Géométrie vectorielle et analytique plane

Chapitre 1

Produit scalaire

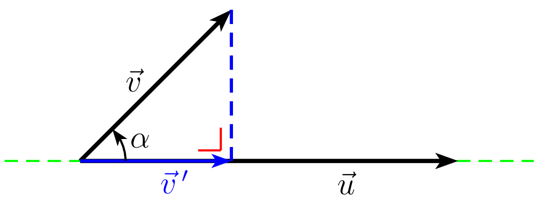
1.1 Définitions produit scalaire et norme

Le produit scalaire est une notion importante en géométrie pour traiter des questions de longueurs, angles et orthogonalité, ainsi qu'en physique où elle permet d'exprimer plusieurs grandeurs physiques, notamment le travail d'une force lors d'un déplacement. A deux vecteurs, il associe leur produit, qui est un *nombre* (ou un *scalaire*, d'où son nom).

Définition 1.1
On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit de la mesure algébrique (avec signe) $\bar{u}$ de $\vec{u}$ et de la mesure algébrique $\bar{v}'$ de la projection orthogonale, $\vec{v}\,'$, de $\vec{v}$ sur une droite de direction $\vec{u}$.

On note le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}'}$$



Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Commutativité : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
2. Bilinéarité : $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
3. Produit par un nombre réel : $(\lambda \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})$
4. Positivité : $\vec{u} \bullet \vec{u} \geqslant 0$
5. Vecteur nul : $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Définition 1.2
On appelle **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, la racine carrée du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{u}$. La norme

de $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}}$$

Remarque

La **norme** d'un vecteur est synonyme de la **longueur** de chacune des flèches représentant ce vecteur.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le nombre réel λ, on a :

1. Positivité : $\|\vec{u}\| \geqslant 0$
2. Vecteur nul : $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
3. Produit par un nombre réel : $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$
4. Inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

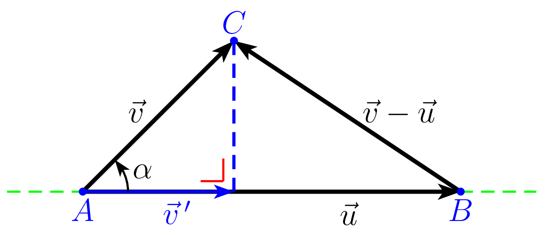
Proposition 1.1

Si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$ (α est l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{v}$), on a

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

On appelle cette égalité l'**expression géométrique** du produit scalaire.

Démonstration. Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$. Pour le triangle ABC, les longueurs des côtés sont données par $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$.



Le théorème du cosinus affirme que

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

Nous pouvons utiliser la définition de la norme pour écrire cette égalité en terme de produits scalaires

$$(\vec{v} - \vec{u}) \bullet (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Le membre de gauche de cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(\vec{v} - \vec{u}) \bullet (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) - \vec{u} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) \\
&= \vec{v} \bullet \vec{v} - \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{u} \\
&= \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} - 2 \cdot \vec{u} \bullet \vec{v}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'égalité

$$\vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} - 2 \cdot \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

qui peut s'écrire, après simplifications,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Il est également possible de démontrer cette égalité en partant du fait que la mesure algébrique de $\vec{v}'$ est donnée par $\overline{v'} = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$. □

Définition 1.3
On appelle vecteur **unitaire** un vecteur de norme 1.

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur unitaire} \Longleftrightarrow \|\vec{u}\| = 1}$$

Proposition 1.2
Si $\vec{v} \neq 0$, les vecteurs unitaires de même direction que $\vec{v}$ sont

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

1.2 Orthogonalité

1.2.1 Vecteurs orthogonaux et droites perpendiculaires

Définition 1.4
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

Remarques

1. Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs $\vec{v}$, car $\vec{0} \bullet \vec{v} = 0$.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul, sans que l'un des vecteurs soit nul.

Définition 1.5
Les droites d et g de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont **perpendiculaires** si les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{d} \bullet \vec{g} = 0$.

Remarque

Deux droites perpendiculaires sont nécessairement sécantes.

Définition 1.6
On appelle **vecteur normal** à une droite d tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

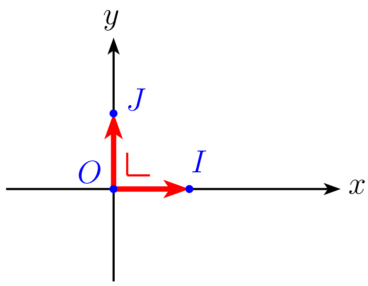
1.2.2 Repère orthonormé

Définition 1.7
Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbf{V}_2$ est dite **orthonormée** si

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \\ \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \end{cases}$$

Un repère $(O; I; J)$ de π est dit **orthonormé** si

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1 \\ \overrightarrow{OI} \bullet \overrightarrow{OJ} = 0 \end{cases}$$



Remarque

Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases de $\mathbf{V}_2$ comme étant orthonormées et les repères de π comme étant également orthonormés.

1.2.3 Expression analytique du produit scalaire

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 1.3
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}$$

Démonstration. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (en utilisant les propriétés du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}) \bullet (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}) \\ &= u_1 v_1 \cdot \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{i}}_{=1} + u_2 v_2 \cdot \underbrace{\vec{j} \bullet \vec{j}}_{=1} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \bullet \vec{j}}_{=0} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

□

1.2.4 Expression analytique de la norme

On considère le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ donné en composantes dans une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 1.4
La **norme** du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

1.2.5 Vecteur normal à une droite

Proposition 1.5
La droite d'équation cartésienne $p : ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme **vecteur normal**.

Démonstration. Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite d'équation cartésienne $d : ax+by+c = 0$. Nous allons montrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = a \cdot (x_B - x_A) + b \cdot (y_B - y_A) \\ &= \underbrace{(ax_B + by_B)}_{=-c,\text{ car } B \in d} - \underbrace{(ax_A + by_A)}_{=-c,\text{ car } A \in d} = 0 \end{aligned}$$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs formés à partir de deux points de la droite d, $\vec{n}$ est normal à d. □

Remarque

Une droite peut être déterminée par **un point et un vecteur normal**.

Exemple

Nous allons déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; -1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(3; -4)$ et $C(2; 4)$.

1. *Un vecteur normal de la droite d est :*

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   L'équation cartésienne partielle de d est $-x + 8y + c = 0$

2. *Comme $A \in d$, on peut déterminer d en résolvant l'équation*

$$(-1) \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 11$$

   L'équation cartésienne de d est : $-x + 8y + 11 = 0$

1.2.6 Pentes de droites perpendiculaires

Proposition 1.6
Deux droites de pentes m et m' non nulles sont perpendiculaires si le produit de leur pentes vaut -1.

$$\boxed{m \cdot m' = -1} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

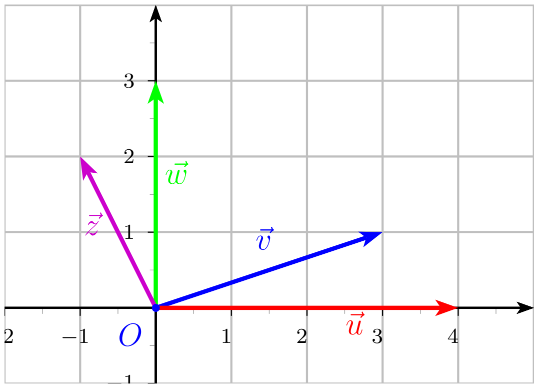
Démonstration. Soient deux droites d et d' perpendiculaires, de pentes respectives m et m' non nulles. Ces droites admettent donc les vecteurs directeurs $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{d'} = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs directeurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{d} \bullet \vec{d'} = 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 0$ ou $m \cdot m' = -1$. □

1.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de $\mathbf{V}_2$ associée.

1) On donne ci-dessous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$.



Calculer les produits scalaires suivants tout d'abord sans utiliser les composantes scalaires des vecteurs (travail à partir de la définition du produit scalaire), puis en les utilisant.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ b) $\vec{u} \bullet \vec{w}$ c) $\vec{u} \bullet \vec{z}$ d) $\vec{u} \bullet \vec{u}$

e) $\vec{w} \bullet \vec{v}$ f) $\vec{w} \bullet \vec{z}$ g) $\vec{v} \bullet \vec{v}$ h) $\vec{v} \bullet \vec{u}$

i) $\vec{v} \bullet \vec{w}$ j) $\vec{v} \bullet \vec{z}$

2) L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

avec $\vec{a} \neq \vec{0}$.

3) Soit un rectangle $ABCD$ dont les côtés $[AB]$ et $[BC]$ mesurent respectivement 10 et 4. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

Calculer les produits scalaires suivants tout d'abord sans utiliser les composantes scalaires des vecteurs (travail à partir de la définition du produit scalaire), puis en les utilisant.

a) $\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{JI} \bullet \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BA}$

e) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AA}$ f) $\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{AC}$ g) $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{BD}$ h) $\overrightarrow{JI} \bullet \overrightarrow{DB}$

4) Dans le plan, on donne un triangle ABC quelconque.

Construire les ensembles de points suivants :

a) $E = \{M \mid \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AM} = 0\}$ b) $F = \{M \mid \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}\}$

c) $G = \{M \mid \overrightarrow{BM} \bullet \overrightarrow{CA} > 0\}$ d) $H = \{M \mid \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0\}$

5) Démontrer les implications suivantes et en donner une interprétation géométrique.

   a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$

   b) $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

6) On donne les cinq vecteurs suivants : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}, \vec{b} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

   a) Calculer

      a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ b) $\vec{u} \bullet \vec{w}$ c) $\vec{u} \bullet \vec{u}$

      d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w})$ e) $\vec{a} \bullet \vec{b}$ f) $\vec{u} \bullet \vec{a}$

   b) Comparer $(\vec{u} \bullet \vec{v})^2$ et $(\vec{u} \bullet \vec{u}) \cdot (\vec{v} \bullet \vec{v})$

   c) Calculer

      a) $||\vec{u}||$ b) $||\vec{v}||$ c) $||\vec{w}||$

      d) $||-\vec{u}||$ e) $||\vec{u} + \vec{v}||$ f) $||\vec{a}||$

7) Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer un vecteur unité $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$.

   b) Déterminer un vecteur $\vec{w}$ de norme 4 colinéaire à $\vec{u}$.

8) Calculer les composantes scalaires d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et de norme $\dfrac{13}{2}$.

9) Soit le triangle de sommets $A(4; -6)$, $B(9; 9)$ et $C(-1; 4)$.

   a) Vérifier, par calcul, que ce triangle est isocèle.

   b) Vérifier, par calcul, que ce triangle est rectangle.

   c) Calculer l'aire de ce triangle.

10) Un triangle ABC est tel que $a = 3$, $c = 2$, $\beta = 135°$.
    Calculer : $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}$.

11) Un triangle ABC a pour côtés $a = 12$, $b = 9$ et $c = 7$.
    Calculer $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{BC}$.

12) On donne les points $A(2; 1)$ et $B(3; -5)$.

    a) Déterminer les sommets C et D d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté.

    b) Déterminer les sommets P et Q d'un carré $APBQ$ dont $[AB]$ est une diagonale.

13) On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$.

Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle ? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

14) On donne les points $A(0;0)$ et $C(6,6)$.

Trouver deux points B et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange dont la diagonale $[BD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AC]$.

15) Décomposez $\vec{v}$ en deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, où $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{w}$.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Que peut-on remarquer en comparant les composantes scalaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

16) Écrire l'équation de la droite d passant par le point $A(-5;-3)$ et perpendiculaire à la droite g d'équation $5x + 4y - 20 = 0$.

17) Soit le triangle ABC de sommets $A(2;-1)$, $B(4;7)$ et $C(-2;1)$.

Écrire l'équation de la hauteur passant par le sommet A.

18) On donne les équations de deux côtés d'un rectangle $2x-y+11 = 0$ et $2x-y+1 = 0$, ainsi que l'équation de l'une de ses diagonales $y = 3$.

Trouver les sommets de ce rectangle.

19) Soient la droite d d'équation $x - 2y - 4 = 0$ et le point $A(3;5)$.

Déterminer la projection orthogonale du point A sur la droite d.

20) Soient les points $A(-2;1)$, $B(1;\frac{5}{2})$ et $C(1;-1)$

Déterminer le point M de la droite (OC) dont la projection orthogonale sur la droite (AB) est le point $M'(0;2)$.

21) Soient la droite d d'équation $3x - 4y - 8 = 0$ et le point $A(1;5)$.

Calculer les coordonnées du point symétrique du point A par rapport à la droite d.

1.4 Solutions des exercices

1) a) 12 b) 0 c) -4 d) 16
e) 3 f) 6 g) 10 h) 12
i) 3 j) -1

2) L'implication est fausse.

3) a) 0 b) 50 c) -50 d) -100
e) 0 f) 66 g) -42 h) -42

6) a) a) 5 b) -2 c) 13
d) 3 e) -20 f) 8
c) a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{17}$ c) 1
d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{40}$ f) $\sqrt{20}$

7) a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{16}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$

8) $\vec{b} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

9) Aire : $\frac{125}{2}$

10) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4,24$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4,24$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8,24$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13,24$

11) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -88$

12) a) Deux solutions : $C_1(9;-4)$, $D_1(8;2)$ et $C_2(-3;-6)$, $D_2(-4;0)$
b) $P(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}), Q(\frac{11}{2};-\frac{3}{2})$

13) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ et $\lambda_4 = -2$
Le triangle est isocèle si $\lambda = -5$ ou si $\lambda = \frac{5}{2}$.

14) $B(9;-3)$, $D(-3;9)$

15) a) $\vec{a} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = -\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{7}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
c) $\vec{a} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

16) $d : -4x + 5y - 5 = 0$

17) $h_a : x + y - 1 = 0$

18) $(-3;5)$ $(-4;3)$ $(0;1)$ $(1;3)$

19) $P(\frac{26}{5};\frac{3}{5})$

20) $M(2;-2)$

21) $A'(7;-3)$

Chapitre 2

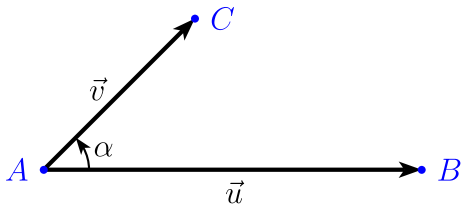
Applications du produit scalaire

2.1 Angles

2.1.1 Angle de deux vecteurs

Définition 2.1
Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

L'**angle** α entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à l'angle $\widehat{BAC}$.



Formule

On peut déterminer l'angle α en se basant sur l'expression trigonométrique du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

2.1.2 Angle de deux droites

Définition 2.2
On appelle **angle de deux droites** d et g tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$.

Formule

L'angle aigu α de deux droites d et g est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d} \bullet \vec{g}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{g}\|}$$

On peut également déterminer l'angle de deux droites non verticales à partir de leur pente.

Formule

Soient deux droites d et d' non verticales de pentes respectives m et m'. L'angle aigu α des deux droites d et d' est donné par :

$$\tan(\alpha) = \left|\frac{m' - m}{1 + m' \cdot m}\right|$$

Cette dernière formule sera démontrée en exercice.

2.2 Distances

2.2.1 Distance de deux points

Définition 2.3
On appelle **distance** de deux points A et B la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La distance de A à B se note $\delta(A;B)$.

$$\boxed{\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\|}$$

Propriétés

Quels que soient les points A, B et C du plan π, on a :

1. Positivité : $\delta(A;B) \geqslant 0$
2. Distance nulle : $\delta(A;B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. Inégalité triangulaire : $\delta(A;C) \leqslant \delta(A;B) + \delta(B;C)$

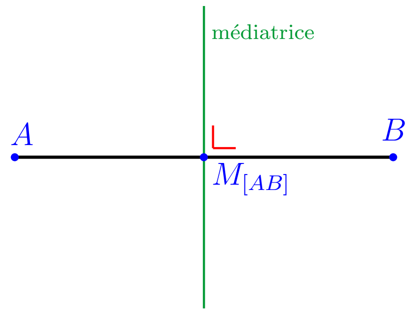
Remarque

On peut définir d'autres distances dans le plan π. Il suffit pour cela de déterminer une application δ de $\pi \times \pi$ vers $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés ci-dessus quels que soient les points A, B et C du plan.

Equidistance

L'ensemble des points du plan équidistants de deux points A et B est une droite appelée **médiatrice** de $[AB]$

La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple

Nous allons établir l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ *avec* $A(-2;-1)$ *et* $B(-1;3)$

1. *Un vecteur normal de la médiatrice* m *est :*

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   L'équation cartésienne partielle de m *est* $x + 4y + c = 0$.

2. *Comme* m *passe par le point milieu de* $[AB]$, $M_{[AB]} = (-\frac{3}{2}; 1)$, *on peut déterminer* c *en résolvant l'équation :*

$$-\frac{3}{2} + 4 \cdot 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\frac{5}{2}$$

   L'équation cartésienne de m *est :* $x + 4y - \frac{5}{2} = 0$

2.2.2 Distance d'un point à une droite

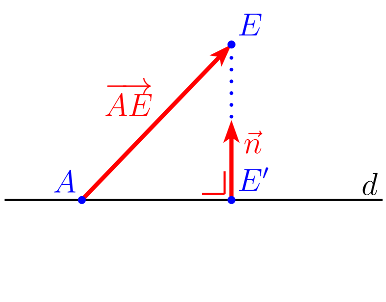
Définition 2.4
La distance $\delta(E;d)$ d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur d.

Formule vectorielle

Soit d la droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La distance du point E à la droite d est :

$$\boxed{\delta(E;d) = \frac{|\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$



Démonstration. Nous calculons tout d'abord le produit scalaire

$$\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n} = (\overrightarrow{AE'} + \overrightarrow{E'E}) \bullet \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{AE'} \bullet \vec{n}}_{=0} + \overrightarrow{E'E} \bullet \vec{n} = \|\overrightarrow{E'E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\alpha)$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{E'E}$ et $\vec{n}$. Or, cet angle est égal à 0° ou à 180°. Ainsi, $\cos(\alpha) = \pm 1$.

En prenant la valeur absolue des deux membres de l'égalité, nous obtenons

$$|\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n}| = \|\overrightarrow{E'E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot 1$$

d'où nous tirons

$$\delta(E; d) = \|\overrightarrow{E'E}\| = \frac{|\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

□

Formule analytique

Soit d la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance de point $E(x_0; y_0)$ à la droite d est :

$$\boxed{\delta(E; d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Démonstration. Cette formule s'obtient facilement en appliquant la formule vectorielle avec le point $A(0; \frac{-c}{b})$ de d et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ orthogonal à d :

$$\delta(E; d) = \frac{|\overrightarrow{AE} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \frac{c}{b} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + b \cdot \frac{c}{b}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

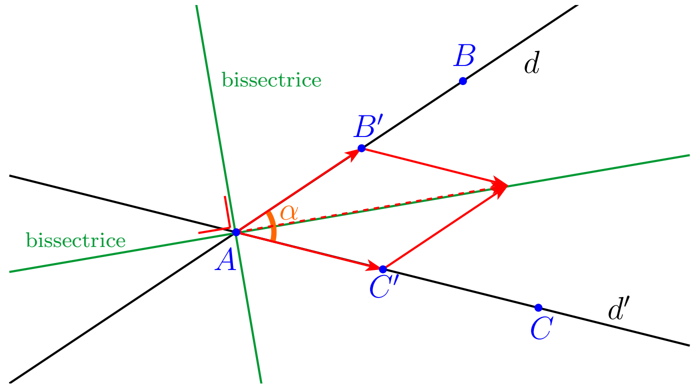
Equidistance

L'ensemble des points du plan équidistants de deux droites sécantes d et d' est constitué de deux droites appelées **bissectrices** de d et d'.

Les droites sécantes d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ont pour bissectrices les deux droites d'équations

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

En prenant le signe +, on obtient l'équation d'une des bissectrices, et avec le signe −, l'équation de l'autre bissectrice. Ces deux droites sont perpendiculaires.



Pour déterminer la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on peut utiliser la méthode décrite ci-dessus. Parmi les deux droites obtenues, pour sélectionner la bissectrice qui convient, on peut réaliser un dessin ou utiliser les inéquations de demi-plans.

Une autre méthode de construction, à préférer, est basée sur la construction de la bissectrice à la règle et au compas, ainsi que sur le fait que, lorsqu'on additionne deux vecteurs de même norme, leur somme est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle qu'ils forment (car la diagonale d'un losange est également bissectrice).

Ainsi, pour déterminer un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on prend :
– un vecteur $\overrightarrow{AB'}$ de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{AB}$
– un vecteur $\overrightarrow{AC'}$ de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{AC}$
tels que $\left\|\overrightarrow{AB'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC'}\right\|$ (on choisit généralement des normes égales à 1). Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est alors un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle α. Il suffit ensuite de considérer le point A pour obtenir l'équation de cette bissectrice.

Exemple

Soient les points $A(4;8)$, $B(4,2)$ et $C(1;4)$. Pour déterminer la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on commence par déterminer

– *le vecteur $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{AB}$, mais de norme égale à 1.*
– *le vecteur $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{AC}$, mais de norme égale à 1.*

Un vecteur directeur de la bissectrice est alors donné par

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de la bissectrice est $b_\alpha : 3x - y + c = 0$.

En utilisant le point A, on détermine le coefficient c

$$3 \cdot 4 - 8 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -4$$

L'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle α est $b_\alpha : 3x - y - 4 = 0$

2.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O;I;J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ de $\mathbf{V}_2$ associée.

1) Soient les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer les angles formés par les vecteurs :

   a) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ b) $\vec{w}$ et $\vec{v}$ c) $\vec{v}$ et $\vec{z}$ d) $\vec{z}$ et $\vec{w}$

2) Soit le triangle de sommets $A(-2;5)$, $B(4;7)$ et $C(10;-1)$.

   Calculer les trois angles de ce triangle.

3) Soit un rectangle de dimensions 12 et 8.

   Calculer l'angle aigu d'intersection des diagonales.

4) Calculer l'angle aigu d'intersection de la droite d d'équation $x + y - 2 = 0$ avec :

   a) l'axe des ordonnées

   b) la droite g d'équation $4x + y + 1 = 0$

5) Un triangle est donné par les équations cartésiennes de ses trois côtés :

$$d_1 : 2x - 3y + 5 = 0 \qquad d_2 : -4x + 2y + 11 = 0 \qquad d_3 : 5x + y = 0$$

   Déterminer les angles aigus d'intersection entre ces droites et en déduire les angles intérieurs du triangle.

6) Calculer la distance des points $A(3;-5)$ et $B(8;7)$.

7) Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants, en utilisant la formule vectorielle puis la formule analytique.

   a) $P(3;-2)$ $d : 4x + 3y + 9 = 0$

   b) $P(-2;-4)$ $d : 5x - 12y - 12 = 0$

   c) $P(3;-5)$ $d : 2x - 7y + 8 = 0$

   d) $P(2;1)$ $d : \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$

8) Soit le triangle de sommets $A(-4;2)$ $B(6;-1)$ et $C(3;7)$.

   a) Calculer le périmètre du triangle ABC.

   b) Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet B.

   c) Calculer l'aire du triangle ABC.

9) On donne les points $A(3;-2)$ et $B(7;1)$.

   Écrire l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

10) Soit le triangle de sommets $A(-2;-3)$, $B(4;8)$ et $C(0;6)$.
   a) Déterminer :
   – le centre de gravité G de ce triangle ;
   – l'orthocentre H de ce triangle ;
   – le centre Ω du cercle circonscrit à ce triangle.
   b) Vérifier que les trois points G, H, Ω appartiennent à une même droite, appelée droite d'Euler, et que G se trouve au tiers du segment ΩH.

11) On donne les points $A(4;-1)$ et $B(-5;11)$.
   Déterminer les points de la droite (AB) situés à la distance 3 de A.

12) Trouver les équations des droites passant par le point $A(1;1)$ et dont la distance au point $B(-6;2)$ est égale à 5.

13) Soit la droite d d'équation $3x - 4y - 11 = 0$.
   Déterminer l'ensemble des points M situés à la distance 8 de la droite d.

14) On donne deux points $A(2;1)$, $B(8;9)$ et la droite d d'équation $x + 2y - 30 = 0$.
   Déterminer les points C situés sur la droite d et tels que l'aire du triangle ABC soit égale à 20.

15) Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations : $x - 3y + 8 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.

16) Trouver l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites d'équations $3x + 4y - 1 = 0$ et $5x + 12y - 2 = 0$.

17) Soient les droites $d : 8x - 15y - 120 = 0$ et $g : 5x + 12y - 60 = 0$.
   a) Établir les équations des deux axes de symétrie de ces deux droites.
   b) Montrer que ces deux axes sont perpendiculaires.

18) Soit le triangle de sommets $A(9;-4)$, $B(4;8)$ et $C(-5;-4)$.
   a) Écrire l'équation des trois bissectrices intérieures de ce triangle.
   b) Calculer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans ce triangle.
   c) Calculer le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

19) Soit le triangle de sommets $A(-11;-8)$, $B(13;10)$ et $C(-11;0)$.
   Déterminer le centre et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

20) Deux droites d_1 et d_2 ont pour bissectrice la droite d'équation $3x - 2y + 16 = 0$. Trouver l'équation de d_1, connaissant l'équation de $d_2 : x - 2y + 8 = 0$.

2.4 Solutions des exercices

1) a) $109,65°$ b) $109,65°$ c) $14,04°$ d) $123,69°$

2) $\alpha = 45°$, $\beta = 108,43°$, $\gamma = 26,57°$

3) $67,38°$

4) a) $45°$ b) $30,96°$

5) Angles intérieurs du triangle : $112,38°$, $37,88°$, $29,74°$

6) 13

7) a) 3 b) 2 c) $\dfrac{49}{\sqrt{53}}$ d) $\dfrac{3}{5}$

8) a) Périmètre : $27,58$
   b) Longueur hauteur : $8,25$
   c) Aire : $35,5$

9) $m_{[AB]} : 4x + 3y - \frac{37}{2} = 0$

10) a) $G(\frac{2}{3}; \frac{11}{3})$, $H(-\frac{143}{16}; \frac{87}{8})$, $\Omega(\frac{175}{32}; \frac{1}{16})$

11) $\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{29}{5}; -\frac{17}{5}\right)$

12) Droites $d : 4x + 3y - 7 = 0$ et $d' : 3x - 4y + 1 = 0$

13) $E = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y - 51 = 0 \text{ ou } 3x - 4y + 29 = 0\}$

14) $C_1(\frac{140}{11}; \frac{95}{11})$, $C_2(\frac{60}{11}; \frac{135}{11})$

15) Bissectrices $b_1 : 2x + 2y - 9 = 0$ et $b_2 : 4x - 4y + 7 = 0$

16) Bissectrice $b : 64x + 112y - 23 = 0$

17) Axes de symétrie : $a : 19x - 399y - 540 = 0$ et $a' : 189x + 9y - 2580 = 0$

18) a) $b_A : 2x + 3y - 6 = 0$, $b_B : 8x - y - 24 = 0$, $b_C : x - 2y - 3 = 0$
    b) $\Omega(3; 0)$
    c) $r = 4$

19) Centre : $\Omega(-8; -2)$, rayon : $r = 3$

20) $d_1 : 29x - 2y + 120 = 0$

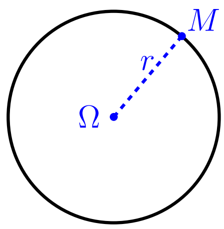
Chapitre 3

Le cercle

3.1 Définition

Définition 3.1
On appelle **cercle** c de **centre** Ω et de **rayon** r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des points M du plan situés à la distance r du centre Ω. On a donc :

$$\boxed{M \in c \Leftrightarrow \delta(\Omega; M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r}$$



On note ce cercle : $c(\Omega; r)$.

3.2 Equation cartésienne d'un cercle

Soit le cercle c de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r.

Un point $M(x; y)$ appartient au cercle c si et seulement si $\delta(\Omega; M) = r$. On a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r \quad &\Leftrightarrow \quad \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| = r \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2} \end{aligned}$$

Cette dernière relation est appelée **équation cartésienne** (canonique) du cercle c.

En développant la formule ci-dessus, on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$$

avec $a \neq 0$, appelée **équation générale** d'un cercle.

Remarque

Tous les cercles peuvent s'exprimer par une équation du type $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$, mais l'ensemble des points vérifiant une équation de ce type n'est pas nécessairement un cercle (ce peut être l'ensemble vide).

Exemple

Soit le cercle c donné par l'équation générale : $x^2+y^2-10x+4y+13=0$. Nous allons déterminer le centre Ω et le rayon r de ce cercle.

L'idée est de transformer l'équation générale en l'équation cartésienne canonique pour pouvoir y lire directement Ω et r. On commence pour regrouper les termes en x et y, puis on "complète les carrés".

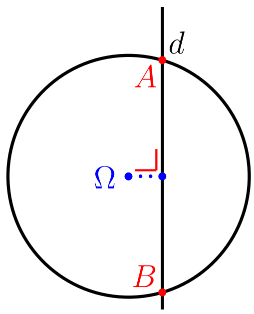
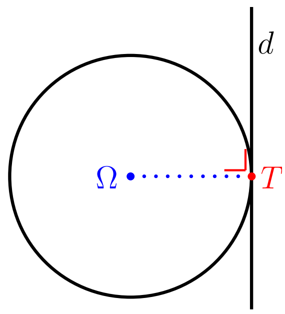
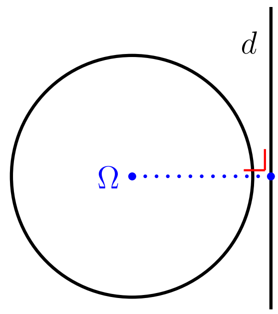
$$\begin{aligned}\underbrace{x^2-10x}_{(x-5)^2-25}+\underbrace{y^2+4y}_{(y+2)^2-4}+13 &= 0\\ (x-5)^2+(y+2)^2 &= 25+4-13\\ (x-5)^2+(y+2)^2 &= 16\end{aligned}$$

Le cercle c a pour centre $\Omega(5;-2)$ et pour rayon $r=\sqrt{16}=4$.

Définition 3.2
On appelle **disque ouvert** $(\Omega;r)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(\Omega;M)<r$.
On appelle **disque fermé** $(\Omega;r)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(\Omega;M)\leqslant r$.

3.3 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'un cercle $c(\Omega;r)$.

		
$\delta(\Omega;d)<r$	$\delta(\Omega;d)=r$	$\delta(\Omega;d)>r$
Deux points A et B d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Définition 3.3
Une **droite tangente** au cercle $c(\Omega;r)$ est une droite située à la distance r de Ω.

Propriété

La droite tangente au cercle $c(\Omega;r)$ au point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}$.

Calcul de l'intersection d'une droite et d'un cercle

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un cercle c.

Les points communs au cercle et à la droite ont des coordonnées qui vérifient l'équation du cercle et l'équation de la droite. Pour calculer les coordonnées des points d'intersection, il suffit donc de résoudre le système formé de l'équation cartésienne du cercle et de l'équation cartésienne de la droite.

Pour ceci, on isole une des inconnues dans l'équation cartésienne de la droite et on la substitue dans l'équation cartésienne du cercle.

On obtient alors une équation de degré 2 à une inconnue, qu'on résout.
- Si cette équation admet deux solutions, alors l'intersection est constituée de deux points A et B.
- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point T. d est tangente au cercle c en T.
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soient le cercle $c : x^2+y^2-8x-6y=0$ *et la droite* $d : 2x-y-10=0$. *Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection en résolvant le système*

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y &= 0 \\ \qquad 2x-y-10 &= 0 \qquad \rightarrow \qquad y=2x-10 \end{cases}$$

On peut isoler y *dans l'équation de la droite et substituer cet* y *dans l'équation du cercle pour obtenir*

$$\begin{aligned} x^2+(2x-10)^2-8x-6(2x-10) &= 0 \\ x^2+4x^2-40x+100-8x-12x+60 &= 0 \\ 5x^2-60x+160 &= 0 \\ x^2-12x+32 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 12^2-4\cdot 1\cdot 32 = 16 = 4^2$.

Comme $\Delta > 0$, *la droite* d *et le cercle* c *s'intersectent en deux points* A *et* B. *Les coordonnées de ces points sont :*

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{12+4}{2} = 8 \qquad \rightarrow \qquad y_A = 2\cdot 8-10 = 6 \\ x_B &= \frac{12-4}{2} = 4 \qquad \rightarrow \qquad y_B = 2\cdot 4-10 = -2 \end{aligned}$$

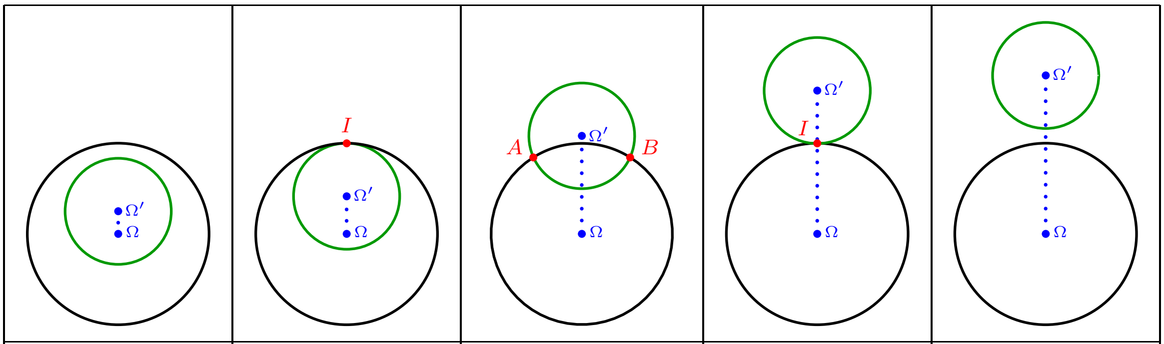
On a donc les deux points d'intersection $A(8;6)$ *et* $B(4;-2)$.

Définition 3.4

L'angle aigu d'intersection entre une droite et un cercle est l'angle aigu formé par la droite et la tangente au cercle en un des points d'intersection.

3.4 Position relatives de deux cercles

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux cercles $c(\Omega; R)$ et $c'(\Omega', r)$ avec $R > r$.



$\delta(\Omega;\Omega') < R - r$	$\delta(\Omega;\Omega') = R - r$	$\begin{cases} \delta(\Omega;\Omega') > R - r \\ \delta(\Omega;\Omega') < R + r \end{cases}$	$\delta(\Omega;\Omega') = R + r$	$\delta(\Omega;\Omega') > R + r$
$\cap : \emptyset$	$\cap$: un point I	$\cap$: A et B	$\cap$: un point I	$\cap : \emptyset$

Calcul de l'intersection de deux cercles

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection de deux cercles c et c'.

Les points communs aux deux cercles ont des coordonnées qui vérifient les équations de ces deux cercles. Pour calculer les coordonnées des points d'intersection, il suffit donc de résoudre le système formé par les équations cartésiennes de ces deux cercles.

En soustrayant les équations de ces cercles, on obtient l'équation d'une droite qui passe par les éventuels points d'intersection (car les solutions d'un système d'équations sont aussi solutions des combinaisons linéaires des équations du système). On est ainsi ramené à la recherche des points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Exemple

Soient les cercles $c : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ *et* $c' : x^2 + y^2 - 16x - 2y + 40 = 0$. *Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection en considérant tout d'abord la différence des deux équations du système :*

$$\begin{array}{rcll} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x - 6y \\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 40 \end{array} \right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \ominus \end{array} \\ \hline 8x - 4y - 40 & = & 0 & \end{array}$$

En divisant par 4 *les deux membres de l'équation obtenue, on trouve l'équation de la droite* $d : 2x - y - 10 = 0$.

On doit maintenant déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $c : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ *et la droite* $d : 2x - y - 10 = 0$, *ce qui a été fait à l'exemple précédent.*

Ainsi les cercles c *et* c' *s'intersectent en* $A(8; 6)$ *et* $B(4; -2)$.

Définition 3.5
L'angle aigu d'intersection entre deux cercles est l'angle aigu formé par les tangentes à ces cercles en un des points d'intersection.

3.5 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de $\mathbf{V}_2$ associée.

1) Écrire l'équation cartésienne développée des cercles suivants :
   a) cercle de centre O (origine) et de rayon $r = 3$.
   b) cercle de centre $\Omega(6; -8)$ et passant par l'origine.

2) Écrire l'équation cartésienne développée du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$.

3) Les équations suivantes définissent-elles des cercles ? Si oui, déterminer le centre et le rayon.
   a) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$
   d) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
   e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 26 = 0$
   f) $2x^2 + 2y^2 - 9x + 4y - 8 = 0$

4) Représenter graphiquement l'ensemble E des points $M(x; y)$ tels que $y = \sqrt{4 - x^2}$.
   Exprimer la fonction f dont le graphe est E.

5) a) Écrire la fonction f dont la représentation graphique est le demi-cercle situé au-dessus de son diamètre horizontal $[AB]$, avec $A(-3; 5)$ et $B(3; 5)$.
   b) Même question pour le demi-cercle situé au-dessous du diamètre $[AB]$.

6) Écrire l'équation cartésienne du cercle passant par les points $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$ et dont le centre appartient à la droite d'équation $3x - y - 2 = 0$.

7) Écrire l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle de sommets $A(7; 4)$, $B(2; -1)$ et $C(5; 0)$.

8) Écrire l'équation du cercle inscrit dans le triangle de sommets $A(2; -1)$, $B(-1; 5)$ et $C(10; 3)$.

9) On donne la droite $d : 4x - 3y = 19$ et le cercle $c : x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$.
   a) Déterminer leur position relative.
   b) Déterminer les éventuels points d'intersection.

10) Déterminer l'intersection de la droite d d'équation $x - 2y = 1$ avec le cercle c d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.

11) Établir l'équation de la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ au point $T(-5; 7)$.

12) Établir l'équation des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x = 19$ passant par le point $A(1; 6)$.

13) Établir l'équation des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ parallèles à la droite $d : 2x + y - 7 = 0$.

14) Former l'équation du cercle de centre $\Omega(1; -1)$ tangent à la droite $d : 5x - 12y + 9 = 0$.

15) Écrire l'équation du cercle passant par le point $A(4; 7)$ tangent à la droite d d'équation $4x - 3y + 15 = 0$ au point $T(0; 5)$.

16) Déterminer l'équation des cercles tangents aux deux droites $d : 7x - y - 5 = 0$ et $d' : x + y + 13 = 0$, un des points de tangence étant $T(1; 2)$.

17) On donne les cercles $c : x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$.
    a) Déterminer leur position relative.
    b) Déterminer les éventuels points d'intersection.

18) On donne les cercles $c : x^2 + y^2 - 4x = 32$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$.
    Déterminer leurs éventuels points d'intersection.

19) Soit le cercle $c : 16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$.
    a) Déterminer le point du cercle le plus proche de l'origine.
    b) Déterminer le point du cercle c le plus proche de la droite $d : 8x - 4y + 73 = 0$.

20) Calculer l'angle d'intersection
    a) de la droite $d : 2x - y = 3$ et du cercle $c : x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$.
    b) des deux cercles $c : x^2 + y^2 + 3x = y$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$.

21) Soient $A(2; 3)$ et $B(5; 0)$ deux sommets consécutifs d'un carré.
    Déterminer les deux autres sommets. Donner toutes les solutions

22) On donne les points $A(1; -4)$ et $B(3; 2)$.
    Déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 6$.

23) Soit le cercle $c : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 32$ et le point $A(4; 1)$.
    a) Le point A est-il situé à l'intérieur du cercle ?
    b) Déterminer analytiquement le plus petit des deux secteurs angulaires définis par le cercle c et les demi-droites $[\Omega O)$ et $[\Omega A)$, O étant l'origine et Ω le centre du cercle c.
    c) Calculer l'aire de ce secteur angulaire.

3.6 Solutions des exercices

1) a) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$

2) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$

3) a) $\Omega(-3; 0)$, $r = 5$ — b) $\Omega(1; -2)$, $r = 5$
   c) $\Omega(2; -3)$, $r = 6$ — d) $-$
   e) $-$ — f) $\Omega(\frac{9}{4}; -1)$, $r = 3,17$

4) $\begin{array}{llll} f: & [-2; 2] & \to & [0; 2] \\ & x & \mapsto & y = \sqrt{4 - x^2} \end{array}$

5) a) $\begin{array}{llll} f: & [-3; 3] & \to & [5; 8] \\ & x & \mapsto & y = 5 + \sqrt{9 - x^2} \end{array}$

   b) $\begin{array}{llll} g: & [-3; 3] & \to & [5; 2] \\ & x & \mapsto & y = 5 - \sqrt{9 - x^2} \end{array}$

6) $x^2 + y^4 - 4x - 8y + 10 = 0$

7) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$

8) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$

9) a) Deux points d'intersection
   b) $I_1(1; -5)$, $I_2(7; 3)$

10) $I(3; 1)$

11) $t : 3x - 4y + 43 = 0$

12) $t_1 : 2x + y - 8 = 0$, $t_2 : -x + 2y - 11 = 0$

13) $t_1 : 2x + y - 1 = 0$, $t_2 : 2x + y + 19 = 0$

14) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

15) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

16) $c_1 : (x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$, $c_2 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$

17) a) Deux points d'intersection
    b) $I_1(-1; -1)$; $I_2(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$

18) Pas de point d'intersection (c' à l'intérieur de c)

19) a) $P(0,72; -0,12)$
    b) $P(-\frac{7}{2}; \frac{5}{4})$

20) 1) $79,7°$
    2) $18,42°$

21) $C_1(2; -3)$, $D_1(-1; 0)$ ou $C_2(8; 3)$, $D_2(5; 6)$

22) Cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

23) a) A l'intérieur
    c) Aire : 23.67