# Objectifs : fonctions puissances, racines, exponentielles et logarithmes, fonctions d'une variable (chap. 6 + 7 + 8)

A la fin de ce cours (et pour réussir l'épreuve sur celui-ci), vous devriez être capable de :

1. Définir, illustrer, comprendre et utiliser le vocabulaire lié au chapitre traité :
   – **fonction puissance** $n^{\textbf{ème}}$, base, exposant, **fonction racine** $n^{\textbf{ème}}$, indice, radical, radicande, **fonction exponentielle de base** $a$, nombre $e$ (nombre d'Euler), **fonction logarithme de base** $a$, logarithme décimal, logarithme naturel (ou népérien), formule de changement de base des logarithmes, formule des intérêts composés.

   1) *Calculer à l'aide d'une machine.*

   a) $\log_{21}(34)$ b) $\log_{13}(2)$ c) $\log_3(36)$

2. Connaître par cœur les propriétés des fonctions exponentielles (identiques à celles des fonctions puissances), racines et logarithmes.

   1) *Compléter : (avec* $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ *;* $c, d \in \mathbb{R}_+$ *;* $n, m \in \mathbb{N}$ *;* $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ *;* $x, y \in \mathbb{R}$*)*

   a) $a^x \cdot a^y =$ b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x =$ c) $(a^x)^y =$

   d) $(\sqrt[n]{c})^n =$ e) $\sqrt[n]{cd} =$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{c}} =$

   g) $\log_a(a^x) =$ h) $\log_a(uv) =$ i) $\log_a(u^x) =$

   2) *Mettre sous la forme* $m\log(a) + n\log(b) + p\log(c)$*.*

   a) $\log\left(\dfrac{a^3\sqrt{b}}{c^2}\right)$ b) $\log\left(a^3\sqrt{\dfrac{b^4}{c^5}}\right)$ c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{c}}{a\sqrt{b}}\right)$

3. Evaluer sans machine à calculer des expressions simples contenant des puissances, des racines, des exponentielles ou des logarithmes.

   1) *Calculer sans machine.*

   a) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ b) $(3^2)^3$ c) $\sqrt[6]{729}$

   d) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2\left(\dfrac{1}{512}\right)$ f) $\log_4(\sqrt[5]{64})$

4. Simplifier une expression algébrique contenant des puissances, des racines, des exponentielles ou des logarithmes en utilisant les propriétés de ceux-ci (*voir objectif 2*).

   1) *Simplifier les expressions suivantes (*$a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$*).*

   a) $a^{2n-9} \cdot a^{8-n}$ b) $\dfrac{(a^{3n}b^n)^4}{(a^{12}b^4)^{n+1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

   d) $\dfrac{(\sqrt{a})^3}{a\sqrt[3]{a^2}}$ e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{\log_2(32)}$ f) $\left(\sqrt[2n]{\sqrt[n]{a}}\right)^{3n}$

5. Passer de l'écriture d'un nombre à l'aide d'un exposant rationnel à l'écriture à l'aide d'une racine et vis-versa.

   1) *Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels : ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$)*

      a) $\sqrt[5]{a^{15}}$ b) $(\sqrt{a^3})^{12}$ c) $\sqrt[2n]{a^{6n}}$

   2) *Ecrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier :*

      a) $3^{\frac{5}{6}}$ b) $32^{0,2}$ c) $4^{-\frac{3}{5}}$

6. Résoudre une équation de type exponentielle en se basant sur les propriétés citées à l'objectif 2 et en utilisant ou non la fonction logarithme.

   1) *Résoudre les équations suivantes.*

      a) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$ b) $(5^{x+2})^4 = 125 \cdot 5^{x-3}$ c) $2^{-x^2} = (0,5)^{4x-4}$

      d) $5^{2x+1} = 6^{x-2}$ e) $e^{x+\ln(4)} = 3e^x$ f) $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$

7. Résoudre une équation de type logarithme en se basant sur les propriétés citées à l'objectif 2.

   1) *Résoudre les équations suivantes.*

      a) $\log_6(4x-5) = \log_6(2x+1)$ b) $\log_4(5+x) = 4$

      c) $\log_4(x^2) + \log_2(x+2) = 3$ d) $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$

8. Esquisser les représentations graphiques des fonctions puissance $n^{\text{ème}}$, racine $n^{\text{ème}}$, exponentielle de base $a$ (avec $a > 1$ ou $0 < a < 1$) et logarithme de base $a$ (avec $a > 1$ ou $0 < a < 1$).

9. Traduire l'énoncé d'un exercice ou d'un problème en termes mathématiques et le résoudre en utilisant les fonctions puissances, racines, exponentielles et logarithmes ainsi que les résultats qui leur sont liés, notamment les méthodes de résolution d'équations.

   1) *L'île de Manhattan a été vendue* 24 *francs en* 1626*. A combien se monterait cette somme en* 2007 *si elle avait été investie à* 6% *par an, capitalisée trimestriellement ?*

   2) *La grippe se propage à partir d'un individu malade à une population de 1000 personnes. On admet que le nombre n de personnes qui ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par*

      $$\boxed{n(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot 10^{-0.17t}}}$$

      a) *Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?*

      b) *Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?*

3) *Le son le plus faible qu'une oreille humaine puisse percevoir est celui provoqué par une source de puissance* $P_0 = 10^{-12}$ *Watt.*
*En décibels (dB), le niveau sonore* $N$ *d'un son de puissance* $P$ *Watt est défini par :*

$$\boxed{N = 10\log\left(\frac{P}{P_0}\right)}$$

a) *Une conversation normale correspond à une puissance sonore de* $10^{-6}$ *Watt. Calculer son niveau sonore.*

b) *Par quel facteur la puissance d'une source sonore est-elle multipliée lorsque son niveau sonore passe de 60 dB à 90 dB ?*

c) *Un niveau sonore supérieur à 90 dB est considéré comme nuisible pour les oreilles. La puissance sonore perçue à 100 m d'un avion au décollage est de 1 Watt. Ce son est-il nuisible ?*

d) *Si le niveau sonore de chacune de deux sources est de 45 dB, quel est le niveau sonore de la réunion de ces deux sources ?*

## Solutions exercices objectifs

1.1) a) $1,158$ b) $0,270$ c) $3,262$

2.1) a) $a^{x+y}$ b) $\dfrac{a^x}{b^x}$ c) $a^{x\cdot y}$

d) $c$ e) $\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d}$ f) $\sqrt[n\cdot m]{c}$

g) $x$ h) $\log_a(u)+\log_a(v)$ i) $x\cdot\log_a(u)$

2.2) a) $3\log(a)+\dfrac{1}{2}\log(b)-2\log(c)$ b) $3\log(a)+2\log(b)-\dfrac{5}{2}\log(c)$

c) $-\log(a)-\dfrac{1}{2}\log(b)+\dfrac{1}{3}\log(c)$

3.1) a) $2^{15}$ b) $3^6$ c) $3$

d) $2$ e) $-9$ f) $\dfrac{3}{5}$

4.1) a) $a^{n-1}$ b) $a^{-12}b^{-4}$ c) $\sqrt[12]{a}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}}$ e) $5^{\frac{3}{4}}$ f) $a^{\frac{3}{2n}}$

5.1) a) $a^3$ b) $a^{18}$ c) $a^3$

5.2) a) $\sqrt[6]{a^5}$ b) $2$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4^3}}$

6.1) a) $S=\{3\}$ b) $S=\{-\frac{8}{3}\}$ c) $S=\{2\}$

d) $S=\left\{-\frac{\log(5\cdot 36)}{\log\left(\frac{25}{6}\right)}\right\}$ e) $S=\emptyset$ f) $S=\left\{\frac{\log(3+\sqrt{10})}{\log(5)}\right\}$

7.1) a) $S=\{3\}$ b) $S=\{251\}$ c) $S=\{2\}$ d) $S=\emptyset$

9.1) Environ $1,7158\cdot 10^{11}$ francs.

9.2) a) 716 personnes b) 19 jours

9.3) a) 60 dB b) $1'000$ c) Oui, 120 dB d) 48 dB