Géométrie vectorielle et analytique plane

1 Vecteurs du plan

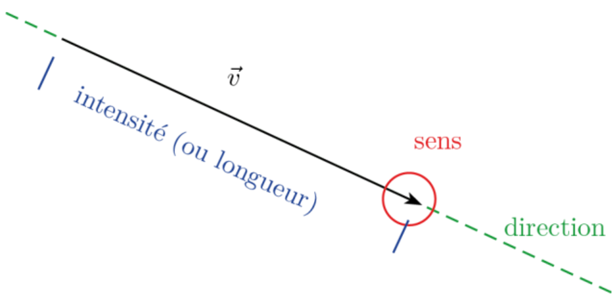
1.1 Premières définitions

Exercice 1.1 : Soit les entités physiques suivantes : température, temps, vitesse du vent, accélération, force, énergie. En trouver d'autres puis les classer de manière pertinente.

Des quantités comme l'aire, le volume, la longueur, la température, le temps n'ont qu'une intensité et peuvent être entièrement représentées par un nombre réel (accompagné de l'unité de mesure adéquate, comme m^2, m^3, m, °C ou s). Une grandeur de ce type est une **grandeur scalaire** et le nombre réel correspondant est un **scalaire**. Des concepts tels que la vitesse ou la force ont à la fois *une intensité, un sens* et *une direction* et sont souvent représentés par un **segment de droite orienté** (ou, ''plus simplement'', une **flèche**). Cette représentation nous mènera à la notion de **vecteur**, généralisation du segment de droite orienté.

La notion de vecteur est très puissante. Elle permet, entre autre, d'exprimer de façon claire et concise de nombreuses lois physiques et de réduire de manière considérable le nombre d'équations ou de formules mathématiques dont il faut tenir compte.

Une flèche, du plan ou de l'espace, peut être définie par les éléments suivants :

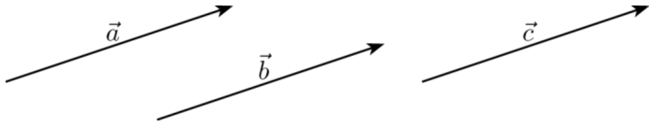


- sa longueur, qu'on appelle **intensité** ou module ou norme ;
- sa direction, qui est la droite sur laquelle repose la flèche ;
- son sens. La droite support possède toujours deux sens.

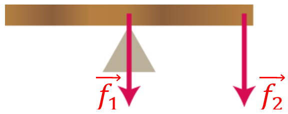
Une flèche sera notée avec une flèche en dessus de la lettre la représentant : $\vec{f}$

Définition 1 : Nous dirons que **deux flèches, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égales** si elles ont la même intensité, la même direction et le même sens.

Par exemple, les trois flèches de la figure ci-dessous sont égales, même si elles ne sont pas représentées au même endroit dans l'espace.



En mathématiques, la définition ci-dessus postule donc qu'une flèche n'a pas de point d'attache. La physique, par contre, a parfois besoin d'attribuer un point d'application aux flèches. Suivant l'endroit où s'applique la force, une situation peut amener, en effet, des mouvements très différents. Dans la situation ci-dessous, la force représentée par la flèche $\overrightarrow{f_1}$ ne donne aucun mouvement, alors que la force $\overrightarrow{f_2}$ amène un mouvement de rotation.



La physique pourra tout de même utiliser la théorie que nous allons développer ici. Elle sera simplement amenée à faire quelques limitations suivant les situations.

Définition 2 : Un **vecteur** est un ensemble composé de toutes les flèches qui ont la même intensité, la même direction et le même sens.

Dans la situation ci-dessus, les flèches $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ possèdent la même intensité, la même direction et le même sens et sont donc égales. L'ensemble des flèches possédant ces mêmes caractéristiques forme le vecteur U, $U = \{\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} ; \dots\}$. La connaissance des caractéristiques d'une flèche, par exemple $\vec{b}$, est suffisante pour définir un vecteur en entier. Nous dirons que $\vec{b}$ est un représentant du vecteur U. Par abus de langage, il est usuel de parler du vecteur $\vec{b}$. Au sens strict, ceci est faux, cette flèche n'est qu'un représentant du vecteur U. Cependant, l'entier de l'information se trouvant dans cette flèche, cette simplification de langage semble raisonnable.
Cette simplification a une conséquence importante. Nous ne dirons donc plus que les flèches $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ sont égales ou qu'elles représentent le même vecteur, ce qui est correct. Nous dirons que les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ sont égaux, ce qui, au sens strict, est faux puisque $\vec{a}$ n'est pas un vecteur, mais un de ses représentants.

Définition 3 : L'ensemble des vecteurs est appelé **espace vectoriel**.

Remarques :

1. L'ensemble des vecteurs du plan se note V_2. Pour cet espace vectoriel, on parle parfois de plan vectoriel. Nous allons essentiellement travailler avec les vecteurs du plan dans la suite de ce cours.
2. L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3.

Un vecteur est un peu particulier, il s'agit du vecteur nul.

Définition 4 : Le vecteur qui possède une intensité nulle est appelé le vecteur nul. Il est noté $\vec{0}$.

Ce vecteur ne peut évidemment pas être dessiné. C'est le seul vecteur qui n'a ni direction ni sens.

1.2 Opérations sur les vecteurs

Nous ne pouvons avoir une idée de ce que sont les nombres qu'après avoir appris à les manipuler (additionner, soustraire, multiplier,…). Cela est aussi vrai pour les objets que sont les vecteurs.

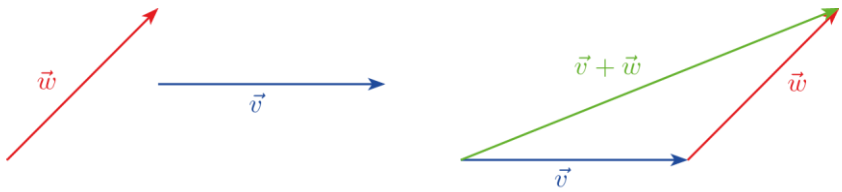
Nous allons commencer par étudier l'addition de deux ou plusieurs vecteurs. Dans cet étude, nous allons considérer uniquement des vecteurs de l'espace vectoriel V_2. Les définitions que nous allons donner peuvent s'étendre par analogie aux vecteurs de V_3.

1.2.1 Addition vectorielle

Comme ils sont caractérisés par une direction, un sens et une intensité, on ne peut pas additionner les vecteurs comme n'importe quelles autres valeurs numériques.

Définition 5 : La somme des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartenant à V_2, noté $\vec{v}+\vec{w}$, est définie ainsi :

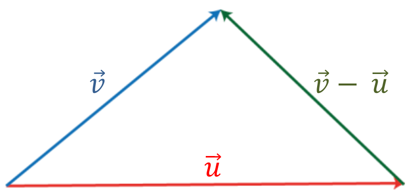
1. On place les deux vecteurs bout à bout de tel sorte que le point terminal de $\vec{v}$ coïncide avec le point initial de $\vec{w}$.
2. Le vecteur $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$ relie le point initial de $\vec{v}$ avec le point final de $\vec{w}$.



Remarques : L'addition regroupe deux vecteurs pour ne plus qu'en former un seul : $V_2 \times V_2 \to V_2$.

Une deuxième méthode, équivalente à la précédente, permet d'additionner deux vecteurs. Après avoir tracé les deux vecteurs à partir d'une origine commune, on dessine un parallélogramme dont ces vecteurs forment deux côtés adjacents. La somme est la diagonale tracée à partir du point d'origine commun.

On commet souvent l'erreur de représenter le vecteur de la somme par l'autre diagonale. On obtient alors la soustraction des deux vecteurs comme nous le verrons plus tard.



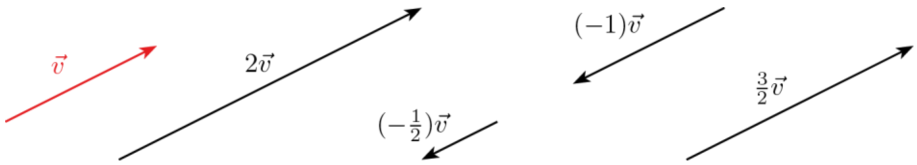
1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Définition 6 :

Le produit entre un scalaire λ et un vecteur $\vec{v}$ appartenant à V_2, noté $\lambda\vec{v}$, est défini ainsi :

1. Si $\lambda \neq 0$, la direction de $\lambda\vec{v}$ sera la même que celle de $\vec{v}$, son intensité sera $|\lambda|$ fois celle de $\vec{v}$, son sens sera conservé si $\lambda > 0$ et inversé si $\lambda < 0$.
2. Si $\lambda = 0$, le vecteur $\lambda\vec{v}$ est le vecteur $\vec{0}$.



Autrement dit, nous pouvons visualiser ainsi le résultat de cette multiplication :

	Direction	**Sens**	**Intensité**
λ > 0	Même que $\vec{v}$	Même que $\vec{v}$	$|\lambda|$ fois celle de $\vec{v}$
λ = 0	Aucune	Aucune	Nulle
λ < 0	Même que $\vec{v}$	Opposé à $\vec{v}$	$|\lambda|$ fois celle de $\vec{v}$

Remarques : La multiplication par un scalaire associe un scalaire et un vecteur et a un vecteur pour résultat : $\mathbb{R} \times V_2 \to V_2$

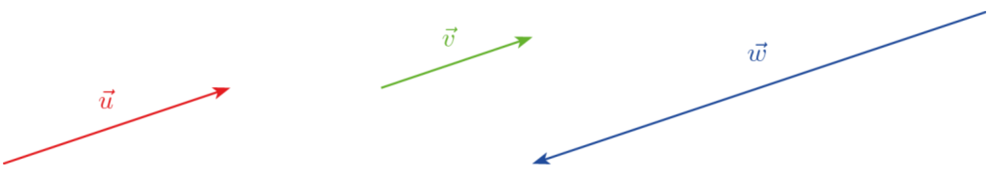
Définition 7 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\boxed{\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}}$$

Exemple

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnés ci-dessous sont colinéaires avec vecteur $\vec{u}$ car $\vec{v} = \frac{2}{3} \cdot \vec{u}$ (ici $\lambda = \frac{2}{3}$) et $\vec{w} = (-2) \cdot \vec{u}$ (ici $\lambda = -2$).



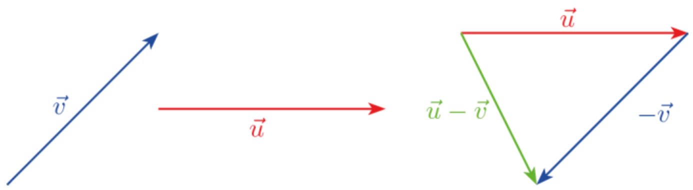
Remarques :

1. Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
2. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

1.2.3 Soustraction vectorielle

Nous pouvons définir également la soustraction de deux vecteurs :

Définition 8 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de V_2. Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est défini comme $\vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$.



Remarques : La soustraction regroupe deux vecteurs pour n'en former plus qu'un seul : $V_2 \times V_2 \to V_2$.

1.3 Vecteurs – définition mathématique

Définition 9 : On appelle **espace vectoriel réel** tout ensemble quelconque V muni de deux lois :

a) une loi appelée addition vectorielle qui, à tout couple d'éléments de V, fait correspondre un élément de V (on note : $+ : V \times V \to V$) et vérifie les quatre propriétés suivantes :
   1) elle est commutative
   2) elle est associative
   3) elle admet un élément neutre
   4) chaque élément de V possède un symétrique, appelé opposé

b) une loi appelée multiplication par un scalaire qui, en associant un scalaire à un élément de V, donne un élément de V (on note : $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$) et vérifie les quatre propriétés suivantes pour tout réel α, β et $x, y \in V$:
   1) $1 \cdot x = x$
   2) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
   3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
   4) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**.

À ce stade, le lecteur peut légitimement s'étonner de voir deux définitions très différentes pour la notion de vecteur. Celle que nous venons de donner étant bien plus abstraite que la première.

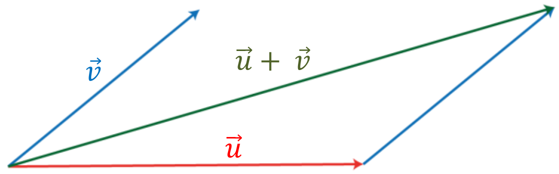
La définition la plus correcte est la définition 9. La définition 2 munie de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans le chapitre précédent n'est qu'un exemple d'espace vectoriel, comme nous allons le démontrer ci-dessous. C'est pourtant avec celui-ci que nous travaillerons dans ce chapitre parce qu'il est très visuel et nous permet une approche géométrique de cette notion relativement abstraite. Le traitement plus général fait partie d'un autre cours qui s'appelle *Algèbre linéaire* et qui n'est traité que par les OS scientifiques. Nous verrons tout de même quelques exemples différents d'espace vectoriel.

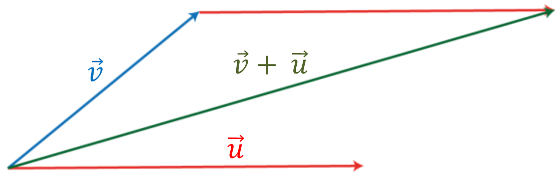
1.3.2 Cas particulier : vecteurs du plan

Pour démontrer que l'espace vectoriel des vecteurs du plan (ou de l'espace) que nous avons défini en premier est bien un espace vectoriel au sens strict du terme, il nous faut montrer que les 4 propriétés de l'addition et les 4 propriétés de la multiplication par un scalaire sont vérifiées.

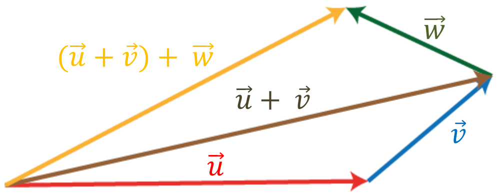
L'addition vectorielle dans le cas géométrique possède bien les quatre propriétés fondamentales citées ci-dessus :

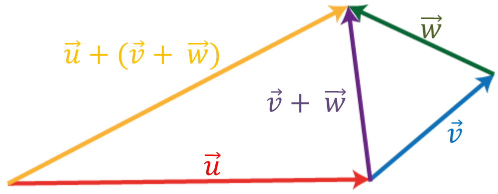
L'addition de vecteur est **commutative**. Cela signifie que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de V_2, alors $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.





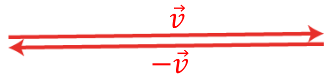
L'addition de vecteur est **associative**. Cela signifie que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de V_2, alors $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.





L'addition a un élément **neutre** : le vecteur nul $\vec{0}$. En effet, quel que soit $\vec{v}\in V_2$, $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$.

Quel que soit le vecteur $\vec{v}\in V_2$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v'}\in V_2$ tel que : $\vec{v}+\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{v'}+\vec{v}=\vec{0}$. Ce vecteur est appelé le vecteur **opposé** de $\vec{v}$.



Le vecteur opposé de $\vec{v}$ possède la même intensité et la même direction que $\vec{v}$. Par contre, son sens est opposé à celui de $\vec{v}$. Au vu de la définition que nous avons donnée de la multiplication par un scalaire, nous constatons que $\overrightarrow{v'}$ peut également s'écrire $(-1)\cdot\vec{v}=-\vec{v}$.

Pour ce qui est de la multiplication par un scalaire, à vous de démontrer les 4 propriétés suivantes à l'aide d'un petit croquis lorsque c'est nécessaire.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_2 et les scalaires λ et μ :

$$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$$
$$\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})=(\lambda\mu)\cdot\vec{u}$$
$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$$
$$\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$$

1.3.3 Autres exemples d'espace vectoriel réel

Il serait faux d'assimiler les vecteurs à des flèches, même si c'est comme cela que nous l'appréhendons pour l'essentiel dans ce cours. Bien d'autres ensembles ont une structure d'espace vectoriel. Pour illustrer ce propos, voici trois situations très différentes :

Exercice 1.2 : Montrer que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication habituelles est un espace vectoriel réel.

Exercice 1.3 : Montrer que l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 2 muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles est un espace vectoriel réel.

Exercice 1.4 : Montrer que l'ensemble des fonctions muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituelles est un espace vectoriel réel.

De nombreux autres ensembles pourraient être cités ici, mais on peut déjà percevoir toute la diversité des ensembles que la notion d'espace vectoriel peut concerner.

1.4 Combinaison linéaire

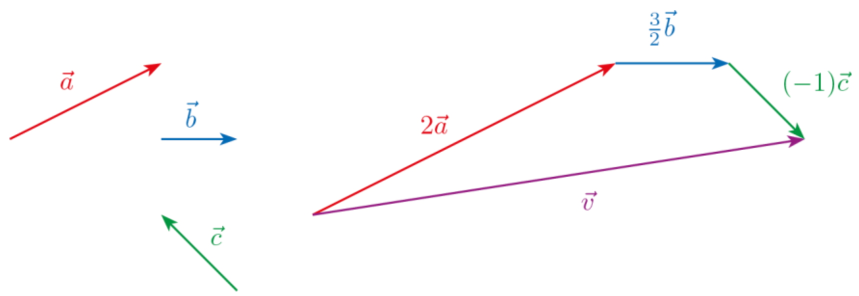
Définition 10 : Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un ensemble de *n* vecteurs d'un espace vectoriel réel V.
On appelle **combinaison linéaire** de ces *n* vecteurs, tout vecteur v tel que :

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Les nombres λ_i sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple

On donne ci-dessous une représentation du vecteur $\vec{v} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + (-1)\vec{c}$ de V_2, combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

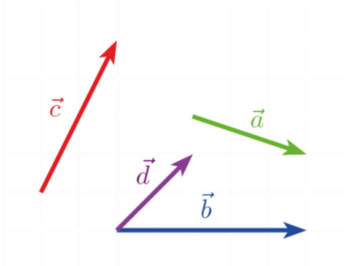


1.5 Base

La notion de base d'un espace vectoriel est fondamentale. Elle va nous permettre d'utiliser des repères et de pouvoir mieux comprendre ce que vous avez déjà rencontré à l'école secondaire en traçant différentes courbes d'une part et d'autre part les croquis que vous faites en physique.

Pour comprendre cette notion, nous allons partir de l'exemple de l'ensemble des vecteurs du plan. Cela nous permettra de faire des essais sur une feuille de papier et/ou sur un tableau.

Exercice 1.5 : Dans le plan, on donne quatre vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.



a) Est-il possible d'exprimer $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$?
b) Est-il possible d'exprimer $\vec{c}, \vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?
c) Est-il possible d'exprimer $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$?
d) Exprimer les conditions permettant d'exprimer des vecteurs comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.
e) À quelle condition la combinaison linéaire est-elle unique ?

Cet exercice permet de réaliser deux constats, en généralisant les résultats obtenus.

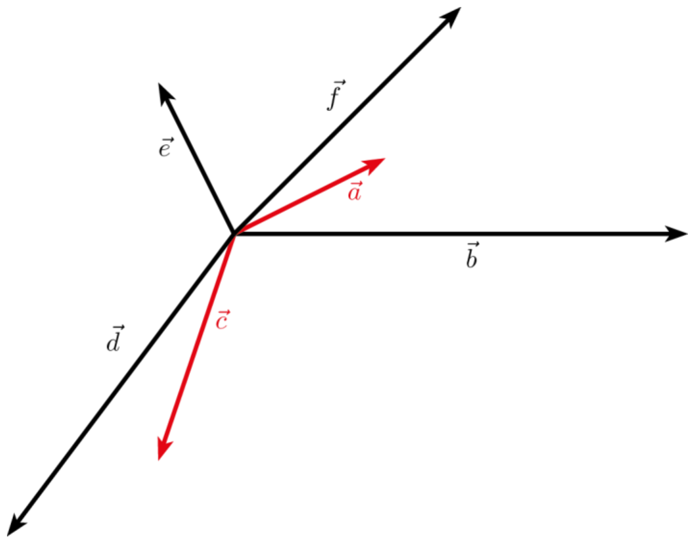
Constat 1

Chaque vecteur $\vec{u}$ de V_2 peut s'écrire comme une **combinaison linéaire** d'au moins deux vecteurs, non-colinéaires, du plan. Deux vecteurs colinéaires ne permettent pas d'écrire l'ensemble des vecteurs du plan, mais uniquement l'ensemble des vecteurs qui leur sont colinéaires.

Constat 2

1. Soit **2 vecteurs** non-colinéaires donnés. Un vecteur $\vec{u}$ quelconque peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
2. Il existe une infinité de combinaisons linéaires qui permettent d'écrire un vecteur $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de trois, ou plus, vecteurs du plan (au moins deux de ces vecteurs doivent être non-colinéaires).

Exercice 1.6 : Dans le plan, on donne six vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ et $\vec{f}$.



Déterminer par constructions et mesures, les composantes scalaires d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ qui permettent d'exprimer chacun des vecteurs suivants :

a) $\vec{a}$	b) $\vec{b}$	c) $\vec{c}$	d) $\vec{d}$
e) $\vec{e}$	f) $\vec{f}$	g) $\vec{b}+\vec{e}$	h) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

Ces deux constats et cet exercice nous permettent d'introduire une méthode de travail importante au niveau des vecteurs. Dans ce qui précède, nous avons à chaque fois considéré des représentations géométriques des vecteurs pour pouvoir les additionner ou les multiplier par un scalaire. Or, il n'est ainsi pas facile de travailler de manière précise et de communiquer le résultat à une autre personne sous cette forme. Par contre, si on pouvait travailler de manière algébrique et additionner ou multiplier par un scalaire des vecteurs sans les représenter graphiquement, la méthode serait plus intéressante du point de vue pratique. Afin de parvenir à ceci, il faudrait pouvoir modéliser algébriquement chaque vecteur de manière unique. Or comme chaque vecteur s'exprime de manière unique **comme combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires du plan**, il suffit de choisir deux vecteurs comme référence et de travailler ensuite efficacement en se référant toujours à ces deux vecteurs. Sans le savoir, c'est cette démarche que vous réalisez quand vous utilisez un repère ou des axes de référence, notamment en physique.

Ainsi nous percevons l'intérêt de la notion de vecteurs. Elle s'utilise en mathématiques, en particulier en géométrie, mais aussi en physique, que ce soit pour tracer une trajectoire ou pour représenter des forces.

Définition 11 : On appelle **base** de l'espace vectoriel V_2 un couple de vecteurs non-colinéaires.

Une base de V_2 se note généralement $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On peut généraliser cette définition à un espace vectoriel quelconque en utilisant la notion de représentation unique d'un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.

Définition 12 : On appelle **base** d'un espace vectoriel réel V tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de V tel que **chaque élément** $\boldsymbol{v}$ de V peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

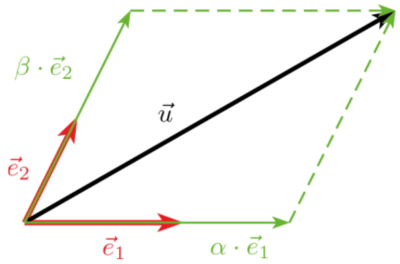
Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés **composantes scalaires** de l'élément v dans la base $\mathcal{B}$.

Remarques : Pour un espace vectoriel donné, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel V est appelé **dimension** de V. Comme une base de V_2 est formée de deux vecteurs, V_2 est un espace vectoriel de dimension 2.

La propriété suivante va nous permettre de représenter algébriquement un vecteur de V_2.

Propriétés : Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de V_2, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de V_2, il existe un couple $(\alpha; \beta)$ de nombres réels, et un seul, tel que

$$\boxed{\vec{u} = \alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2}}$$



α et β sont les composantes scalaires de $\vec{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On note alors

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} \text{ ou } \boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

Cette manière d'écrire n'est correcte que si la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est clairement définie comme base de travail. De plus, les deux membres de l'égalité ne sont pas exactement de même type. En effet, $\vec{u}$ est l'objet lui-même, alors que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est une représentation du vecteur dans la base donnée. Il s'agit donc de ne pas utiliser le signe égal de manière inadéquate. Cette représentation nous permettra d'additionner et de multiplier des vecteurs par un scalaire de manière algébrique.

1.5.2 Opérations sur les composantes dans une base

Soit une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de V_2, un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires relativement à la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ \lambda \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \lambda \cdot u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

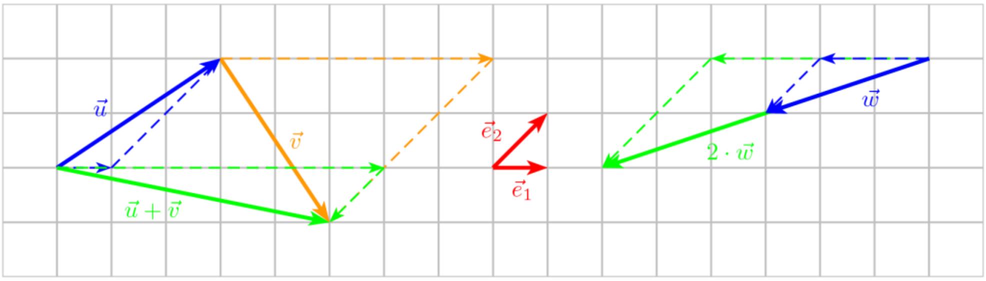
Exemple

On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ *de* V_2*. On peut réaliser les opérations suivantes sur ces vecteurs.*

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \vec{w} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Cette situation est représentée ci-dessous.



1.5.3 Test du déterminant

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de V_2, soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires.

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Dans ce cas, il existe un nombre λ tel que $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$. Si on travaille en composantes, cette égalité s'écrit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \lambda \cdot u_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_1 = \lambda \cdot u_1 \\ v_2 = \lambda \cdot u_2 \end{cases}$$

Dans ce dernier système d'équations, on peut isoler λ dans la première équation et l'injecter dans la deuxième équation. On obtient alors que $v_2 = \frac{v_1}{u_1} \cdot u_2$ ou de manière équivalente $u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0$.

Cette dernière égalité nous donne une condition sur les composantes scalaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour tester si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide de leurs composantes scalaires dans une base de V_2. Cette condition peut être exprimée à l'aide de la notion de déterminant.

Propriétés : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $Det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 = 0$

Remarques : Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_2, $Det(\vec{u},\vec{v})$, est égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Or un parallélogramme « a » une aire nulle si et seulement s'il est dégénéré, c'est à dire que ses quatre côtés sont parallèles.

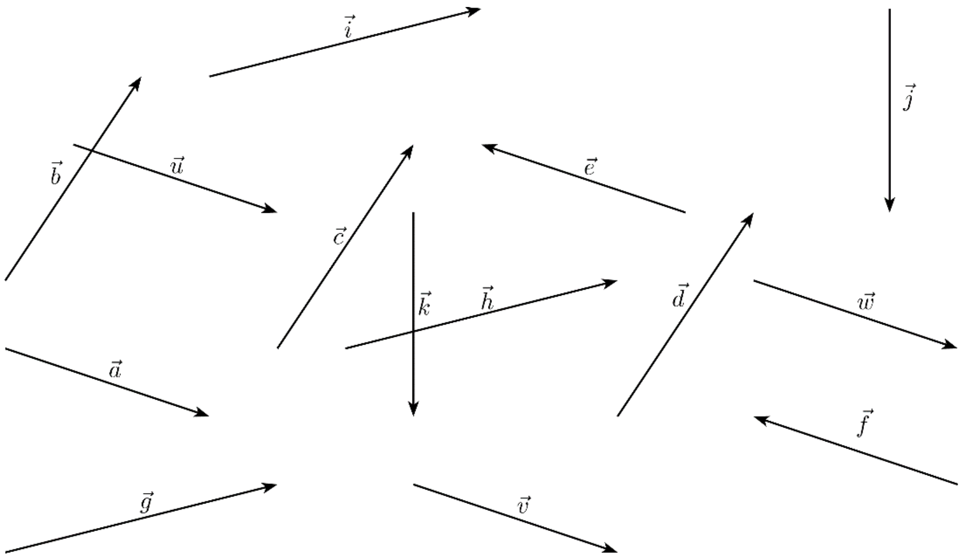
1.6 Exercices

Exercice 1.7 : *ex 54, GE 2* On considère ci-dessous des flèches représentant des vecteurs.

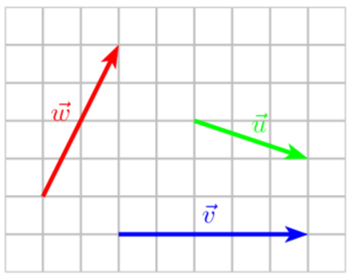
a) Associer les flèches représentant le même vecteur.

b) Combien de flèches différentes sont représentées ci-dessous ?

c) Combien de vecteurs différents sont représentés ci-dessous ?

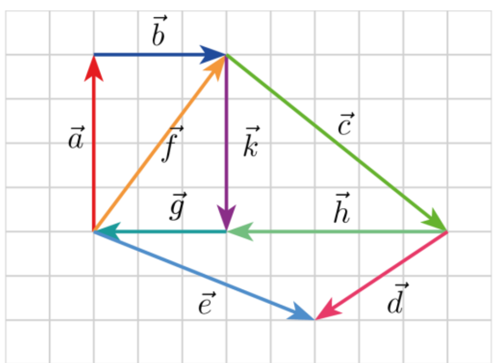


Exercice 1.8 : Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :



a) $\vec{v}+\vec{w}$	b) $\vec{u}+\vec{v}$	c) $3\cdot\vec{v}$	d) $(-4)\cdot\vec{w}$
e) $\vec{v}-\vec{w}$	f) $\vec{u}-\vec{v}$	g) $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$	h) $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$
i) $3\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$	j) $\frac{7}{3}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{w}$	k) $-2\vec{u}+3\vec{v}-\frac{3}{2}\vec{w}$	l) $\frac{3}{7}\vec{u}-\frac{4}{5}\vec{u}$

Exercice 1.9 : Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessous pour répondre aux questions.



a) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{b}=\vec{f}$?

b) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{d}=\vec{e}$?

c) Exprimer $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.

d) Exprimer $\vec{g}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$.

e) Exprimer $\vec{e}$ comme combinaison linéaire de $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$.

f) Exprimer $\vec{e}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

g) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}+\vec{g}$?

h) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{h}$?

Exercice 1.10 : On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ d'un espace vectoriel ***V*** et un nombre réel μ. Montrer que :

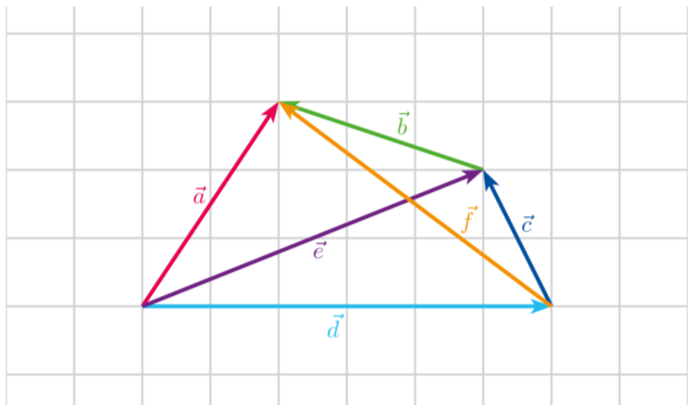
a) Si $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$, alors $\vec{v}=\vec{w}$.

b) $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$

c) $\mu\cdot\vec{0}=\vec{0}$

d) $(-1)\cdot\vec{u}=-\vec{u}$

Exercice 1.11 : Soient les six vecteurs suivants :



Par constructions et mesures, déterminer une valeur approximative des composantes scalaires des vecteurs :

a) $-\vec{e}$ dans la base $(\vec{a},\vec{e})$

b) $\vec{f}$ dans la base $(\vec{d},\vec{a})$

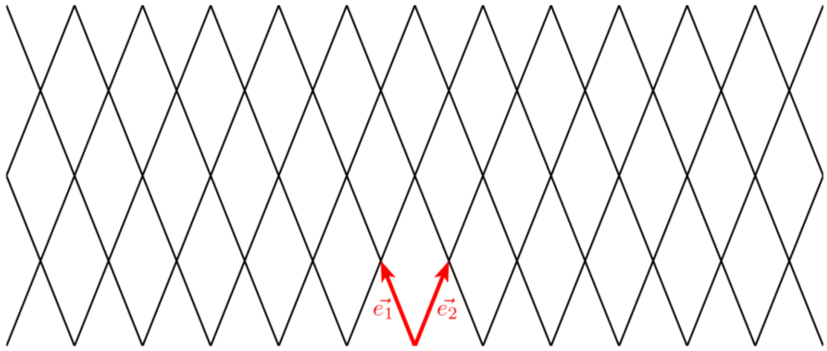
c) $\vec{d}$ dans la base $(\vec{e},\vec{a})$

d) $\vec{e}$ dans la base $(\vec{c},\vec{b})$

e) $\vec{b}$ dans la base $(\vec{a};\vec{f})$

f) $\vec{a}$ dans la base $\overline{(\vec{f},\vec{e})}$

Exercice 1.12 : On considère la figure suivante :



a) Représenter, dans la base $\mathcal{B}(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{g} = \vec{b} + \vec{c}$ et $\vec{h} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$ et donner leurs composantes scalaires dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1.13 : Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{\imath} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

Exercice 1.14 : Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes scalaires des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

Exercice 1.15 : Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux nombres réels α et β tels que $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 1.16 : Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base du plan.

b) Calculer les composantes scalaires des vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

Exercice 1.17 : Relativement à une base $\mathcal{B}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de V_2, on donne les vecteurs :

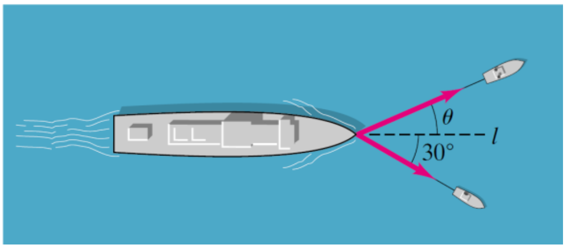
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les composantes scalaires du vecteur $\vec{b}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{c})$.

b) Calculer les composantes scalaires du vecteur $\vec{c}$ dans la base $(\vec{\jmath}, \vec{a})$.

Exercice 1.18 : Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 kilomètres par heure, poussé par un vent d'est de 50 kilomètres par heure. Quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait plus de vent ?

Exercice 1.19 : La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port.



Le remorqueur le plus puissant génère une force d'intensité de 20'000 N sur un câble, le plus petit de 16'000 N. Si le navire suit une ligne droite l, calculer l'angle que forme le plus puissant des remorqueurs avec la droite l.

1.7 Solution des exercices

Corrigé 1.6 : a) $\vec{a} = \binom{1}{0}$ b) $\vec{b} = \binom{3{,}6}{1{,}2}$ c) $\vec{c} = \binom{0}{1}$ d) $\vec{d} = \binom{-1{,}0}{1{,}0}$

e) $\vec{e} \cong \binom{-1{,}0}{-1{,}0}$ f) $\vec{f} \cong \binom{1{,}2}{-0{,}6}$ g) $\binom{2{,}6}{0{,}2}$ h) $\binom{-6{,}2}{0{,}6}$

Corrigé 1.7 : a) \item $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \vec{a}$; $\vec{b} = \vec{c} = \vec{d}$; $\vec{e} = \vec{f}$; $\vec{g} = \vec{h} = \vec{\imath}$; $\vec{\jmath} = \vec{k}$

b) 14 flèches différentes

c) 5 vecteurs différents

Corrigé 1.9 : a) $\vec{a}$ b) $-\vec{g} - \vec{h}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; … c) $\vec{c} = -\vec{f} + \vec{e} - \vec{d}$

d) $\vec{g} = -\vec{k} + \vec{c} + \vec{d} - \vec{e}$ e) $\vec{e} = -\vec{g} - \vec{h} + \vec{d}$ f) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

g) $\vec{0}$ h) $-\vec{g}$

Corrigé 1.11 : a) $-\vec{e} = \binom{0}{-1}$ b) $\vec{f} = \binom{-1}{1}$ c) $\vec{d} \cong \binom{1{,}63}{-1{,}09}$

d) $\vec{e} = \binom{2{,}2}{-2{,}4}$ e) $\vec{b} \cong \binom{-0{,}28}{0{,}61}$ f) $\vec{a} \cong \binom{0{,}48}{0{,}78}$

Corrigé 1.12 : b) $\vec{g} = \binom{-1}{2}$ $\vec{h} = \binom{-1}{7}$

Corrigé 1.13 : $\vec{e}$ est colinéaire à tous ; $\vec{a}, \vec{d}$ et $\vec{h}$; $\vec{b}$ et $\vec{\imath}$; $\vec{c}$ et $\vec{g}$

Corrigé 1.14 : a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\binom{-41}{27}$

Corrigé 1.15 : $\alpha = 3,\ \ \beta = 2$

Corrigé 1.16 : b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{26} \\ -\frac{9}{26} \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ \frac{24}{13} \end{pmatrix}$

Corrigé 1.17 : a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} \\ -\frac{22}{23} \end{pmatrix}$ b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Corrigé 1.18 : 217.54 km/h

Corrigé 1.19 : 23,6°

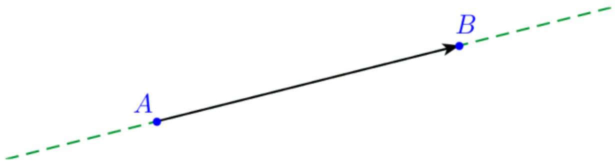
2 Le plan affine

2.1 Lien entre points et vecteurs

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'ensemble des vecteurs du plan. Dans ce deuxième chapitre, nous allons considérer l'ensemble des points du plan. On note souvent cet ensemble π.

Le but de ce chapitre est de lier l'ensemble des points du plan à l'ensemble des vecteurs du plan pour pouvoir profiter des opérations définies sur les vecteurs du plan.

Aux points A et B, on peut faire correspondre une flèche joignant le point A au point B et ainsi utiliser les notions déjà rencontrées précédemment.



L'ensemble des flèches ayant la même direction, le même sens et la même intensité que cette flèche forment le **vecteur** noté $\overrightarrow{AB}$.

Remarques :

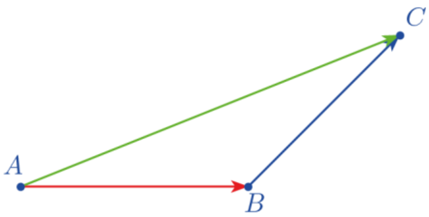
1. Étant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point P quelconque du plan π, il existe un unique point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.
2. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ (on inverse le sens de la flèche représentant le vecteur et on conserve la direction et l'intensité) :

$$\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$$

2.1.1 Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan π.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, selon la définition vue au chapitre précédent, est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$, car, sur le dessin ci-dessous, l'extrémité du représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à l'origine du représentant du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et le représentant du vecteur somme $\overrightarrow{AC}$ relie l'origine de $\overrightarrow{AB}$ et l'extrémité de $\overrightarrow{BC}$.



Définition 13 : L'égalité

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

est appelée **relation de Chasles.**

En partant de cette égalité, on peut déterminer une autre égalité qui sera très intéressante pour pouvoir déterminer les composantes scalaires d'un vecteur à partir des deux points extrémités d'un de ses représentants.

Propriétés : Soient A, B et O trois points du plan π. On a l'égalité suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$

Démonstration :

Soient A, B et O trois points du plan π. Par la relation de Chasles, la commutativité de l'addition, la définition de l'opposé d'un vecteur et la définition de la différence, la suite d'égalités suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AB} \overset{Chasl.}{\cong} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \overset{com.}{\cong} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} \overset{opp.}{\cong} \overrightarrow{OB} + \left(-\overrightarrow{OA}\right) \overset{diff.}{\cong} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

2.2 Repère du plan π

Dans ce qui précède, nous avons associé un couple de points à un vecteur. Pour pouvoir véritablement travailler avec les points du plan, il faudrait pouvoir associer un point à un vecteur. Dans cette optique, nous choisissons un point de référence O de π et nous associons à chaque point M de π un vecteur par la bijection :

$$\begin{array}{rccc} f: & O \times \pi & \to & V_2 \\ & (O; M) & \mapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

Nous disons alors que π est le plan affine associé au plan vectoriel V_2.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de repère pour compléter cette idée d'association entre points et vecteurs.

Définition 14 : On appelle **repère** du plan affine π tout triplet $(O; E_1; E_2)$ de points non alignés.

Si $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ est un repère de π, les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$ déterminent une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan vectoriel V_2, appelée **base associée** au repère $\mathcal{R}$. Le point O est appelé **origine**, les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ **vecteurs de base** du repère $\mathcal{R}$.

On note également ce repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

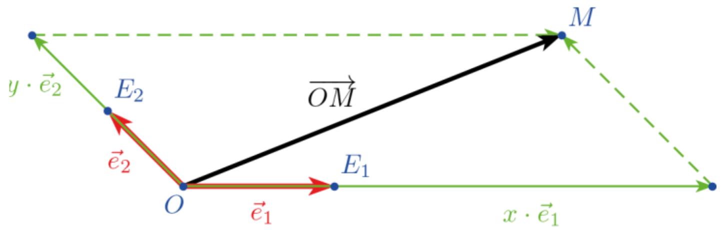
2.2.1 Coordonnées d'un point relativement à un repère

Soit $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ un repère du plan π. En utilisant la bijection définie ci-dessus, on peut maintenant déterminer la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Définition 15 : Les **coordonnées** x et y relativement à $\mathcal{R}$ d'un point M de π sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ relativement à la base associée $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$. On note $M(x; y)$.

$$\boxed{M(x; y) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OE_1} + y \cdot \overrightarrow{OE_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

x, la première coordonnée du point M, est appelée **abscisse** de M.
y, la deuxième coordonnée du point M, est appelée **ordonnées** de M.



Remarques : On peut associer un système d'axes de coordonnées à un repère du plan affine π.

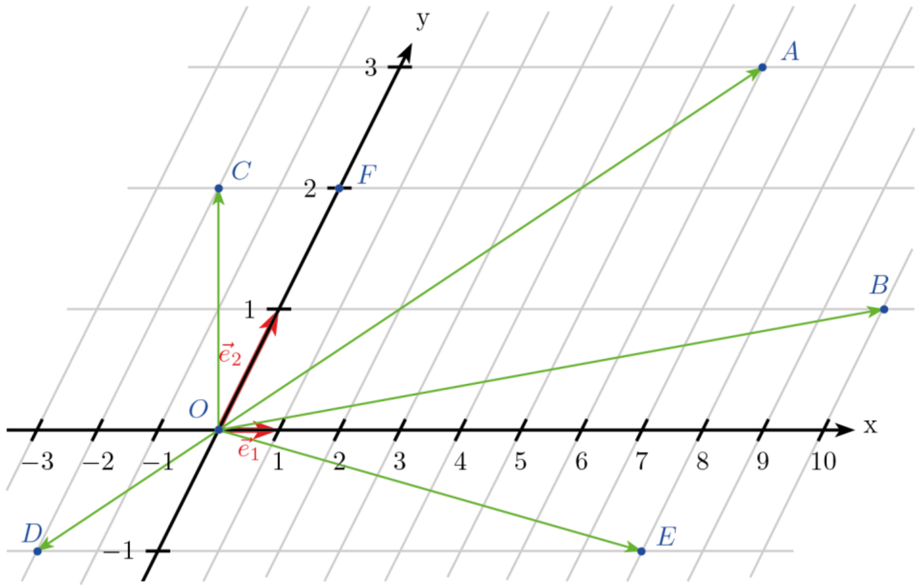
Le premier vecteur de la base associée, $\overrightarrow{e_1}$, donne la direction et le sens du premier axe de coordonnées ou axe des x. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\overrightarrow{e_1}$.

Le deuxième vecteur de la base associée, $\overrightarrow{e_2}$, donne la direction et le sens du deuxième axe de coordonnées ou axe des y. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\overrightarrow{e_2}$

Exemple

On donne ci-dessous un repère $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ du plan affine π, ainsi que les axes de coordonnées associés. Dans ce repère, les coordonnées des points représentées ci-dessous sont les suivantes :

$$A(6;3),\quad B(10;1),\quad C(-2;2),\quad D(-2;-1),\quad E(8;-1),\quad F(0;2)$$



2.3 Calculs avec les coordonnées

Dans un repère $(O;E_1;E_2)$ du plan affine π, on donne les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.

2.3.1 Composantes scalaires d'un vecteur

Comme nous avons vu précédemment que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\binom{x_B}{y_B}-\binom{x_A}{y_A}=\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}}$$

Exemple

Soient les points $A(2;-5)$ et $B(-4;7)$. On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4-2\\7-(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$$

2.3.2 Milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$, noté $M_{[AB]}$, sont :

$$\boxed{M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Les coordonnées du milieu du segment sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des extrémités du segment.

Démonstration :

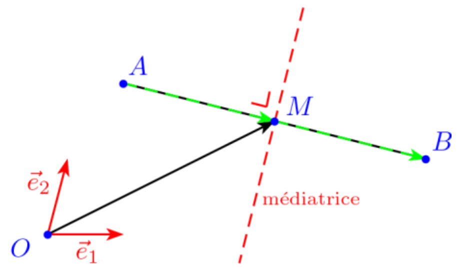
Soit $M_{[AB]}$, ou plus simplement M pour cette démonstration, le milieu du segment $[AB]$. Dans ce cas, les deux égalités suivantes sont vraies :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_B}{2}\\[2mm] \dfrac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix}$$



2.3.3 Centre de gravité d'un triangle

Les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, noté G, sont :

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des sommets du triangle.

Démonstration :

Nous admettrons ici que le centre de gravité d'un triangle est l'intersection des médianes. Dans le cours de géométrie, nous avons démontré que cette intersection se produit au 2/3 d'une médiane.

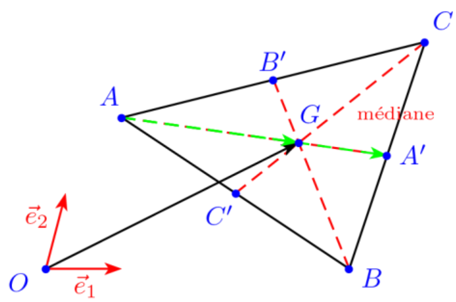
Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Dans ce cas, l'égalité suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

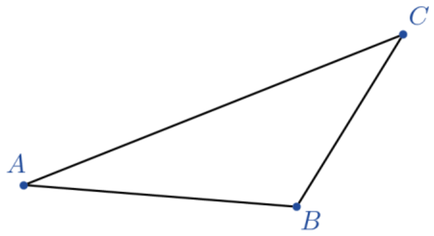
où A' est le milieu du segment $[BC]$. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix}$$



2.4 Exercices



Exercice 2.1 : On donne le triangle ABC.

Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$ e) $\vec{e} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) + 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$

Exercice 2.2 : Soient cinq points quelconques A, B, C, D et E. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$ d) $\vec{d} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ f) $\vec{f} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 2.3 : On donne trois points A, B et C non alignés.

Construire les points D, E, F et G tels que :

a) $\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

c) $3\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FC}$ d) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CG} - 3\overrightarrow{GA}$

Exercice 2.4 : On donne trois points A, B et C non alignés.

Soit le point G défini par la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Construire le point G.
b) Démontrer que pour tout point O : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Exercice 2.5 : On donne trois points A, B et C non alignés.

Construire les ensembles de points suivants :

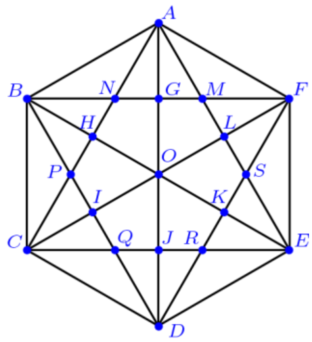
a) $E = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}$ b) $F = \{M \mid \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} + k \cdot \overrightarrow{AC}, k \in [-2;3[\,\}$

c) $G = \{M \mid 2\overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{CA}, k \in \mathbb{R}_+, m \in \{-1;4\}\}$

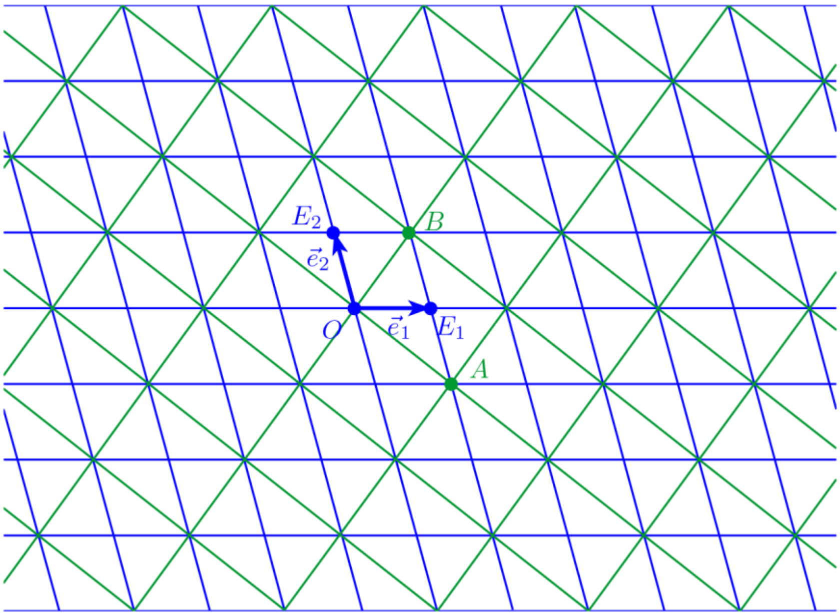
d) $H = \{M \mid \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} + k \cdot \overrightarrow{CA} - t \cdot \overrightarrow{BA}, k \in [-2;1], t \in [-1;4]\}$

Exercice 2.6 : Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R et S.

a) relativement au repère $\mathcal{R}_1(O; E; F)$.
b) relativement au repère $\mathcal{R}_2(O; A; C)$.



Exercice 2.7 : On considère la figure suivante :



a) Représenter les points dont les coordonnées sont données relativement au repère $\mathcal{R}_1(O; E_1; E_2)$:
$M(4;2)$, $N(-3;3)$, $P(-4;-4)$, $Q(2;3)$, $R(1-3)$, $S(0;-3)$, $T(5;0)$, $U(-1;-4)$, $V(-2;3)$

b) Trouver les coordonnées de ces points relativement au repère $\mathcal{R}_2(O; A; B)$.

c) Calculer les composantes, relativement à la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, des vecteurs :
$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{UP}$, $\overrightarrow{PS}$.

d) Calculer les coordonnées des points C et D tels que :
1) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NP}$ 2) $\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{AT} = 3\overrightarrow{DS} - 2\overrightarrow{US}$

Exercice 2.8 : ex 55, GE 3 Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(-4;3)$ et $B(-5;8)$
b) $A(-3;9)$ et $B(7;9)$
c) $A(3;-4)$ et $B(-4;3)$
d) $A(6;2)$ et $B(7;-8)$
e) $A(3;-4)$ et $B(-6;-8)$
f) $A(-5;-1)$ et $B(3;-9)$
g) $A(-8;3)$ et $B(2;-6)$
h) $A(-1;-2)$ et $B(-2;8)$
i) $A(-9;4)$ et $B(-2;-4)$

Exercice 2.9 : ex 52, GE 1 Déterminer les coordonnées du point milieu du segment $[AB]$.

a) $A(2;-3)$ et $B(5;7)$
b) $A(4;-9)$ et $B(8;-9)$
c) $A(-7;2)$ et $B(4;-3)$
d) $A(6;-2)$ et $B(7;-4)$
e) $A(-4;-3)$ et $B(-6;-2)$
f) $A(-11;12)$ et $B(-7;6)$
g) $A(8;-3)$ et $B(-12;6)$
h) $A(-2;3)$ et $B(7;7)$
i) $A(-5;-4)$ et $B(-7;3)$

Exercice 2.10 : Soit le triangle de sommets $A(-4;2)$, $B(1;3)$, et $C(2;5)$.

a) Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC.
b) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 2.11 : *ex 56, GE 4* Déterminer les coordonnées du point M qui vérifie les conditions suivantes :

a) $A(8;3)$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
b) $A(-4;7)$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
c) $A(-4;-5)$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
d) $A(-4;2)$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$
e) $A(-6;-7)$ et $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$
f) $A(4;-5)$ et $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2.12 : On donne un triangle ABC par deux sommets $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

Calculer les coordonnées du troisième sommet C.

Exercice 2.13 : Dans un repère du plan, on donne les points $A(2;3)$, $B(-3;1)$ et $C(8;-1)$.

a) Calculer les coordonnées d'un point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
b) Calculer les coordonnées du centre I de ce parallélogramme.
c) Déterminer le(s) point(s) de l'axe des ordonnées tel(s) que $ABEC$ soit un trapèze.

Exercice 2.14 : *ex 57, GE 4* Déterminer les coordonnées du point D du parallélogramme $ABCD$.

a) $A(-2;3)$, $B(8;9)$ et $C(-5;-4)$
b) $A(5;-6)$, $B(-3;8)$ et $C(5;-3)$
c) $A(3;5)$, $B(-4;5)$ et $C(5;-3)$
d) $A(1;2)$, $B(-8;6)$ et $C(-2;4)$
e) $A(7;-3)$, $B(5;0)$ et $C(6;-2)$
f) $A(5;-2)$, $B(-8;5)$ et $C(-4;3)$

Exercice 2.15 : Dans un repère du plan, dessiner les ensembles de points suivants :

a) $A = \{M(x;y) \mid x = 5\}$
b) $B = \{M(x;y) \mid |y| = 2\}$
c) $C = \{M(x;y) \mid x = 2y\}$
d) $D = \{M(x;y) \mid 2x + y = 6\}$

2.5 Solutions des exercices

Corrigé 2.2 :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{CE}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{DC}$ e) $\vec{e} = \overrightarrow{DA}$ f) $\vec{f} = \vec{0}$

Corrigé 2.6 :

a) $A(-1;1)$ $B(-1;0)$ $C(0;-1)$ $D(1;-1)$

$E(1;0)$ $F(0;1)$ $G\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$

$I\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ $J\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $K\left(\frac{1}{2};0\right)$ $L\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$M\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ $N\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ $O(0;0)$ $P\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$Q\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ $R\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ $S\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $A(1;0)$ $B(1;1)$ $C(0;1)$ $D(-1;0)$

$E(-1;-1)$ $F(0;-1)$ $G\left(\frac{1}{2};0\right)$ $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $J\left(-\frac{1}{2};0\right)$ $K\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $L\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

$M\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ $N\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ $O(0;0)$ $P\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

$Q\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ $R\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ $S\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Corrigé 2.7 :

b) $M(1;3)$ $N(-3;0)$ $P(0;-4)$ $Q\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

$R(2;-1)$ $S\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ $T\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ $U\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

$V\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ $W(1;0)$

c) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{UP} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

d) $C(3;-5)$ $D\left(-\frac{7}{2};-8\right)$

Corrigé 2.8 :

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-7\\7\end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-10\end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ g) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\-9\end{pmatrix}$ h) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$

i) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}7\\-8\end{pmatrix}$

Corrigé 2.9 :

a) $M\left(\frac{7}{2};2\right)$ b) $M(6;-9)$ c) $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ d) $M\left(\frac{13}{2};-3\right)$

e) $M\left(-5;-\frac{5}{2}\right)$ f) $M(-9;9)$ g) $M\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ h) $M\left(\frac{5}{2};5\right)$

i) $M\left(-6;-\frac{1}{2}\right)$

Corrigé 2.10 : a) $M_{[AB]} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ $M_{[AC]} = \left(-1; \frac{7}{2}\right)$ $M_{[BC]} = \left(\frac{3}{2}; 4\right)$

b) $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$

Corrigé 2.11 : a) $M(11; 7)$ b) $M(3; 15)$ c) $M(4; -1)$

d) $M(-8; 10)$ e) $M(-3; -1)$ f) $M(-1; -3)$

Corrigé 2.12 : $C(5; 7)$

Corrigé 2.13 : a) $D(13; 1)$

b) centre : $(5; 1)$

c) $E(0; -1)$ ou $E\left(0; -\frac{21}{5}\right)$

Corrigé 2.14 : a) $D(-15; -10)$ b) $D(13; -17)$ c) $D(12; -3)$

d) $D(7; 0)$ e) $D(8; -5)$ f) $D(9; -4)$

3 La droite

3.1 Définitions

À l'époque d'Euclide, on étudiait «les droites du plan » sans définir ni le mot « droite » ni le mot « plan », mais en établissant des relations (axiomes et postulats) qui devaient exister entre les objets « droites » et « plan » et en admettant intuitivement qu'une droite est la courbe de longueur minimale joignant deux points A et B du plan.

Nous allons donner dans ce chapitre une définition plus précise en décrivant une droite d comme un objet du plan affine π de **dimension 1**. En effet, nous pourrons la décrire à l'aide **d'un paramètre.**

Définition 16 : Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Définition 17 : Une **droite** d est un ensemble infini de points alignés. Il existe deux façons équivalentes de définir une droite :

a) en donnant deux points A et B quelconques de la droite ;

b) en donnant un point A de la droite et un vecteur $\vec{d}$ indiquant sa direction.

Si on donne deux points distincts A et B, la droite (AB) est l'ensemble des points M du plan π alignés avec A et B :

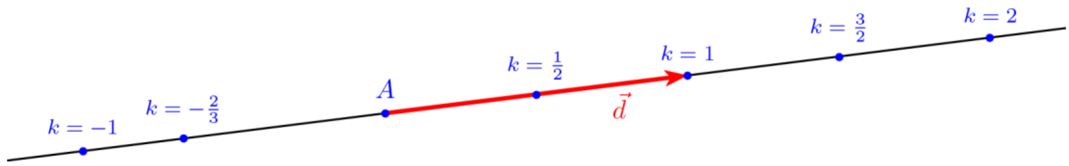
$$(AB) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB},\ \ k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB).

Si on donne un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul, la droite passant par A (appelé **point d'ancrage**) et de direction $\vec{d}$, notée $d(A; \vec{d})$, est l'ensemble des points M du plan π tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires :

$$d(A; \vec{d}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d},\ \ k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur $\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de la droite $d(A; \vec{d})$.



Remarques : À chaque valeur du nombre réel k correspond un unique point de la droite.
À chaque point de la droite correspond un unique nombre réel k.

3.2 Équations paramétriques d'une droite

Le plan π est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

Soit la droite d passant par le point $A(x_A; y_A)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$.

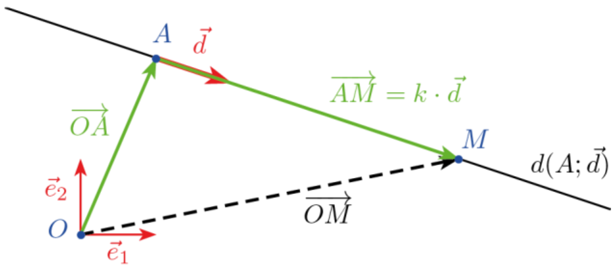
Par suite de ce que nous avons dit précédemment, un point $M(x; y)$ appartient à la droite d si et seulement s'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d}$ ou $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k \cdot \vec{d}$. Ainsi, pour tout point M de la droite d, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{d} \qquad ou \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}$$

où $k \in \mathbb{R}$. Cette équation est une **représentation paramétrique** de la droite d. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de d :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = x_A + k \cdot d_1 \\ y = y_A + k \cdot d_2 \end{cases}}$$

où $k \in \mathbb{R}$.



Ces équations peuvent être utilisées à de nombreuses fins. Voici un exemple permettant de donner les coordonnées d'un point sur la droite et de vérifier qu'un point appartient à cette droite.

Exemple

Soit les points $A(-3; 2)$ et $B(-1; 3)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques de la droite (AB).

1) *Un vecteur directeur de la droite (AB) :*

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) *Les équations paramétriques de (AB) sont :*

$$(AB) : \begin{cases} x = -3 + k \cdot 2 \\ y = 2 + k \cdot 1 \end{cases}$$

On peut maintenant donner des points appartenant à la droite (AB) en choisissant une valeur de k. Par exemple, pour $k = 5$, on obtient le point

$$C : \begin{cases} x = -3 + 5 \cdot 2 = 7 \\ y = 2 + 5 \cdot 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow C(7; 7)$$

Évidemment, un autre choix de k aurait abouti aux coordonnées d'un autre point.

De plus, on peut déterminer si un point appartient ou non à la droite (AB) en déterminant s'il existe une valeur unique de k tel que les équations paramétriques sont vérifiées pour les coordonnées du point. Par exemple, pour $D(-9;8)$, on a

$$D : \begin{cases} -9 = -3 + k \cdot 2 & \Rightarrow \quad k = -3 \\ 8 = 2 + k \cdot 1 & \Rightarrow \quad k = 6 \end{cases}$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

Exercice 3.1 : Représenter graphiquement, dans un repère du plan, les quatre droites suivantes, données par leurs équations paramétriques.

a) $a : \begin{cases} x = -4 + 4k \\ y = 5 - 3k \end{cases}$ b) $b : \begin{cases} x = -4 - 8k \\ y = 5 + 6k \end{cases}$

c) $c : \begin{cases} x = 8 + 4k \\ y = -4 - 3k \end{cases}$ d) $d : \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - \frac{3}{2}k \end{cases}$

Propriétés : Une même droite d possède plusieurs (une infinité) représentations paramétriques différentes. Chaque représentation possède les caractéristiques suivantes.

1. Le point d'ancrage A appartient à d. Il existe donc, pour chaque représentation paramétrique de d, une valeur du paramètre associée à A (0 pour la représentation dont A est le point d'ancrage et des valeurs différentes pour les autres représentations paramétriques).
2. Le vecteur directeur $\vec{d}$ est colinéaire à tous les vecteurs directeurs des autres représentations paramétriques.

3.3 Équation cartésienne d'une droite

Soit la droite d passant par le point d'ancrage $A(x_A; y_A)$ et admettant comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x;y)$ appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Or, ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $Det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{d}\right) = 0$, comme nous l'avons vu page 12. Ceci peut s'exprimer ainsi :

$$Det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{d}\right) = \begin{vmatrix} x - x_A & d_1 \\ y - y_A & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient successivement les équations

$$\begin{aligned} (x - x_A) \cdot d_2 - (y - y_A) \cdot d_1 &= 0 \\ d_2 \cdot x - d_1 \cdot y + (d_1 \cdot y_A - d_2 \cdot x_A) &= 0 \end{aligned}$$

En posant $d_2 = a$, $-d_1 = b$ et $(d_1 \cdot y_A - d_2 \cdot x_A) = c$, la relation ci-dessus s'écrit

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0}$$

où a, b et c sont trois nombres réels. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.

Si un point $P(x_P\,; y_P)$ appartient à la droite d, alors ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne. L'égalité $a \cdot x_P + b \cdot y_P + c = 0$ est vérifiée. Réciproquement, si les coordonnées $(x_P; y_P)$ d'un point P vérifient l'équation cartésienne de d, alors ce point appartient à la droite d.

Remarques : On peut également obtenir cette équation cartésienne en partant des équation paramétriques de la droite d. Il suffit en fait d'éliminer le paramètre k en combinant les deux équations du système d'équations paramétriques. On obtiendra alors une seule équation où n'apparaîtront plus que x et y. On passe ainsi d'un système d'équation à 3 inconnues et 2 équations à un système à 2 inconnues et 1 équation.

Propriétés : Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Comme $d_2 = a$ et $-d_1 = b$, le vecteur

$$\boxed{\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}$$

est un vecteur directeur de d.

Exemple

Soient les points $A(-5; 2)$ et $B(1; -3)$. Nous allons déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

1) *Un vecteur directeur de la droite (AB) :*

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient $a = -5$ et $-b = -6$. L'équation cartésienne partielle de (AB) est $-5x + 6y + c = 0$.

2) *Comme $A \in (AB)$, on peut déterminer c en résolvant l'équation*

$$(-5) \cdot (-5) + 6 \cdot 2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -37$$

L'équation cartésienne de (AB) est $-5x + 6y - 37 = 0$.

On peut maintenant donner des points appartenant à la droite (AB) en choisissant une valeur pour la première ou la deuxième coordonnée d'un point et en résolvant une équation. Pour $x = 5$, on obtient

$$(-5) \cdot 5 + 6 \cdot y - 37 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{31}{3}$$

Le point $C(5; \frac{31}{3})$ est donc un point de (AB).

De plus, on peut déterminer si un point appartient ou non à la droite (AB) en testant si les coordonnées du point vérifient l'équation cartésienne de la droite. Par exemple, pour le point $D(-2; 3)$, on a

$$\underbrace{(-5) \cdot (-2) + 6 \cdot 3 - 37}_{=-9} \neq 0$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

Exercice 3.2 : Quelle particularité possède la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, lorsque :

a) $a = 0$ b) $b = 0$ c) $c = 0$

Exercice 3.3 : Représenter graphiquement, dans un repère du plan, les quatre droites suivantes, données par leurs équations paramétriques.

a) $a : 3x + 4y - 8 = 0$ b) $b : -6x - 8y = -16$

c) $c : 12y = -9x + 24$ d) $d : y = -\frac{3}{4}x + 2$

Propriétés : Une même droite d possède plusieurs (une infinité) équations cartésiennes différentes.

Si $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ et $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ sont deux équations cartésiennes de la même droite d, alors les coefficients de ces deux équations sont proportionnels :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

3.4 Equation cartésienne résolue et pente

Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$.

Dans ce cas (comme $b \neq 0$), on peut expliciter y en transformant cette équation :

$$ax + by + c = 0 \quad \rightarrow \quad by = -ax - c \quad \rightarrow \quad y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$$

En posant $\frac{-a}{b} = m$ et $\frac{-c}{b} = h$, cette équation s'écrit

$$\boxed{y = mx + h}$$

Sous cette forme, l'équation cartésienne de d est dite **résolue**.

Définition 18 : Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Si la première composante scalaire de $\vec{d}$ est différente de zéro, $d_1 = -b \neq 0$, le rapport

$$\boxed{m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{-a}{b}}$$

est appelé **pente** (ou **coefficient directeur**) de la droite d.

Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, tels que $x_A \neq x_B$, la pente de d est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

En effet, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur possible de la droite.

En partant de cette égalité et en remplaçant le point B par un point $M(x;y)$ quelconque de la droite, on obtient une formule qui permet d'établir l'équation cartésienne d'une droite dont on connaît un point A et la pente m :

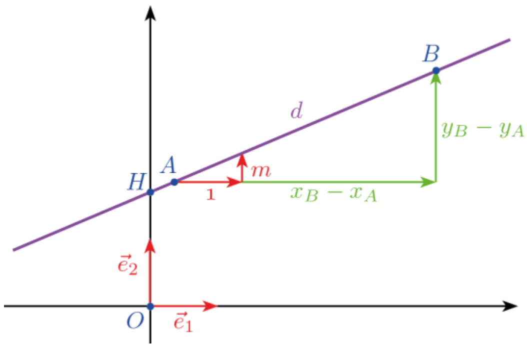
$$m = \frac{x - x_A}{y - y_A} \quad \rightarrow \quad y - y_A = m \cdot (x - x_A) \quad \rightarrow \quad \boxed{y = m \cdot (x - x_A) + y_A}$$

Interprétation géométrique

On peut interpréter la pente de deux manières « différentes » :

1. Par définition, la pente d'une droite d est donnée par la fraction
$$\frac{déplacement\ selon\ l'axe\ Oy}{déplacement\ selon\ l'axe\ Ox}$$
entre deux points de la droite d.
2. La pente est le déplacement selon l'axe Oy qui correspond à un déplacement de 1 selon l'axe Ox, sur la droite d.

Remarques : Soit la droite d d'équation cartésienne résolue $y = mx + h$.



1. La droite d passe par le point $H(0;h)$ (en effet : $h = m \cdot 0 + h$). Elle coupe l'axe Oy en h. On dit que h est l'ordonnée à l'origine de la droite d.
2. L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire $mx - y + h = 0$. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur
$$\boxed{\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}$$

Exemple

Soient les points $A(-5;2)$ et $B(1;-3)$. L'équation cartésienne de la droite (AB) est $-5x + 6y - 37 = 0$, selon l'exemple précédent.

L'équation cartésienne de (AB) peut s'écrire sous forme résolue :

$$-5x + 6y - 37 = 0 \quad \rightarrow \quad 6y = 5x + 37 \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{6}x + \frac{37}{6}$$

La pente de cette droite vaut donc :

$$m = \frac{5}{6} = \frac{-(-5)}{6} = \frac{-(-3-2)}{1-(-5)}$$

(AB) admet comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et comme ordonnée à l'origine le nombre $h = \frac{37}{6}$.

3.5 Position relative de deux droites dans le plan

Nous allons, dans cette partie, étudier les différentes positions relatives entre deux droites.

Exercice 3.4 :

a) Représenter graphiquement, dans un repère du plan, les quatre droites suivantes, données par leurs équations paramétriques.

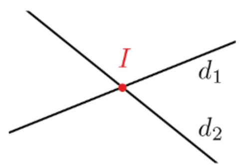
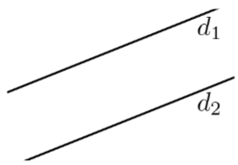
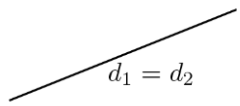
1) $a : x + 2y + 1 = 0$ 2) $b : -3x + 4y + 7 = 0$

3) $c : -2x - 4y - 5 = 0$ 4) $d : 6x + 12y + 6 = 0$

b) Déterminer graphiquement les points d'intersections entre la droite a et chacune des trois autres droites b, c et d.

À l'aide de cet exercice, on remarque que trois positions relatives sont possibles entre deux droites distinctes.

Ces positions sont données dans le tableau ci-dessous pour deux droites $d_1(A_1; \overrightarrow{d_1})$, d'équation cartésienne $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (avec $a_1, b_1 \neq 0$), et $d_2(A_2; \overrightarrow{d_2})$, d'équation cartésienne $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (avec $a_2, b_2, c_2 \neq 0$).

<table>
<tr><td rowspan="2">Positions relatives</td><td rowspan="2">Sécantes</td><td colspan="2">Paralléles</td></tr>
<tr><td>distinctes</td><td>confondues</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Représenations graphiques</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Un unique point I d'intersection</td><td>Aucun point d'intersection</td><td>Infinité de points d'intersection (droites)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Equations paramétriques</td><td>$\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ ne sont pas colinéaires</td><td colspan="2">$\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont colinéaires</td></tr>
<tr><td>$I \in d_1$ et $I \in d_2$</td><td>$A_1 \notin d_2$ et $A_2 \notin d_1$</td><td>$A_1 \in d_2$ et $A_2 \in d_1$</td></tr>
<tr><td>Equations cartésiennes</td><td>$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$</td><td>$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$</td><td>$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$</td></tr>
</table>

Remarques : Les droites d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement si les coefficients a et b sont proportionnels :

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

En transformant cette égalité, on obtient que deux droites sont parallèles si

$$\frac{-a_1}{b_1}=\frac{-a_2}{b_2} \quad \text{ou} \quad \boxed{m_1=m_2}$$

Deux droites parallèles ont la **même pente.**

3.5.2 Calcul du point d'intersection de deux droites sécantes

On donne ici des méthodes pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Droites sous formes paramétriques

On écrit les équations paramétriques des deux droites en désignant leurs paramètres par des lettres différentes.

En posant l'égalité des coordonnées de même rang (égalité des abscisses x et des ordonnées y), on obtient un système de deux équations à deux inconnues (les paramètres).

On résout ce système.

Si celui-ci admet une solution unique, les droites sont sécantes et on obtient le point d'intersection en injectant la valeur obtenue d'un des paramètres dans les équations de la droite correspondante.

Droites sous formes cartésiennes

Un point $I(x;y)$ appartient à deux droites d_1 et d_2 si et seulement si ses coordonnées x et y vérifient les équations cartésiennes de d_1 et d_2.

On obtient donc les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 en résolvant le système de deux équations à deux inconnues formé par les équations cartésiennes de d_1 et d_2. Attention donc à bien choisir une lettre différente pour le paramètre de chacune des droites afin que le nombre d'inconnues soit bien de deux.

Exemple

Nous allons déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection des droites d_1 et d_2, données tout d'abord sous forme paramétrique puis données sous forme cartésienne.

$$d_1 : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 2 + k \end{cases} \quad \textit{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 6 + s \\ y = -1 - s \end{cases}$$

ou

$$d_1 : x-2y+7=0 \quad \textit{et} \quad d_2 : x+y-5=0$$

Sous forme paramétrique

On pose le système suivant d'équations

$$\begin{cases} -3+2k &= 6+s \\ 2+k &= -1-s \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut isoler s *dans la prmière équation et trouver* $s = -9+2k$*. En injectant ceci dans la deuxième équation, on trouve*

$$2+k=-1-(-9+2k) \quad \rightarrow \quad 2+k=8-2k \quad \rightarrow \quad 3k=6 \quad \rightarrow \quad k=2$$

On obtient alors $s=-9+2\cdot 2=-5$.

Maintenant, pour trouver le point I *d'intersection, on utilise les équations paramétriques d'une des deux droites et la valeur du paramètre associé.*

$$I : \begin{cases} x &= -3+2\cdot 2 &= 1 \\ y &= 2+2\cdot 1 &= 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;4)$$

Sous forme cartésienne

On pose le système suivant d'équations

$$\begin{cases} x-2y+7 &= 0 \\ x+y-5 &= 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut soustraire ces deux équations et trouver la nouvelle équation $-3y+12=0$*. On en tire immédiatement que* $y=4$*. En introduisant cette valeur dans la première équation, on trouve*

$$x-2\cdot 4+7=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

Le point d'intersection des droites d_1 *et* d_2 *est* $I(1;4)$.

Remarques : Pour déterminer le point d'intersection de deux droites sous forme paramétriques, il faut faire attention de bien choisir des lettres pour le paramètre de chacune des deux droites.

Si on avait commis l'erreur de choisir k comme paramètre des équations des droites d_1 et d_2 de l'exemple ci-dessus, on aurait obtenu le système d'équations, en posant l'égalité des abscisses et des ordonnées pour les deux droites :

$$\begin{cases} -3+2k &= 6+k \\ 2+k &= -1-k \end{cases}$$

Ce système ne possède pas de solution ($k=9$ pour la première équation et $k=-\frac{3}{2}$ pour la seconde équation), alors que les deux droites possèdent bien un point d'intersection. Il n'a pas de sens au niveau de la recherche du point d'intersection des deux droites.

3.6 Exercices

Exercice 3.5 : Les points A, B et C donnés ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(2;3)$, $B(1;6)$, $C(4;-3)$
b) $A(1;-1)$, $B(3;1)$, $C(-2;3)$
c) $A(-56;84)$, $B(16;-24)$, $C(-8;12)$

Exercice 3.6 : On donne une droite d par ses équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x & = & 1 + k \cdot 3 \\ y & = & 3 + k \cdot (-2) \end{cases}$$

Représenter les points de d correspondant aux valeurs suivantes du paramètre k : $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Exercice 3.7 : Soit la droite d passant par le point $A(5;4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{3}{2}$.

a) Calculer les coordonnées de trois autres points B, C et D de la droite d.
b) Par calcul, déterminer si les points $E(101;70)$ et $F(-40;-26)$ appartiennent à d.
c) Construire la droite d.

Exercice 3.8 : Soit la droite d d'équations paramétriques : $\begin{cases} x & = & 2 - 3t \\ y & = & -4 + t \end{cases}$.

a) Déterminer deux points A et B situés sur la droite d.
b) Les points $C(1;-1)$, $D(0;0)$, $E(5;-5)$ et $F(-139;43)$ sont-ils sur la droite d ?
c) Déterminer sur la droite d le point K d'abscisse -3.
d) Déterminer sur la droite d le point L d'ordonnée 4.
e) Déterminer sur la droite d le point N dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.
f) Donner deux autres représentations paramétriques de la droite d.

Exercice 3.9 : Trouver une représentation paramétrique de la droite :

a) qui passe par $A(3;5)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{d} = \binom{-4}{1}$.
b) qui passe par $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$.
c) qui passe par $A(2;-4)$ et qui a pour pente $m = -\frac{3}{4}$.
d) qui passe par $A(5;2)$ et qui est parallèle au segment $[BC]$, où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$.
e) Qui passe par $A(0;-2)$ et qui est parallèle à l'axe Ox.
f) Qui passe par $A(8;12)$et qui est parallèle à l'axe Oy.

Exercice 3.10 : On donne le triangle ABC de sommets $A(-4;1)$, $B(2;-3)$ et $C(5;4)$.

a) Déterminer les équations paramétriques de la médiane passant par le sommet A.
b) Déterminer les équations paramétriques de la droite d passant par A et parallèle à l'axe Oy.
c) Déterminer les équations paramétriques de la droite g passant par B et parallèle à (AC).

Exercice 3.11 : Soit la droite d donnée par la représentation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Représenter la droite d
b) Colorer en rouge les points pour lesquels $k \in [-1; 2[$.
c) Colorer en bleu les points pour lesquels $k \geq 3$.

Exercice 3.12 : Trouver quelques points situés sur chacune des droites suivantes, données par leurs équations cartésiennes. Représenter ces droites.

a) $x + 2y - 12 = 0$
b) $3x - 5y + 15 = 0$
c) $4x - 3y = 0$
d) $y - 4 = 0$
e) $2x + 7 = 0$
f) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3}$

Exercice 3.13 : Soit la droite d donnée par la représentation paramétrique $\begin{cases} x & = & 7 - 2t \\ y & = & -3 + 5t \end{cases}$. Écrire une représentation cartésienne de cette droite.

Exercice 3.14 : Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites données à l'exercice 3.9.

Exercice 3.15 : Soit la droite passant par les points $A(1; 4)$ et$B(3; -2)$.

a) Donner une représentation cartésienne de la droite (AB).
b) Donner une autre équation cartésienne de la droite (AB).
c) Existe-t-il une équation cartésienne de la droite (AB) qui contienne le terme $7x$?
d) Déterminer deux points C et D situés sur cette droite.
e) Les points $E(0; 0)$, $F(2; 1)$, $G(5; 8)$ et $H\left(\frac{5}{7}; \frac{34}{7}\right)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?
f) Déterminer sur la droite (AB) le point J d'abscisse -12.
g) Déterminer sur la droite (AB) le point K d'ordonnée 555.
h) Déterminer sur la droite (AB) le point L dont l'ordonnée vaut quatre de plus que l'abscisse.

Exercice 3.16 : Soit la droite $d : 3x + 2y - 5 = 0$

a) Donner un vecteur directeur de la droite d.
b) Déterminer le vecteur directeur de la droite d ayant pour première composante 7.

Exercice 3.17 : Soit la droite $d :\ 2x - 3y + 6 = 0$

a) Écrire l'équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par l'origine.
b) Écrire l'équation cartésienne de la droite d'' parallèle à d et passant par le point $A(-4; 1)$.

Exercice 3.18 : Soit le point $A(5; -2)$.

a) Écrire l'équation de la droite d parallèle à l'axe des x et passant par le point A.
b) Écrire l'équation de la droite d parallèle à l'axe des y et passant par le point A.

Exercice 3.19 : Représenter dans un même repère les droites :

a) $y = 2x - 5$ $\quad y = 2x$ $\quad y = 2x + 4$

b) $y = -x + 2$ $\quad y = \frac{3}{5}x + 2$ $\quad y = 4x + 2$

Exercice 3.20 : Représenter, dans un même repère, les droites passant par $A(2; 5)$ et de pente :

a) $m = -2$ b) $m = -\frac{8}{3}$ c) $m = 0$ d) $m = \frac{9}{5}$ e) $m = 2$

Exercice 3.21 : Écrire l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1; 6)$ et de pente $m = 4$.

Exercice 3.22 : Soit la droite passant par les points $A(3; -5)$ et $B(-1; -2)$.

Calculer sa pente et son ordonnée à l'origine.

Exercice 3.23 : Soit la droite $d : y = -3x + 7$.

Écrire un vecteur directeur de la droite d.

Exercice 3.24 : Déterminer, lorsque cela est possible, l'équation cartésienne résolue de chacune des droites données à l'exercice 3.9.

Exercice 3.25 : Soit la droite $d : y = -5x + 2$

Écrire l'équation cartésienne résolue de la droite d' parallèle à d et passant par $A(3; -4)$.

Exercice 3.26 : On donne les points $A(1; -2)$, $B(-5; 2)$, $C(-4; 1)$, $D(1; -1)$ et $E(50; -26)$.

a) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
b) Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?

Exercice 3.27 : Indiquer les positions relatives des droites d et e (sécantes avec le point d'intersection, strictement parallèles u confondues) dans les cas suivants :

a) $d : 4x - 2y - 1 = 0$ $\qquad e : -2x + y - 5 = 0$

b) $d : 3x + y - 8 = 0$ $\qquad e : 6x - 2y - 3 = 0$

c) $d : 8x - 4y - 2 = 0$ $\qquad e : -4x + 2y + 1 = 0$

d) $d : -x + 2y - 3 = 0$ $\qquad e : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$

e) $d : 3x + 2y - 7 = 0$ $\qquad e : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 - 3k \end{cases}$

f) $d : 6x + y - 9 = 0$ $\qquad e : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$

g) $d : \begin{cases} x = 7 + k \\ y = 8 - k \end{cases}$ $\qquad e : \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 10 + 3t \end{cases}$

h) $d : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = k \end{cases}$ $\qquad e : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

i) $d : \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$ $\qquad e : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

Exercice 3.28 : *ex 75, GE 16* Déterminer le point d'intersection des droites d et e dans les cas suivants :

a) $d : \begin{cases} x = -5+3k \\ y = -4+k \end{cases}$ $e : \begin{cases} x = -8+4t \\ y = -5-3t \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 3-3k \\ y = -2-k \end{cases}$ $e : \begin{cases} x = 7+4t \\ y = -8+5t \end{cases}$

c) $d : \begin{cases} x = -3+3k \\ y = -5+2k \end{cases}$ $e : \begin{cases} x = -3-2t \\ y = -12+t \end{cases}$

d) $d : \begin{cases} x = 1-4k \\ y = 2-k \end{cases}$ $e : \begin{cases} x = 8-t \\ y = 12-3t \end{cases}$

e) $d : 5x-4y+23=0$ $e : \begin{cases} x = -3+2k \\ y = -5-k \end{cases}$

f) $d : 7x-13y+106=0$ $e : \begin{cases} x = -3+7k \\ y = 1+k \end{cases}$

g) $d : x+9y-41=0$ $e : \begin{cases} x = -3+4k \\ y = 2+k \end{cases}$

h) $d : -2x+7y-43=0$ $e : \begin{cases} x = -1+k \\ y = -1+2k \end{cases}$

i) $d : 4x-7y-3=0$ $e : -3x+13y-52=0$

j) $d : x+4y+5=0$ $e : 7x+16y-31=0$

k) $d : 3x+4y-1=0$ $e : 5x+2y-25=0$

l) $d : 5x-2y+11=0$ $e : 9x-8y-11=0$

Exercice 3.29 : On donne les droites $d : 2x+7y+13=0$ et $g : 5x+by+c=0$.

a) Calculer b et c tels que les droites d et g soient confondues.
b) Calculer b et c tels que les droites d et g soient strictement parallèles.

Exercice 3.30 : Soit la droite d passant par les points $A(45;-206)$ et $B(712;4)$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées. *Travailler sous forme paramétrique.*

Exercice 3.31 : Soit la droite $d : 9x-7y-4=0$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées.

Exercice 3.32 : On donne les quatre points $A(1;5)$, $B(13;-1)$, $C(8;4)$ et $D(-2;-4)$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD). *Travailler sous forme paramétrique.*

Exercice 3.33 : On donne le quadrilatère $ABCD$ par ses sommets : $A(-5;-3)$, $B(12;-1)$, $C(9;4)$ et $D(-2;6)$.

Calculer les coordonnées du point E tel que E est sur la diagonale (BD) et la quadrilatère $ABCE$ est un trapèze. *Travailler sous forme paramétrique.*

Exercice 3.34 : On donne le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A(-2;3)$, $B(8;-1)$, $C(10;3)$ et $D(1;9)$.

a) Ce quadrilatère est-il un trapèze ?
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère. *Travailler sous forme cartésienne.*

Exercice 3.35 : Un parallélogramme $ABCD$ est donné par un de ses sommets, $A(3;-1)$, et les droites support de deux de ses côtés : $2x+3y-5=0$ et $x-4y+14=0$.

Calculer les coordonnées des sommets B, C et D, ainsi que celles du point d'intersection I des diagonales.

Exercice 3.36 : On donne les milieux des côtés d'un triangle : $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$.

Déterminer les coordonnées des sommets du triangle. *Travailler sous forme cartésienne.*

Exercice 3.37 : Soit le triangle ABC de sommets $A(3;1)$, $B(-2;5)$ et $C(5;-3)$.

a) Établir une équation cartésienne de chaque médiane.
b) Vérifier que les trois médianes sont concourantes.

Exercice 3.38 : Soit la droite $d : 2x-3y+4=0$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite image de d par :

a) la translation t de vecteur $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$.
b) la symétrie s de centre $A(-2;4)$.
c) l'homothétie h de centre A et de rapport $k=-\frac{1}{3}$.

Exercice 3.39 : Représenter l'ensemble E des points $M(x;y)$ tels que $3x-4y+2>0$.

Exercice 3.40 : Représenter graphiquement l'ensemble E des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} x-y+4 & < & 0 \\ 2x+y-1 & \geq & 0 \end{cases}$.

Exercice 3.41 : Écrire un système d'inéquation à deux variables tel que l'ensemble des solutions soit l'intérieur strict du triangle de sommet $A(3;1)$, $B(7;0)$ et $C(1;-3)$.

3.7 Solutions des exercices

Corrigé 3.2 : a) La droite est parallèle à (OI) b) La droite est parallèle à (OJ)

c) La droite passe par l'origine

Corrigé3.4 : b) Avec b : $I_1(1;-1)$, avec c : $I_2(0{,}4;-1{,}45)$,

Avec d : une infinité de points d'intersection

Corrigé 3.5 : a) oui b) non c) oui

Corrigé 3.7 : b) E : non F : oui

Corrigé 3.8 : a) $A(2;-4)$, $B(-1;-3)$ par exemple

b) C : non, D : non, E : oui, F : oui

c) $K(-3;-\frac{7}{3})$

d) $L(-22;4)$

e) $N(-4;-2)$

Corrigé 3.9 : a) $\begin{cases} x &= 3-4k \\ y &= 5+k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x &= -3+7k \\ y &= -2-3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x &= 2-4k \\ y &= -4+3k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x &= 5-4k \\ y &= 2+k \end{cases}$

e) $\begin{cases} x &= k \\ y &= -2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x &= 8 \\ y &= 12+k \end{cases}$

Corrigé 3.10 : a) m : $\begin{cases} x &= -4+15t \\ y &= 1-t \end{cases}$ b) d : $\begin{cases} x &= -4 \\ y &= 1+s \end{cases}$

c) g : $\begin{cases} x &= 2+3u \\ y &= -3+u \end{cases}$

Corrigé 3.13 : d : $5x+2y-29=0$ par exemple

Corrigé 3.14 : a) $x+4y-23=0$ b) $3x+7y+23=0$

c) $3x+4y+10=0$ d) $x+4y-13=0$

e) $y+2=0$ f) $x-8=0$

Corrigé 3.15 : a) $3x+y-7=0$ par exemple

b) $21x+3y-49=0$ par exemple

c) Oui : $7x+\frac{7}{3}y-\frac{49}{3}=0$

d) $C(0;7)$, $D\left(\frac{7}{3};0\right)$ par exemple

e) E : non, F : oui, G : non H : oui

f) $J(-12;43)$

g) $K\left(-\frac{548}{3};555\right)$

h) $L\left(\frac{3}{4};\frac{19}{4}\right)$

Corrigé 3.16 : a) $\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ par exemple b) $\vec{d'}=\begin{pmatrix}7\\-\frac{21}{2}\end{pmatrix}$

Corrigé 3.17 : a) $d':2x-3y=0$ b) $d'':2x-3y+11=0$

Corrigé 3.18 : a) $y-2=0$ b) $x-5=0$

Corrigé 3.21 : $y=4x+10$

Corrigé 3.22 : Pente : $-\frac{3}{4}$ Ordonnée à l'origine : $-\frac{11}{4}$

Corrigé 3.23 : $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Corrigé 3.24 : a) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{23}{4}$ b) $y=-\frac{3}{7}x-\frac{23}{7}$

c) $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$ d) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$

e) $y=-2$ f) impossible

Corrigé 3.25 : $d':y=-5x+11$

Corrigé 3.26 : a) Non b) Oui

Corrigé 3.27 : a) strictement parallèles b) sécantes : $I\left(\frac{19}{12};\frac{13}{4}\right)$ c) confondues

d) confondues e) strictement parallèles f) sécantes : $I(1;3)$

g) confondues h) strictement parallèles i) sécantes : $I\left(\frac{4}{19};\frac{67}{19}\right)$

Corrigé 3.28 : a) $I(-8;-5)$ b) $I(15;2)$ c) $I(-9;-9)$ d) $I(5;3)$

e) $I(-7;-3)$ f) $I(-17;-1)$ g) $I(5;4)$ h) $I(3;7)$

i) $I(13;7)$ j) $I(7;-3)$ k) $I(7;-5)$ l) $I(-5;-7)$

Corrigé 3.29 : a) $b=\frac{35}{2}$ et $c=\frac{65}{2}$ b) $b=\frac{35}{2}$ et $c\neq\frac{35}{2}$

Corrigé 3.30 : Axe des x : $(699{,}3;0)$, axe des y : $(0;-220{,}2)$

Corrigé 3.31 : Axe des x : $\left(\frac{4}{9};0\right)$ axe des y : $(0;-\frac{4}{7})$

Corrigé 3.32 : $I\left(\frac{79}{13};\frac{32}{13}\right)$

Corrigé 3.33 : $E_1\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$ et $E_2(-14;12)$

Corrigé 3.34 : a) Oui b) $I\left(\frac{26}{5};3\right)$

Corrigé 3.35 : $B\left(\frac{41}{11};-\frac{9}{11}\right)$ $C(-2;3)$ $D\left(-\frac{30}{11};\frac{31}{11}\right)$ $I\left(\frac{1}{2};1\right)$

Corrigé 3.36 : Sommets : $(-5;7)$ $(3;1)$ $(1;-3)$

Corrigé 3.37 : a) $x+y-3=0$ $4x+3y-11=0$ $y-1=0$

b) $I(2;1)$

Corrigé 3.38 : a) $2x-3y-16=0$ b) $2x-3y+28=0$ c) $2x-3y+20=0$

Corrigé 3.41 : $\begin{cases} 2x-3y-5 & > & 0 \\ x+4y-7 & < & 0 \\ x-2y-7 & < & 0 \end{cases}$

Table des matières