
   3) Centre : $(\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2})$, rayon : $\sqrt{48}$

4) $\Sigma : (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45$

5) $\Sigma : (x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 65$

6) $I_1(1; 2; -2)$ et $I_2(3; 0; -1)$

7) $I_1(1; 1; 1)$ et $I_2(3; -1; -1)$

8) b) $d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 2k \\ y & = & 2 & + & k \\ z & = & 3 & & \end{array} \right.$ par exemple.
   c) $t : x - 2y + 2z = 0$
   d) $g : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & - & 2k \\ y & = & 2 & + & 2k \\ z & = & 3 & + & 3k \end{array} \right.$

9) b) $t : 12x + 8y - 9z - 254 = 0$

10) $\Sigma : (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}$

11) $t_1 : 12x + 4y + 3z - 209 = 0$ et $t_2 : 12x + 4y + 3z + 129 = 0$

12) $t_1 : x - 2y - 2z + 9 = 0$ et $t_2 : x - 3 = 0$

13) $t : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & + & 7k \\ y & = & 1 & - & 45k \\ z & = & -5 & - & 17k \end{array} \right.$

14) Centre : $(-1; 2; 3)$, rayon : 8

16) Cercle de centre $(3; 1; 2)$, de rayon $\sqrt{61}$ et contenu dans le plan $2x - 3y + 2z - 5 = 0$.