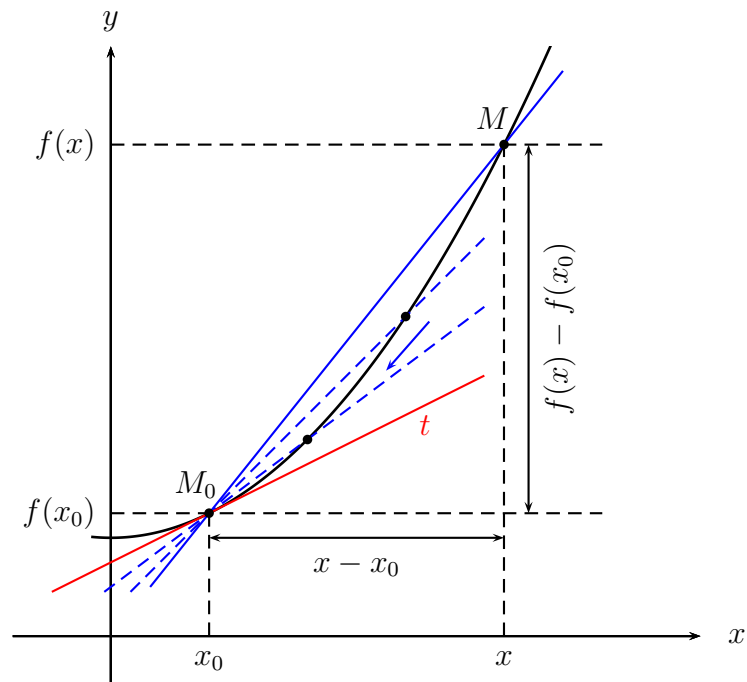




LYCÉE CANTONAL

Porrentruy

Cours de mathématiques



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Discipline fondamentale

2^eme année

Cours MAP

Damien DOBLER

Juillet 2017

Table des matières

I	Analyse	1
1	Continuité	3
1.1	Définitions et propriétés	3
1.1.1	Continuité en un point	3
1.1.2	Continuité sur un intervalle	4
1.1.3	Propriétés des fonctions continues	5
1.1.4	Limites de fonctions composées	6
1.2	Théorèmes fondamentaux sur les fonction continues	7
1.3	Exercices	10
1.4	Solutions des exercices	11
2	Asymptotes	12
2.1	Asymptotes verticales	12
2.2	Asymptotes affines	13
2.3	Exemples	15
3	Dérivées	19
3.1	Exemples introductifs	19
3.1.1	Vitesse instantanée	19
3.1.2	Tangente	20
3.2	Définitions et propriétés	21
3.2.1	Nombre dérivé	21
3.2.2	Nombre dérivé à gauche (à droite)	22
3.2.3	Continuité et dérivabilité	22
3.2.4	Point anguleux, point à tangente verticale, point de rebroussement	23
3.2.5	Fonction dérivée	23
3.2.6	Dérivée d'ordre supérieur	25
3.3	Règles de dérivation et calculs de dérivées	25
3.3.1	Dérivées de fonctions usuelles	25
3.3.2	Opérations élémentaires - dérivées	27
3.3.3	Composition de fonctions - dérivées	29
3.3.4	Fonctions réciproques - dérivées	32
3.4	Exercices	34
3.5	Solutions des exercices	37
4	Applications des dérivées	39
4.1	Dérivées et tangentes à des courbes	39
4.1.1	Calcul de la tangente avec point de tangence connu	39
4.1.2	Calcul de la tangente avec point de tangence inconnu	40

4.1.3	Angle entre deux courbes	41
4.2	Théorèmes relatifs aux fonctions dérivées	42
4.2.1	Théorème de Rolle	42
4.2.2	Théorème des accroissements finis	43
4.2.3	Théorème de Cauchy	44
4.2.4	Règle de l'Hospital	45
4.3	Que dit f' à propos de f ?	47
4.3.1	Croissance et décroissance	47
4.3.2	Valeurs maximales et minimales	49
4.4	Que dit f'' sur f ?	52
4.4.1	Convexité et concavité	52
4.4.2	Valeurs maximales et minimales	54
4.4.3	Point d'inflexion	54
4.5	Problèmes d'optimisation	55
4.6	Exercices	58
4.7	Solutions des exercices	61
5	Etude de fonctions	62
5.1	Méthode	62
5.2	Exemple complet	63
5.3	Exercices	68
6	Courbes paramétrées	69
6.1	Introduction	69
6.2	Définition et exemples	70
6.2.1	Définitions	70
6.2.2	Exemples	71
6.3	Asymptotes	73
6.3.1	Asymptotes obliques	74
6.4	Dérivées et points particuliers	75
6.4.1	Dérivées	75
6.4.2	Points particuliers	76
6.4.3	Pente de la tangente à la courbe	76
6.5	Etude de courbes paramétrées	78
6.5.1	Méthode	78
6.5.2	Exemple complet	78
6.6	Exercices	82
6.7	Solutions des exercices	83
II	Algèbre	85
7	Introduction à la programmation linéaire	87
7.1	Domaines du plan	87
7.2	Programmation linéaire	89
7.2.1	Un exemple : l'artisan pâtissier	89
7.2.2	Demarche générale de résolution	92
7.3	Exercices	94
7.4	Solutions des exercices	95

III	Géométrie vectorielle et analytique plane	97
8	Produit scalaire	99
8.1	Définitions produit scalaire et norme	99
8.2	Orthogonalité	101
8.2.1	Vecteurs orthogonaux et droites perpendiculaires	101
8.2.2	Repère orthonormé	102
8.2.3	Expression analytique du produit scalaire	102
8.2.4	Expression analytique de la norme	103
8.2.5	Vecteur normal à une droite	103
8.2.6	Pentes de droites perpendiculaires	104
8.3	Exercices	105
8.4	Solutions des exercices	108
9	Applications du produit scalaire	109
9.1	Angles	109
9.1.1	Angle de deux vecteurs	109
9.1.2	Angle de deux droites	109
9.2	Distances	110
9.2.1	Distance de deux points	110
9.2.2	Distance d'un point à une droite	111
9.3	Exercices	114
9.4	Solutions des exercices	116
10	Le cercle	117
10.1	Définition	117
10.2	Equation cartésienne d'un cercle	117
10.3	Positions relatives d'une droite et d'un cercle	118
10.4	Position relatives de deux cercles	120
10.5	Exercices	121
10.6	Solutions des exercices	123
11	Coniques	125
11.1	Introduction	125
11.2	Ellipses	125
11.2.1	Définition	125
11.2.2	Ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox ou Oy	126
11.2.3	Ellipse centrée en Ω et d'axe focal parallèle à Ox ou à Oy	128
11.3	Hyperboles	130
11.3.1	Définition	130
11.3.2	Hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Ox ou Oy	130
11.3.3	Hyperbole centrée en Ω et d'axe focal parallèle à Ox ou à Oy	132
11.4	Paraboles	134
11.4.1	Définition	134
11.4.2	Parabole de sommet l'origine et d'axe Ox ou Oy	134
11.4.3	Parabole de sommet S et d'axe parallèle à Ox ou à Oy	136
11.4.4	Propriété optique des paraboles	136
11.5	Coniques en général	138
11.6	Exercices	141

11.7 Solutions des exercices	143
IV Géométrie vectorielle et analytique de l'espace	147
12 Vecteurs dans l'espace	149
12.1 Définitions	149
12.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace	150
12.3 Combinaison linéaire	150
12.4 Base de \mathbf{V}_3 et composantes scalaires	151
12.5 Exercices	153
12.6 Solutions des exercices	155
13 Espace affine	156
13.1 Repère de l'espace ε	156
13.2 Calculs avec les coordonnées	157
13.2.1 Composantes d'un vecteur	157
13.2.2 Milieu d'un segment	158
13.2.3 Centre de gravité d'un triangle	158
13.3 Exercices	159
13.4 Solutions des exercices	160
14 La droite	161
14.1 Définitions	161
14.2 Equations paramétriques d'une droite	162
14.3 Position relative de deux droites dans l'espace	163
14.4 Traces d'une droite	164
14.5 Exercices	165
14.6 Solutions des exercices	167
15 Le plan	168
15.1 Définitions	168
15.2 Equations paramétriques d'un plan	169
15.3 Equation cartésienne d'un plan	170
15.4 Positions relatives d'une droite et d'un plan	171
15.5 Positions relatives de deux plans	172
15.6 Traces d'un plan	173
15.7 Exercices	174
15.8 Solutions des exercices	176
16 Produit scalaire	178
16.1 Définitions produit scalaire et norme	178
16.2 Orthogonalité	179
16.2.1 Vecteurs orthogonaux	179
16.2.2 Droites orthogonales	180
16.2.3 Droite et plan perpendiculaires	180
16.2.4 Plans perpendiculaires	181
16.3 Repère orthonormé	181
16.3.1 Définitions	181
16.3.2 Expression analytique du produit scalaire	182

16.3.3	Expression analytique de la norme	183
16.3.4	Vecteur normal à un plan	183
16.4	Exercices	184
16.5	Solutions des exercices	186
17	Distances	187
17.1	Distance de deux points	187
17.2	Distance d'un point à un plan	188
17.3	Distance d'un point à une droite	189
17.4	Exercices	190
17.5	Solutions des exercices	191
18	Angles	192
18.1	Angle de deux vecteurs	192
18.2	Angle de deux droites	192
18.3	Angle de deux plans	193
18.4	Angle d'une droite et d'un plan sécants	193
18.5	Exercices	194
18.6	Solutions des exercices	195
19	Produit vectoriel	196
19.1	Définitions et propriétés	196
19.1.1	Expression analytique du produit vectoriel	197
19.2	Applications du produit vectoriel	198
19.2.1	Détermination du vecteur normal à un plan	198
19.2.2	Aire d'un triangle	198
19.2.3	Distance d'un point à une droite	198
19.2.4	Perpendiculaire commune à deux droites gauches	199
19.2.5	Distance de deux droites gauches	199
19.3	Exercices	200
19.4	Solutions des exercices	201
20	Produit mixte	202
20.1	Définitions et propriétés	202
20.1.1	Expression analytique du produit mixte	203
20.2	Applications du produit mixte	203
20.2.1	Indépendance linéaire	203
20.2.2	Equation cartésienne d'un plan	204
20.2.3	Volume d'un parallélépipède	204
20.2.4	Volume d'un tétraèdre	204
20.2.5	Distance de deux droites gauches	204
20.3	Exercices	205
20.4	Solutions des exercices	206
21	La sphère	207
21.1	Définition	207
21.2	Equation cartésienne d'une sphère	207
21.3	Positions relatives d'une droite et d'une sphère	208
21.4	Positions relatives d'un plan et d'une sphère	209
21.5	Position relatives de deux sphères	210

21.6 Exercices	211
21.7 Solutions des exercices	213
Index	215

Première partie
Analyse

Chapitre 1

Continuité

Nous avons remarqué, dans le chapitre précédent, que la limite d'une fonction pour x tendant vers a peut souvent être obtenue en calculant tout simplement la valeur de cette fonction en a . Les fonctions qui possèdent cette propriété sont dites *continues* en a .

1.1 Définitions et propriétés

1.1.1 Continuité en un point

Définition 1.1

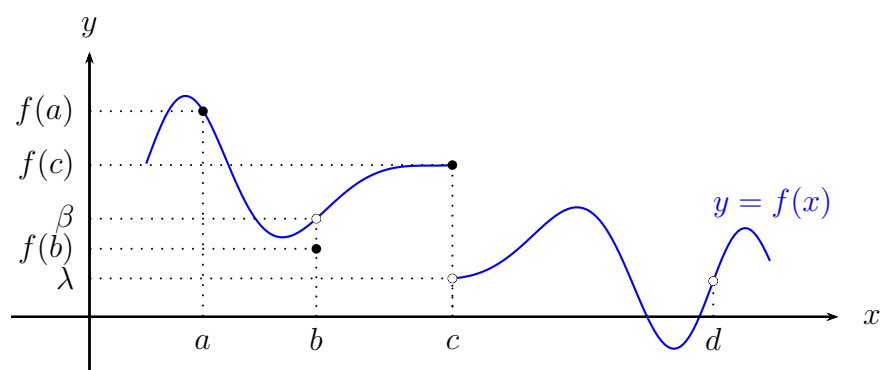
Une fonction f est **continue** en un point a si :

- elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a (voisinage),
- les limites à gauche et à droite en a existent et sont égales à $f(a)$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}$$

Lorsque f est définie sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a , on dit que f est **discontinue** en a (ou admet un point de discontinuité en a) si f n'est pas continue en a .

Exemples



La fonction f est continue en a car :

- elle est définie en a et sur un voisinage de a \rightarrow la première partie de la définition est respectée,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ \rightarrow la deuxième partie de la définition est respectée.

La fonction f n'est pas continue en b car :

- elle est définie en b et sur un voisinage de b \longrightarrow la première partie de la définition est respectée,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \beta \neq f(b)$ \longrightarrow la deuxième partie de la définition n'est pas respectée,

La fonction f n'est pas continue en d car :

- elle n'est pas définie en d \longrightarrow la première partie de la définition n'est pas respectée.

On observe un **trou** en b et en d .

La fonction f n'est pas continue en c car :

- elle est définie en c et sur un voisinage de c \longrightarrow la première partie de la définition est respectée,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ n'existe pas ($\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ et $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lambda$) \longrightarrow la deuxième partie de la définition n'est pas respectée.

On observe un **saut** en c .

Comme pour la notion de limite, il est possible de donner une définition plus rigoureuse de la notion de continuité, ce que nous faisons ci-dessous.

Définition 1.2 (Définition en $\varepsilon - \delta$)

Une fonction f est **continue** en un point a si :

- elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a (voisinage),
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La définition dit que f est continue en a si $f(x)$ s'approche de $f(a)$ lorsque x s'approche de a . Par conséquent, une fonction continue f est telle qu'une petite variation de x ne produit qu'une petite variation de $f(x)$. En fait, la variation de $f(x)$ peut être tenue aussi petite que l'on veut à condition de prendre la variation de x suffisamment petite.

D'après la définition en $\varepsilon - \delta$, il n'est pas possible de montrer qu'une fonction f est continue en a à l'aide de la représentation graphique de f . En effet, il faudrait envisager *tous* les voisinages possibles de $f(a)$ dans l'ensemble image, ce qui est impossible concrètement. Par contre, il est parfois possible, à l'aide de la représentation graphique de f , de montrer que f n'est pas continue. C'est ainsi que nous travaillerons principalement.

1.1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 1.3

Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** I si elle est continue en tout point de l'intervalle I .

Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $I = [a; b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]a; b[$ et si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Une fonction est continue sur une réunion d'intervalles si elle est continue sur chaque intervalle.

Définition 1.4 ("intuitive")

Une fonction f est continue sur un intervalle I si on peut dessiner sa représentation graphique, sur I , *sans lever le crayon*.

Il s'avère que la plupart des fonctions familières sont continues partout *sur leur domaine de définition*. C'est le cas pour :

- les fonctions polynomiales (continues sur \mathbb{R}),
- les fonctions rationnelles,
- les fonctions puissances et racines,
- les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques,
- les fonctions exponentielles et logarithmes.

Les phénomènes physiques sont généralement continus. Par exemple, le déplacement ou la vitesse d'un véhicule en mouvement varie de façon continue en fonction du temps, de même que la croissance en taille d'une personne. Par contre, des discontinuités se produisent dans des situations comme les courants électriques.

1.1.3 Propriétés des fonctions continues

Proposition 1.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si les fonctions f et g sont continues en a , alors :

1. $f + g$ est continue en a
2. $f - g$ est continue en a
3. $\lambda \cdot f$ est continue en a
4. $f \cdot g$ est continue en a
5. $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$

Si f est une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration. On ne démontre que la première propriété, la même technique de démonstration s'utilisant pour les autres cas. On utilise la définition de la continuité puis les propriétés des limites.

Soit f une fonction continue en a . f est donc définie sur un intervalle ouvert I_1 contenant a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Soit g une fonction continue en a . g est donc définie sur un intervalle ouvert I_2 contenant a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

Alors $f + g$ est définie sur $I = I_1 \cap I_2$, intervalle ouvert contenant a , et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) = (f + g)(a) \end{aligned}$$

□

Utilisation

Où $f(x) = \frac{\ln(x) + \arctan(x)}{x^2 - 1}$ est-elle continue ?

– La fonction $y = \ln(x)$ est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et la fonction $y = \arctan(x)$ est continue sur \mathbb{R} . Par l'énoncé 1 ci-dessus, la fonction $y = \ln(x) + \arctan(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

– La fonction $y = x^2 - 1$ est polynomiale et donc continue sur \mathbb{R} .

En tant que quotient, la fonction f est continue pour tout x strictement positif à l'exception des valeurs qui annulent $x^2 - 1$. Finalement, f est continue sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

1.1.4 Limites de fonctions composées

L'existence de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et de $\lim_{t \rightarrow L} g(t)$ ne suffit pas en général à déterminer la limite de la composition de fonctions $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$. Toutefois, on a les résultats suivants :

Proposition 1.2

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et si de plus g est continue en L , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(L)$$

Proposition 1.3

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert contenant a , sauf éventuellement en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$$

Remarque

La proposition 1.3 ci-dessus est le résultat qui permet d'utiliser le principe du changement de variable pour déterminer la valeur de certaines limites.

Exemples

1. Soient les fonctions $f(x) = 3 \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur

\mathbb{R} . La composée des fonctions f et g est $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{3 \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) - 1}$.

Par la proposition 1.2, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) - 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) - 1} = \sqrt{3 \cdot 1 - 1} = \sqrt{2}$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ et $3x \neq 0$ si $x \neq 0$, on peut écrire, par la proposition 1.3 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

1.2 Théorèmes fondamentaux sur les fonction continues

Nous présentons, dans ce chapitre, quatre théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions continues qui seront utilisés dans la suite du cours.

Théorème 1.4 (Continuité de la réciproque)

Soient I et J deux intervalles et une fonction $f : I \rightarrow J$ bijective et continue. Alors, la réciproque ${}^r f$ est continue sur l'intervalle J .

Intuitivement, la représentation graphique de ${}^r f$ est l'image de celle de f par une symétrie axiale d'axe $y = x$, de sorte que, si cette dernière courbe ne présente aucune interruption, celle qui se rapporte à ${}^r f$ n'en présentera pas non plus.

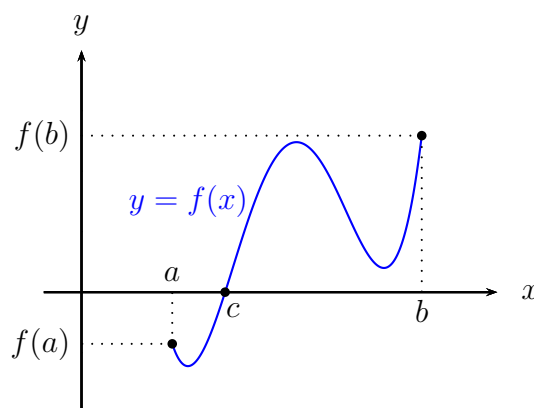
Théorème 1.5 (Théorème de Bolzano)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle ouvert $]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

Autrement dit, une fonction continue ne peut changer de signe qu'après s'être annulée.

Malgré son aspect intuitif, ce théorème ne peut être démontré qu'avec l'aide de la définition rigoureuse de la continuité.

Illustration



La représentation graphique de la fonction f coupe au moins une fois l'axe des abscisses, ici dans le point $(c; 0)$.

Application

On peut utiliser le théorème de Bolzano pour localiser des zéros d'une fonction f donnée. Ainsi, on est capable de répondre à la question suivante :

Déterminer à 0.01 près un zéro de la fonction $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ située entre 1 et 2.

On calcule tout d'abord

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Comme $f(1) < 0 < f(2)$, et comme f est une fonction polynomiale donc continue sur $[1; 2]$, le théorème de Bolzano affirme l'existence d'un nombre c situé entre 1 et 2 tel

que $f(c) = 0$. On peut localiser plus précisément ce zéro en divisant l'intervalle "en deux parties égales", puis en calculant l'image du "point milieu" et en la comparant aux images des deux bornes de l'intervalle pour déterminer un nouvel intervalle "plus étroit" dans lequel se situe au moins un zéro de f :

- $f(1.5) = 2.5 > 0$ et $f(1) < 0$; donc f s'annule dans $]1; 1.5[$.
- $f(1.2) = -0.128 < 0$ et $f(1.5) > 0$; donc f s'annule dans $]1.2; 1.5[$.
- $f(1.3) = 0.548 > 0$ et $f(1.2) < 0$; donc f s'annule dans $]1.2; 1.3[$.
- $f(1.25) = 0.1875 > 0$ et $f(1.2) < 0$; donc f s'annule dans $]1.2; 1.25[$.
- $f(1.22) = -0.007008 < 0$ et $f(1.25) > 0$; donc f s'annule dans $]1.22; 1.25[$.
- $f(1.23) = 0.056068 > 0$ et $f(1.22) < 0$; donc f s'annule dans $]1.22; 1.23[$.

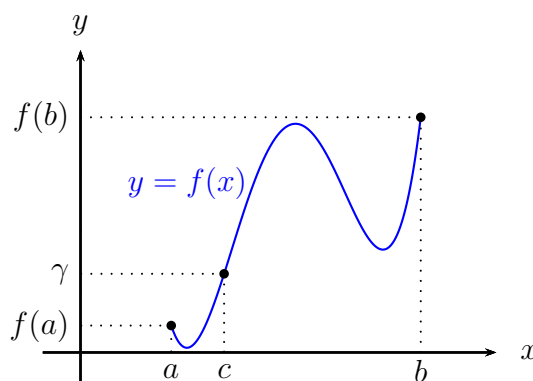
Ainsi, un zéro de f est égal à $x_0 = 1.22$, au centième par défaut (ce qui signifie que les deux premières décimales sont exactes).

Théorème 1.6 (Théorème de la valeur intermédiaire)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et $f(a) \neq f(b)$, alors pour tout nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans l'intervalle ouvert $]a; b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Attention, l'inverse n'est pas vrai! Pour un réel c strictement compris entre a et b , il n'existe pas nécessairement un γ entre $f(a)$ et $f(b)$ tel que $f(c) = \gamma$.

Illustration



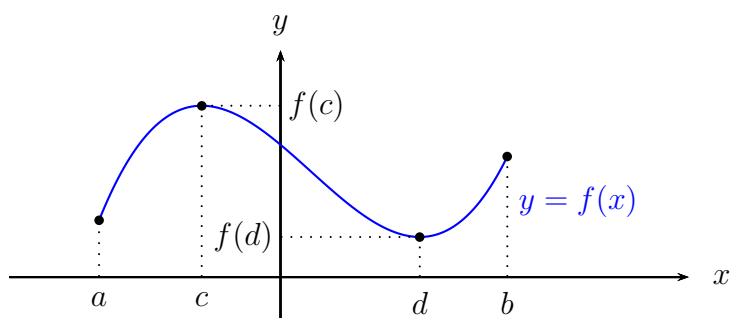
Le théorème de la valeur intermédiaire est présent dans la manière dont travaille un outil graphique. Un ordinateur calcule un nombre fini de points du graphe d'une fonction et allume les pixels où se trouvent ces points. Il suppose que la fonction est continue et retient toutes les valeurs intermédiaires entre deux points consécutifs. L'ordinateur connecte alors les pixels en allumant tous les pixels intermédiaires.

Théorème 1.7 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

L'image d'un intervalle fermé borné $[a; b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné.

Corollaire 1.8

Une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a; b]$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

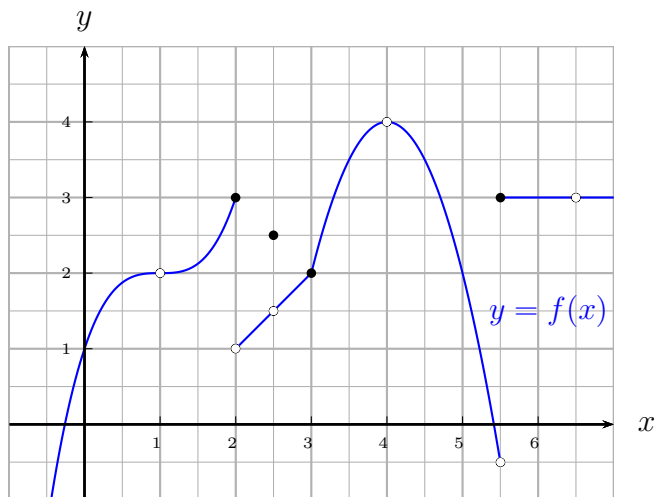
Illustration

L'image de l'intervalle fermé borné $[a; b]$ est l'intervalle fermé borné $[f(d); f(c)]$.

De plus, $f(c)$ est le maximum absolu de f sur $[a; b]$ et $f(d)$ est le minimum absolu de f sur le même intervalle.

1.3 Exercices

- 1) Donner les points où la fonction f , donnée ci-dessous par sa représentation graphique, n'est pas continue :



- 2) Où les fonctions suivantes sont-elles discontinues ?

a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- 3) Expliquez pourquoi les fonctions ci-dessous sont continues en chaque point de leur domaine de définition. Précisez ce domaine de définition.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 4x + 5}{6x^2 + x - 1}$

b) $f(x) = 3x + \sqrt{16 - x^2}$

c) $f(x) = e^{3x} \cdot \cos(2x - 1)$

d) $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$

e) $f(x) = \log(x^2 - 4)$

f) $f(x) = \sin(5\sqrt{2x-1})$

1.4 Solutions des exercices

1) La fonction f est discontinue pour les points : $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2,5$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5,5$ et $a_6 = 6,5$

2) a) En $a = 2$

b) En $a = 0$

c) La fonction f est continue sur \mathbb{R}

d) La fonction f est continue sur \mathbb{R}

3) a) $\mathcal{D}_f = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

b) $\mathcal{D}_f = [-4; 4]$

c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

d) $\mathcal{D}_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

e) $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

f) $\mathcal{D}_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

Chapitre 2

Asymptotes

2.1 Asymptotes verticales

Définition 2.1

La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** (A. V.) à la courbe $y = f(x)$ (représentant la fonction réelle f) si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

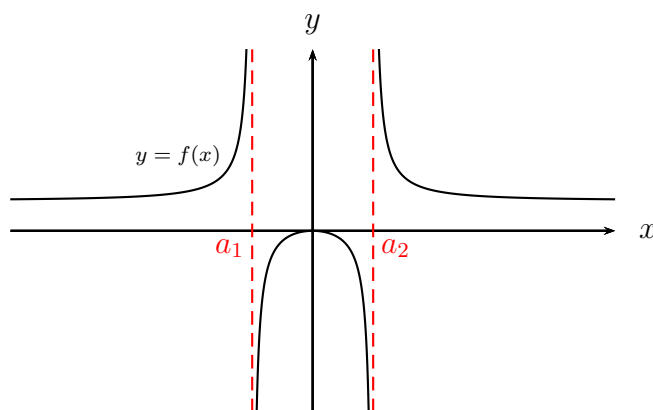
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Illustration



Remarques

1. On représentera généralement les asymptotes en "traitillés".
2. Une asymptote verticale ne peut exister que si la fonction est discontinue en $x = a$. Une fonction possédant une asymptote verticale en un point n'est pas définie en ce point ; il est donc important de chercher le domaine de définition de la fonction pour déterminer ses asymptotes verticales.
3. Soit f une fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes. Les asymptotes verticales à la courbe $y = f(x)$ sont à chercher parmi les droites d'équation $x = a$ où a est un zéro du polynôme $q(x)$.

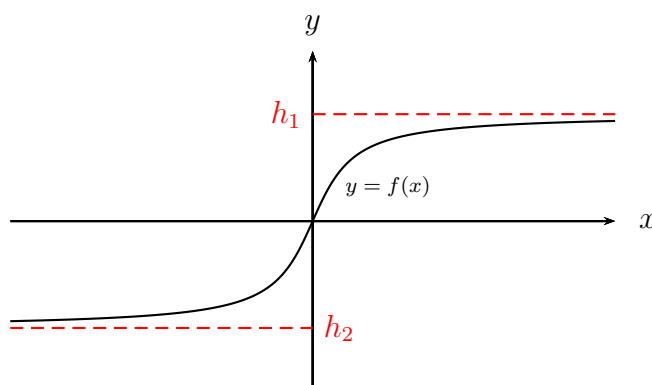
2.2 Asymptotes affines

Définition 2.2

La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** (A. H.) à la courbe $y = f(x)$ (représentant la fonction réelle f) vers $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h_1$.

La droite d'équation $y = h_2$ est une **asymptote horizontale** (A. H.) à la courbe $y = f(x)$ vers $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = h_2$.

Illustration



Remarque

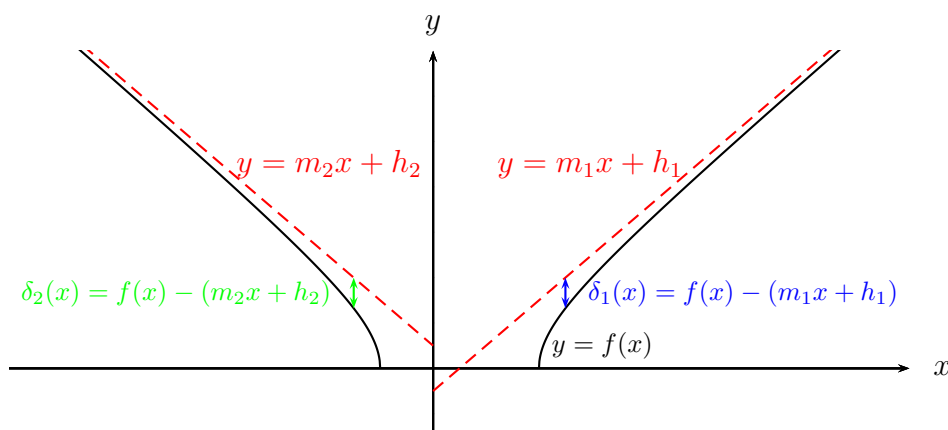
Une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ admet une asymptote horizontale si et seulement si $\deg(p(x)) \leq \deg(q(x))$. Si f admet une asymptote horizontale, celle-ci est la même à gauche et à droite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Définition 2.3

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** (A. O.) à la courbe $y = f(x)$ (représentant la fonction réelle f) vers $+\infty$ si on peut écrire $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec m et h des nombres réels et $\delta(x)$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$.

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** (A. O.) à la courbe $y = f(x)$ vers $-\infty$ si on peut écrire $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec m et h des nombres réels et $\delta(x)$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \delta(x) = 0$.

Illustration



Proposition 2.1

Si la droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique à la courbe $y = f(x)$ vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), alors les nombre réels m et h sont donnés par les formules suivantes :

$$\boxed{m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)}$$

(respectivement avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots$)

Démonstration. Soit la courbe $y = f(x)$ qui admet une asymptote oblique vers $+\infty$. Par définition, il existe donc des nombres réels m et h et une fonction $\delta(x) = f(x) - (mx + h)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$. Les égalités suivantes sont donc vraies :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - h) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{h}{x} \right) = 0$$

Or, pour que la dernière égalité soit vraie, il est nécessaire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{h}{x} \right) = 0$ pour obtenir un cas indéterminé du type " $\infty \cdot 0$ " (seule solution pour obtenir une limite égale à zéro car x tend vers $+\infty$). Ainsi, par les propriétés des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} m}_{=m} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h}{x}}_{=0} = 0$$

On obtient donc : $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

De plus, les égalités suivantes sont également correctes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - h) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} h}_{=h} = 0$$

On obtient finalement : $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

La démonstration est identique pour les cas $-\infty$. □

Remarques

1. **Attention !** L'asymptote affine (horizontale ou oblique) n'est pas forcément la même vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas.
2. Pour déterminer l'équation d'une asymptote oblique, il faut commencer par calculer m .
 - Si m tend vers l'infini, il n'y a pas d'asymptote affine.
 - Si $m = 0$, l'asymptote est horizontale (si h existe!).
 - Si m est un nombre réel différent de 0, l'asymptote est oblique (si h existe!).
3. Le signe de $\delta(x)$ permet de déterminer la position relative de la courbe $y = f(x)$ et de l'asymptote.

2.3 Exemples

Exemple 1

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$

Asymptotes verticales

Les zéros du dénominateur étant 1 et -2, le domaine de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$. Les asymptotes verticales possibles de f sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$.

▷ Pour $x = 1$, on a :

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{3} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$$

Ainsi la droite d'équation $x = 1$ n'est pas une asymptote verticale à la courbe $y = f(x)$. Le graphe de f possède un "trou" de coordonnées $(1; -\frac{1}{3})$.

▷ Pour $x = -2$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \stackrel{\frac{12}{0^+}}{=} +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \stackrel{\frac{12}{0^-}}{=} -\infty \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe $y = f(x)$.

Asymptotes horizontales

On calcule les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La courbe $y = f(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ vers $\pm\infty$.

Asymptotes obliques

Pas d'asymptote oblique car il existe une asymptote horizontale vers $\pm\infty$.

Position relative courbe / asymptote

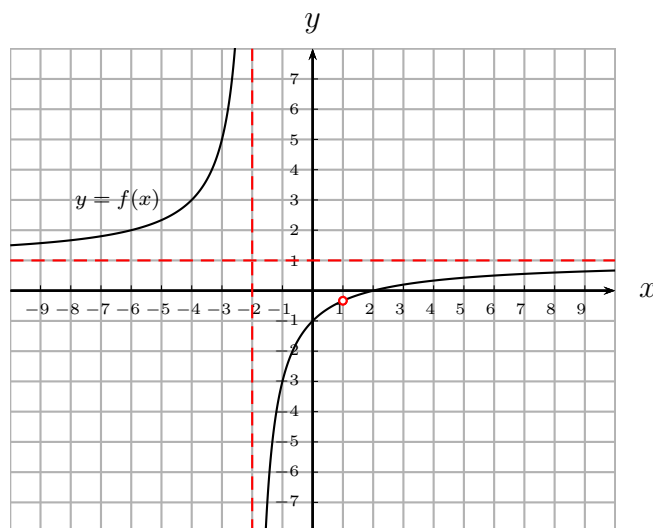
La position du graphe de f relativement à l'asymptote est donnée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (mx + h) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} - (0 \cdot x + 1) = \frac{-4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

On résume la situation dans le tableau de signes suivant.

x		-2		1	
$-4x + 4$		+	+	0	-
$x^2 + x - 2$		+	0	-	+
$\delta(x) = \frac{-4x + 4}{x^2 + x - 2}$		+		-	
Pos. rel. courbe / asymptote		dessus		dessous	

Représentation graphique



Exemple 2

Soit la fonction $g(x) = \frac{x^3 - 2x - 3}{(x + 1)^2}$

Asymptotes verticales

Le zéro du dénominateur étant -1 , le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. L'asymptote verticale possible de g est la droite d'équation $x = -1$. On a :

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 2x - 3}{(x+1)^2} \stackrel{\frac{-2}{0^+}}{=} -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 2x - 3}{(x+1)^2} \stackrel{\frac{-2}{0^+}}{=} -\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe $y = g(x)$.

Asymptotes horizontales

On calcule les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x - 3}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty$$

La courbe $y = g(x)$ n'admet pas d'asymptote horizontale vers $\pm\infty$.

Asymptotes obliques

On tente tout d'abord de calculer la valeur de la pente de l'asymptote oblique :

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Puis la valeur de l'ordonnée à l'origine :

$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 3}{(x + 1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 3x - 3}{(x + 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \end{aligned}$$

La courbe $y = g(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ vers $\pm\infty$.

Position relative courbe / asymptote

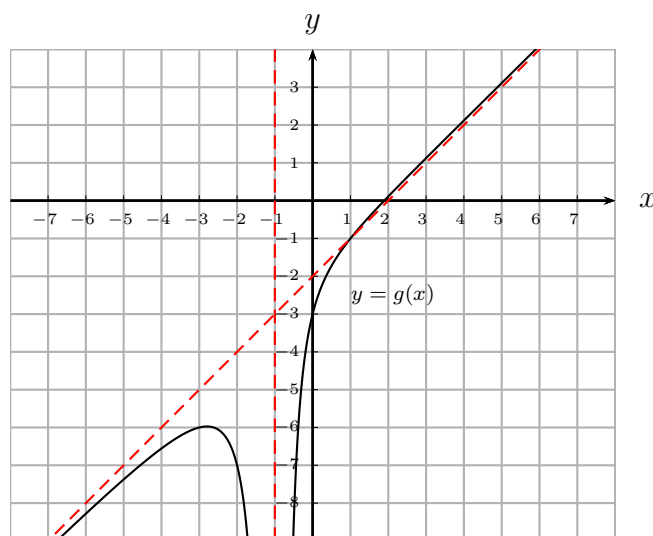
La position du graphe de f relativement à l'asymptote est donnée par le signe de :

$$\delta(x) = g(x) - (mx + h) = \frac{x^3 - 2x - 3}{(x + 1)^2} - (1 \cdot x - 2) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

On résume la situation dans le tableau de signes suivant.

x		-1		1	
$x - 1$	-	-	-	0	+
$(x + 1)^2$	+	0	+	+	+
$\delta(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$	-		-	0	+
Pos. rel. courbe / asymptote	dessous		dessous	coupe	dessus

Représentation graphique



Exemple 3

Soit la fonction $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Asymptotes verticales

Comme $\frac{1}{x}$ n'existe pas pour $x = 0$, le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'asymptote verticale possible de h est la droite d'équation $x = 0$. On a :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe $y = h(x)$.

Asymptotes horizontales

On calcule les limites de h lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

La courbe $y = f(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ vers $\pm\infty$.

Asymptotes obliques

Pas d'asymptote oblique car il existe une asymptote horizontale vers $\pm\infty$.

Position relative courbe / asymptote

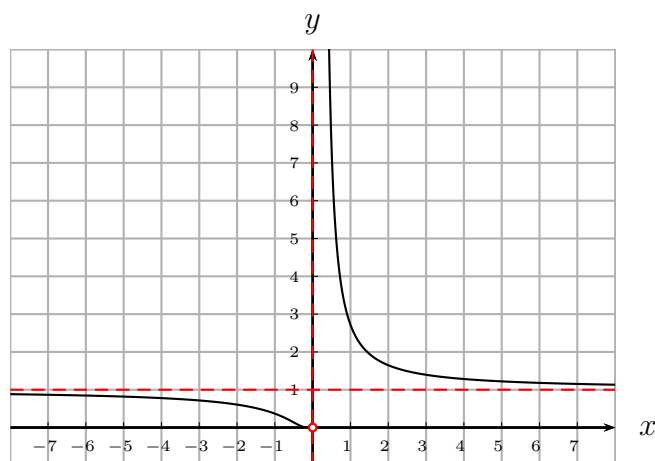
La position du graphe de f relativement à l'asymptote est donnée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (mx + h) = e^{\frac{1}{x}} - (0 \cdot x + 1) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

On résume la situation dans le tableau de signes suivant.

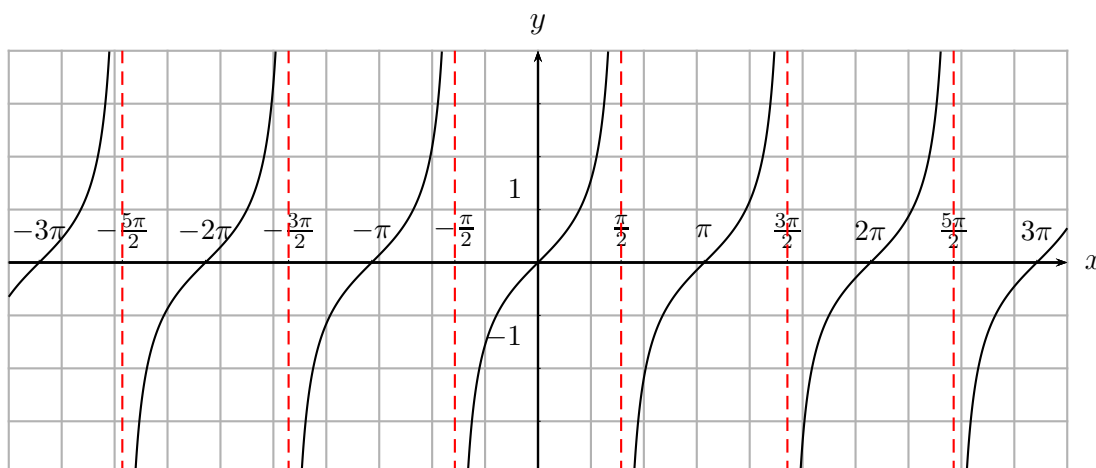
x		0	
$\delta(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$	-		+
Pos. rel. courbe / asymptote	dessous		dessus

Représentation graphique



Exemple 4

Les droites verticales d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, pour k entier, sont toutes les asymptotes de la courbe $y = \tan(x)$.



Chapitre 3

Dérivées

3.1 Exemples introductifs

3.1.1 Vitesse instantanée

Si on regarde le tachymètre d'une voiture pendant qu'on circule, on peut constater que l'aiguille ne reste pas en place très longtemps ; autrement dit la vitesse de la voiture n'est pas constante. Cette observation du tachymètre nous convainc que la voiture est animée d'une certaine vitesse à chaque instant, mais comment définir cette vitesse instantanée ? Pour répondre à cette question, on va examiner l'exemple d'une balle en chute libre et déterminer sa vitesse 5 secondes après qu'elle a été lâchée d'un point assez haut, par exemple le sommet de la tour Eiffel.

Galilée a découvert que la distance parcourue par un corps qui tombe librement est proportionnelle au carré du temps (en faisant abstraction de la résistance de l'air). Si $s(t)$ désigne la distance de chute après t secondes et est mesuré en mètres, on a :

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 \cong 4,9 \cdot t^2$$

avec $g \cong 9,8 [m/s^2]$. Il est difficile de déterminer la vitesse après 5 secondes car il s'agit d'envisager un seul instant ($t = 5$) et pas un intervalle de temps. On peut néanmoins approximer cette vitesse par la vitesse moyenne sur un bref intervalle de temps d'un dixième de seconde, de $t = 5$ à $t = 5.1$:

$$\begin{aligned} v_{\text{moyenne}} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{s(5 + 0.1) - s(5)}{0.1} = \frac{4,9 \cdot 5,1^2 - 4,9 \cdot 5^2}{0,1} \\ &= 49,49 [m/s] \end{aligned}$$

Dans le tableau ci-dessous on donne la vitesse moyenne, $v_{\text{moyenne}} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$, (avec $t_0 = 5$) sur des intervalles de temps de plus en plus petit.

Intervalle de temps	Vitesse moyenne ($[m/s]$)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

On constate que la vitesse moyenne s'approche de 49 [m/s] lorsque l'intervalle de temps diminue.

On définit alors la **vitesse instantanée** en t_0 , $v(t_0)$ comme la valeur limite des vitesses moyennes sur des périodes de plus en plus courtes à partir de t_0 :

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g}{2} \cdot \frac{2t_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g}{2} \cdot (2t_0 + h) = g \cdot t_0$$

3.1.2 Tangente

Le mot *tangente* vient du latin *tangens*, qui signifie "toucher". Une tangente à une courbe est alors une droite qui touche la courbe. En d'autres mots, une droite tangente devrait avoir la même direction que la courbe au point de contact.

On a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 . On pourra écrire l'équation de la tangente, t , à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $M_0(x_0; f(x_0))$ dès qu'on aura déterminé sa pente m . Or, on ne connaît qu'un seul point de t et il en faudrait deux pour pouvoir calculer sa pente. On peut obtenir une valeur approchée de m en choisissant un point voisin $M(x; f(x))$ sur la courbe et en calculant la pente m_{sec} de la sécante passant par les points M_0 et M :

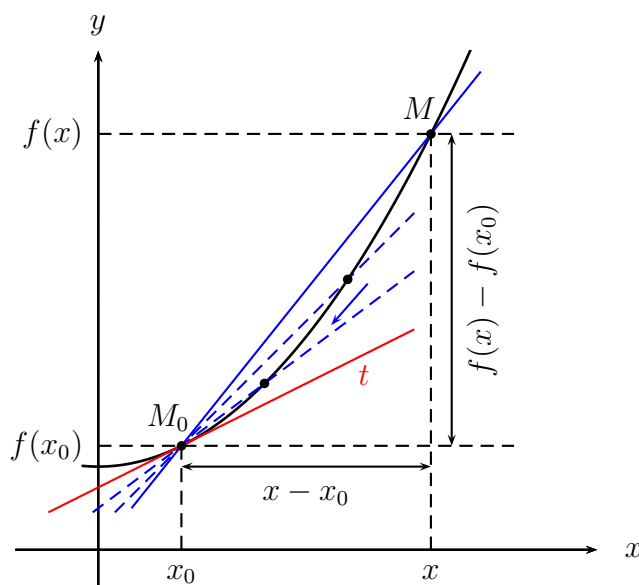
$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On fait ensuite glisser le point M le long de la courbe en direction de M_0 en faisant tendre x vers x_0 . La sécante (M_0M) pivote autour de M_0 et tend vers une droite limite qui correspond à la tangente à la courbe en M_0 .

La pente m de cette tangente est alors définie comme la *limite* des pentes des sécantes :

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Cette limite se notera $f'(x_0)$.



3.2 Définitions et propriétés

3.2.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Définition 3.1

La fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe dans \mathbb{R} .

Ce nombre réel, noté $f'(x_0)$, est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 (ou la **dérivée** de f en x_0) :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En posant $h = x - x_0 = \Delta x$ et $f(x) - f(x_0) = \Delta f$, on obtient la définition équivalente suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Le quotient $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ s'appelle le **taux de variation** de f entre x_0 et $x_0 + h$.

Sa limite $f'(x_0)$ lorsque h tend vers 0 s'appelle le **taux instantané de variation** de f en x_0 .

Remarque

Attention! Δx ne signifie pas $\Delta \cdot x$. Cela signifie "un petit accroissement de x ". On ne peut pas séparer le Δ du x .

Interprétation géométrique

L'interprétation géométrique du nombre dérivé est évidente par rapport aux illustrations données au début de ce chapitre.

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$, représentant la fonction f , au point x_0 .

L'équation de la tangente t au point $(x_0; f(x_0))$ peut s'écrire

$$t : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

On peut utiliser la définition donnée ci-dessus pour calculer le nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0 .

Exemples

1) Soit la fonction $f(x) = x^2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Si $x_0 = 3$, on obtient, par exemple, $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

2) Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

3.2.2 Nombre dérivé à gauche (à droite)

La notion de limite à gauche (respectivement à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) d'une fonction en un point.

Définition 3.2

Le **nombre dérivé à gauche** d'une fonction f en x_0 est défini par :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(si cette limite existe).

Le **nombre dérivé à droite** d'une fonction f en x_0 est défini par :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(si cette limite existe).

La fonction f est dérivable en x_0 si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et ont la même valeur (en raison des propriétés des limites).

3.2.3 Continuité et dérivabilité

Théorème 3.1

Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Démonstration. On suppose que la fonction f est dérivable en a et donc que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans \mathbb{R} . Pour démontrer que f est continue en a , il faut prouver que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (la fonction est bien définie sur un voisinage de a car la fonction est dérivable en a).

Pour tout élément $x \neq a$, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

On obtient alors, en utilisant les propriétés des limites, que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) \end{aligned}$$

□

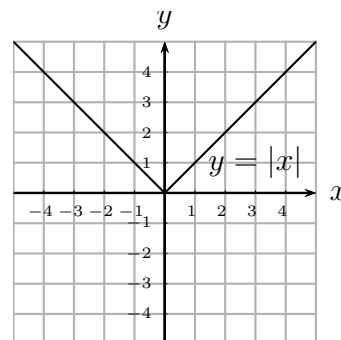
Remarque

Attention ! La réciproque de ce théorème est fautive : une fonction continue en a n'est pas forcément dérivable en a .

Par exemple, la fonction valeur absolue, $f(x) = |x|$, est continue en tout point de \mathbb{R} , mais elle n'est pas dérivable en $a = 0$.

Le nombre dérivé à gauche est donné par :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$



Tandis que le nombre dérivé à droite est donné par :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Ainsi, la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$ n'existe pas et la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en $a = 0$.

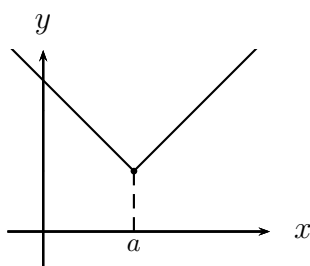
3.2.4 Point anguleux, point à tangente verticale, point de rebroussement

Définition 3.3

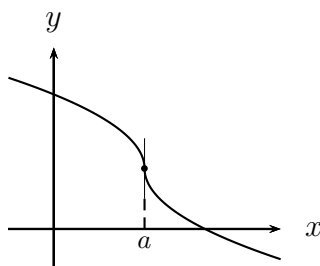
Le graphe d'une fonction f admet un **point anguleux** $(a; f(a))$ si f est continue en a et si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$.

Le graphe d'une fonction f admet une **tangente verticale** au point $(a; f(a))$ si f est continue en a et si $\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = +\infty$.

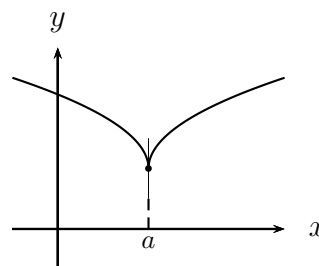
Ce point est un **point de rebroussement** si de plus $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ n'existe pas.



point anguleux



tangente verticale
pas de point de rebroussement



tangente verticale
point de rebroussement

3.2.5 Fonction dérivée

Définition 3.4

Une fonction f est **dérivable** sur une partie A de \mathbb{R} si elle est dérivable en tout point de A . On définit la **fonction dérivée** f' par :

$$\begin{aligned} f' : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Illustration

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{4} + 2$$

dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

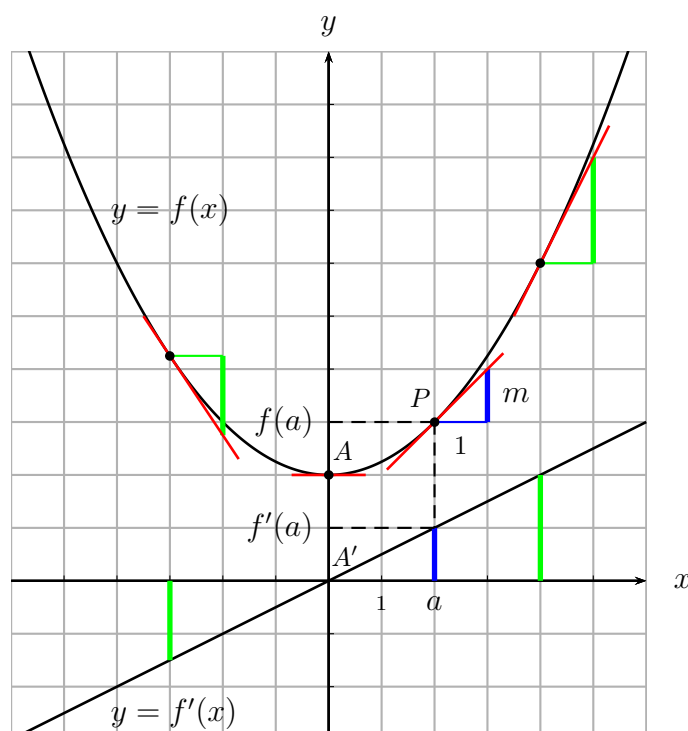
Si, en un point $(x; f(x))$ quelconque, on trace la tangente à la courbe et on détermine la pente de cette droite, on dispose d'une valeur de la fonction dérivée en ce point.

On peut, par exemple, considérer l'abscisse $a = 2$ et dessiner la tangente en $P(2; 3)$. La pente de la tangente en ce point vaut 1. Cette dernière est représentée par la longueur du segment m (en bleu sur le dessin).

Or, la pente de cette tangente correspond au nombre dérivé en $a = 2$: $f'(2) = 1$. Ceci nous permet de dessiner le point $(2; 1)$ de la représentation graphique de f' .

En répétant cette procédure pour plusieurs points (sur le dessin pour -3 et 4), on obtient petit à petit la représentation graphique de f' , qui dans notre cas correspond à une droite.

On peut remarquer que la tangente en $A(0; 2)$ est horizontale de sorte que la dérivée y est nulle et que la représentation graphique de f' coupe l'axe Ox en A' , situé juste sous A . Pour $x < 0$, les tangentes ont une pente négative de sorte que la valeur de $f'(x)$ est négative, tandis que pour $x > 0$ les tangentes ont une pente positive et les valeurs de $f'(x)$ correspondantes sont positives.



Algébriquement, on pourrait montrer que la fonction dérivée f' est donnée par (voir la suite du cours) :

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2}$$

Notations

Il existe plusieurs notations pour désigner la fonction dérivée (ou, plus simplement, la dérivée) d'une fonction $y = f(x)$:

$$f'(x) = y' = \dot{y} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

La dernière notation a été introduite par Leibniz. Elle remplace parfois avantageusement les autres notations, comme nous le verrons dans la suite du cours.

3.2.6 Dérivée d'ordre supérieur

Définition 3.5

On appelle **dérivée seconde** de f la fonction dérivée de f' , notée f'' . On a donc :

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Plus généralement, on appelle **dérivée d'ordre n** de f la fonction $f^{(n)}$ définie par :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a montré à la page 21 que $f'(x_0) = 2x_0$ et donc que la fonction dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$.

En utilisant la définition du nombre dérivé en x_0 appliquée à f' , on peut déterminer la valeur de la dérivée seconde de f en x_0 :

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2 = 2$$

La dérivée seconde de f est donc donnée par $f''(x) = 2$.

3.3 Règles de dérivation et calculs de dérivées

Dans la section précédente, nous avons vu comment interpréter des dérivées comme des pentes ou de taux de variation et comment estimer les dérivées de fonctions décrites par leur graphe. Nous avons également calculé, à partir de la définition, les dérivées de fonctions décrites par leur expression fonctionnelle.

Nous avons pu nous rendre compte à quel point il serait fastidieux de devoir toujours recourir à cette définition. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons mettre au point des règles de calcul des dérivées qui évitent ce recours à la définition.

3.3.1 Dérivées de fonctions usuelles

A partir de la définition de la dérivée, on peut construire une table des dérivées de fonctions usuelles.

Pour autant que les expressions ci-dessous aient un sens, on a ($\alpha \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$) :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} \quad (= 1 + \tan^2(x))$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} \quad (= -1 - \cot^2(x))$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$ x $	$\text{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Démonstration. Il est possible de démontrer l'ensemble des résultats donnés ci-dessus. Nous ne le réaliserons que partiellement durant le cours et ci-dessous.

1) Soit la fonction $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. A voir : $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition du nombre dérivé, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Et donc : $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

On pourrait également démontrer (un peut plus difficilement) que $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2) Soit la fonction $f(x) = \sin(x)$. A voir : $f'(x) = \cos(x)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition du nombre dérivé, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x_0) \cos(h) - \sin(x_0)}{h} + \frac{\cos(x_0) \sin(h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x_0) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Deux de ces quatre limites sont faciles à calculer. Puisque x_0 est considéré comme une constante quand h tend vers 0, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) = \sin(x_0)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0) = \cos(x_0)$.

De plus, on a vu dans le chapitre consacré aux calculs des limites que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$.

On peut alors conclure que :

$$f'(x_0) = \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0)$$

Et donc : $(\sin(x))' = \cos(x)$

□

3.3.2 Opérations élémentaires - dérivées

Proposition 3.2

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + g$, $f - g$, $\lambda \cdot f$ et $f \cdot g$ sont dérivables en a . Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a .

Les propriétés suivantes sont utiles pour le calcul des dérivées :

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\ (f - g)'(a) &= f'(a) - g'(a) \\ (\lambda \cdot f)'(a) &= \lambda \cdot f'(a) \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

Démonstration. Soit f et g deux fonctions dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) A voir : $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

2) A voir : $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$. Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$\begin{aligned} (f - g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(a) - g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) - (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) - g'(a) \end{aligned}$$

3) A voir : $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$. Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \cdot f'(a) \end{aligned}$$

- 4) A voir : $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(a) \cdot g(a))}{x - a}$$

On peut transformer l'expression dont on calcule la limite :

$$\begin{aligned} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(a) \cdot g(a))}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x)}{x - a} + \frac{f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(a) \cdot g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &\stackrel{*}{=} f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Pour poser la dernière égalité (*), on utilise le fait que la fonction g est continue en a (car dérivable en a) et donc que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, ainsi que les propriétés des limites.

- 5) A voir : $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$ (si $g(a) \neq 0$). Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a}$$

On peut transformer l'expression dont on calcule la limite :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} &= \frac{\frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a)}}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \\ &= \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} - \frac{f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)} \\ &\stackrel{**}{=} \frac{1}{g^2(a)} \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \right] \\ &= \frac{1}{g^2(a)} \left[g(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

Pour poser l'égalité (**), on utilise le fait que la fonction g est continue en a , ainsi que les propriétés des limites.

□

On peut utiliser ces propriétés pour calculer les dérivées de fonctions construites à l'aide de fonctions usuelles et des opérations élémentaires.

Exemples

1) Soit la fonction $f(x) = e^x + x^3$. On peut appliquer les règles données ci-dessus pour obtenir f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' + (x^3)' && \text{Règle de dérivation : somme de 2 fonctions.} \\ &= (e^x) + (3x^2) && \text{Dérivées des fonctions par rapport à } x. \\ &= e^x + 3x^2 && \text{Solution finale (simplifiée au maximum).} \end{aligned}$$

2) Soit la fonction $g(x) = \pi \cdot \tan(x)$. On peut appliquer les règles données ci-dessus pour obtenir g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \pi \cdot (\tan(x))' && \text{Règle de dérivation : produit d'un nombre réel et d'une fonction.} \\ &= \pi \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{Dérivée de la fonction par rapport à } x. \\ &= \frac{\pi}{\cos^2(x)} && \text{Solution finale (simplifiée au maximum).} \end{aligned}$$

3) Soit la fonction $h(x) = x^2 \cdot 3^x$. On peut appliquer les règles données ci-dessus pour obtenir h' :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2)' \cdot (3^x) + (x^2) \cdot (3^x)' && \text{Règle de dérivation : produit de 2 fonctions.} \\ &= 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x \cdot \ln(3)) && \text{Dérivées des fonctions par rapport à } x. \\ &= x \cdot 3^x \cdot (2 + x \cdot \ln(3)) && \text{Solution finale (simplifiée au maximum).} \end{aligned}$$

4) Soit la fonction $i(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On peut appliquer les règles de dérivation ci-dessus pour obtenir h' :

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(\sin(x))' \cdot (\cos(x)) - (\sin(x)) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} && \text{Règle de dérivation : quotient de deux fonctions.} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} && \text{Dérivées des fonctions par rapport à } x. \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{Développement, simplification, solution finale.} \end{aligned}$$

3.3.3 Composition de fonctions - dérivées

Proposition 3.3

Si f est une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est une fonction dérivable en a .

La propriété suivante est utile pour le calcul des dérivées :

$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a)$$

Démonstration. Soit f une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Par la définition du nombre dérivé en a , on a :

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$$

On peut transformer l’expression dont on calcule la limite (en supposant que $f(x) \neq f(a)$ sur un voisinage I de a , sauf en a , pour ne pas amplifier par 0, ce qui revient à dire que la fonction f ne soit pas *localement constante*) :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Finalement, on obtient que :

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{*}{=} \lim_{u \rightarrow b} \frac{g(u) - g(b)}{u - b} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a) \end{aligned}$$

Pour poser l'égalité (*), on utilise le fait que la fonction f est continue en a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$) et la fonction g en $f(a)$ et on pose $f(x) = u$ (changement de variable, voir propositions sur les limites de fonctions composées) et $f(a) = b$.

Remarque : si $f(x) = f(a)$ sur un voisinage I de a , on ne peut pas amplifier par $f(x) - f(a)$ qui vaut zéro sur cette intervalle. Or, dans ce cas, la fonction f est constante sur I et $g \circ f$ également. Donc, la pente de la tangente en a est nulle pour le graphe de f et pour le graphe de $g \circ f$. Par conséquent, $f'(a) = 0$ et $(g \circ f)'(a) = 0$, donc la formule, $(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a)$ est également vérifiée dans ce cas, ce qui achève complètement la démonstration. □

Une méthode de calcul

Soit la fonction $f(x) = \cos(\sqrt{2x})$, qui peut être obtenue en composant 3 fonctions élémentaires (voir ci-dessous). On présente ici une méthode qui permet de calculer sa dérivée, $f'(x)$, et plus généralement la dérivée de toute fonction composée.

Les étapes de cette méthode sont les suivantes :

1. On décompose la fonction en une composition de fonctions simples, dont **on connaît la dérivée**. Pour faire ceci, il suffit, en général, de penser à la manière dont vous calculeriez l'image d'un point sur votre machine. On écrit cette décomposition sur la première ligne du schéma de calculs proposé ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) : & x & \xrightarrow{g(x)=2x} & 2x & \mapsto & \sqrt{2x} & \mapsto & \cos(\sqrt{2x}) \\ & & & & & & & & & y & \xrightarrow{h(y)=\sqrt{y}} & \sqrt{y} & \mapsto & \cos(\sqrt{y}) \\ & & & & & & & & & & & z & \xrightarrow{i(z)=\cos(z)} & \cos(z) \\ & & & & & & & & & & & & & & -\sin(z) \\ & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

2. On pose $y = 2x$ et on écrit la deuxième ligne. Celle-ci est simplement la composée des fonctions mais en partant de la "deuxième étape" : comme si la valeur de $2x$ était connue. Cette opération doit être effectuée jusqu'à obtenir une ligne avec une seule fonction.
3. On calcule alors la dérivée de la première fonction de chaque ligne (en couleur sur le schéma). Ceci revient à calculer les dérivées de $g(x)$ (par rapport à x), $h(y)$ (par rapport à y) et $i(z)$ (par rapport à z). Ces dérivées sont écrites sur la dernière ligne du schéma.
4. Il suffit alors de les multiplier pour obtenir $f'(x)$. On a dans notre cas :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (-\sin(z)).$$

5. On doit encore réaliser une dernière étape : donner la dérivée par rapport à x . Il faut pour cela remplacer y et z dans $f'(x)$ par l'expression en x qui se trouve sur la première ligne à la verticale de la variable. On obtient :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (-\sin(\sqrt{2x}))$$

En simplifiant un peu l'écriture, on a finalement :

$$f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}.$$

6. Le petit schéma fléché devrait être une aide pour les personnes qui débutent dans le calcul de la dérivée d'une fonction composée. Avec le temps, on devrait pouvoir s'en passer.

Exemples

- 1) Soit la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$. On peut appliquer la méthode décrite ci-dessus pour obtenir f' . On commence par écrire f comme la composée de deux fonctions simples qu'on dérive ensuite :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x) : & x & \xrightarrow{g(x)=\sin(x)} & \sin(x) & \mapsto & e^{\sin(x)} & \\
 & & & y & \xrightarrow{h(y)=e^y} & e^y & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cos(x) & \cdot & e^y & &
 \end{array}$$

La dérivée de f est alors déterminée en réalisant le produit des éléments de la dernière ligne et en remplaçant y par l'expression en x correspondante.

$$f'(x) = \cos(x) \cdot e^y = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

2) Soit la fonction $f(x) = \ln(\sin(4x))$. En appliquant la méthode décrite ci-dessus, on peut poser que :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x) : & x & \xrightarrow{g(x)=4x} & 4x & \mapsto & \sin(4x) & \mapsto & \ln(\sin(4x)) \\
 & & & y & \xrightarrow{h(y)=\sin(y)} & \sin(y) & \mapsto & \ln(\sin(y)) \\
 & & & & & z & \xrightarrow{i(z)=\ln(z)} & \ln(z) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & 4 & \cdot & \cos(y) & \cdot & & \frac{1}{z} &
 \end{array}$$

La dérivée de f est alors donnée par :

$$f'(x) = 4 \cdot \cos(y) \cdot \frac{1}{z} = 4 \cdot \cos(4x) \cdot \frac{1}{\sin(4x)} = 4 \cot(4x)$$

3.3.4 Fonctions réciproques - dérivées

Proposition 3.4

Soit une fonction f bijective et continue sur un intervalle ouvert contenant a . Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors ${}^r f(x)$ est dérivable en $b = f(a)$.

La propriété suivante est utile pour le calcul des dérivées :

$$\begin{aligned}
 ({}^r f)'(b) &= \frac{1}{f'({}^r f(b))} \\
 ({}^r f)'(f(a)) &= \frac{1}{f'(a)}
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert contenant a et une fonction $f : I \rightarrow J$ bijective et continue. Il existe alors une fonction réciproque de f , ${}^r f : J \rightarrow I$, continue sur l'intervalle J .

Considérons le point $b \in J$ tel que $f(a) = b$. Comme ${}^r f$ est continue, on a :

$$a = {}^r f(b) = \lim_{y \rightarrow b} {}^r f(y)$$

Ainsi, en remarquant que, pour tout élément $y \neq b$ de J ,

$$\frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{y - b} = \frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{f({}^r f(y)) - f({}^r f(b))} = \frac{1}{\frac{f({}^r f(y)) - f(a)}{{}^r f(y) - a}}$$

on obtient que

$$({}^r f)'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{y - b} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

par les propriétés des limites et en posant $x = {}^r f(y)$.

On peut également comprendre cette propriété (la démonstration est alors moins précise que celle donnée ci-dessus) en remarquant que pour tout x de l'intervalle I l'égalité suivante est vraie :

$${}^r f(f(x)) = x$$

On dérive alors les deux membres de cette équation par rapport à x en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées (méthode de la *dérivation implicite*) :

$$(f)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ou

$$(f)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Pour $x = a$, on obtient bien que $f'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. □

Remarque

La plupart des fonctions que nous avons rencontrées jusqu'ici admettent une description où l'une des variables est exprimée explicitement par rapport à l'autre variable, par exemple $y = \sqrt{x^3 + 1}$ (ou de façon générale $y = f(x)$). Certaines fonctions, par contre, sont définies implicitement par une relation qui lie x et y , comme par exemple $x^2 + y^2 = 25$.

On peut utiliser la méthode de la **dérivation implicite** pour calculer la dérivée y' en un point $P(x_0; y_0)$ donné (et déterminer ainsi, par exemple, la pente de la tangente à la courbe, définie par l'équation qui lie x et y , au point P). Elle consiste à dériver les deux membres de l'équation par rapport à x (exemple : $2x + 2y \cdot y' = 0$) et à résoudre ensuite l'équation qui en résulte par rapport à y' (exemple : $y' = -\frac{x}{y}$).

Exemple

- 1) La fonction réciproque de la fonction sinus, $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$, est la fonction arcsinus définie par la relation

$$y = \arcsin(x) \iff \sin(y) = x$$

pour $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Comme $\sin'(y) = \cos(y)$, on a, en utilisant la propriété démontrée ci-dessus, :

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

comme $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$ pour $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

- 2) La fonction réciproque de la fonction tangente, $\tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, est la fonction arctangente définie par la relation

$$y = \arctan(x) \iff \tan(y) = x$$

pour $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

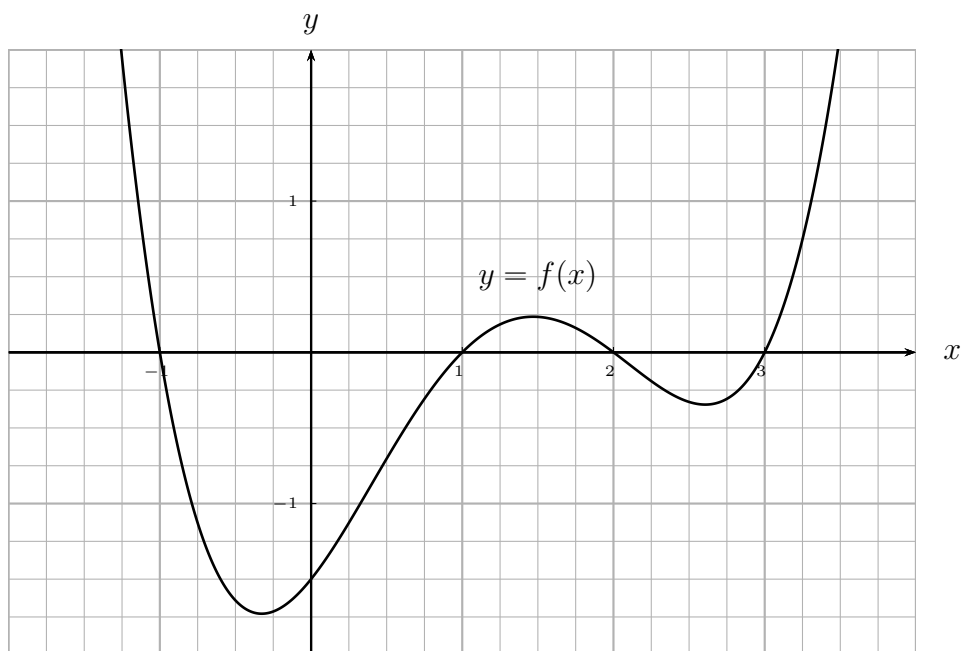
Comme $\tan'(y) = 1 + \tan^2(y)$, on a, en utilisant la propriété démontrée ci-dessus, :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

3.4 Exercices

1) A l'aide de la représentation graphique de la fonction f donnée ci-dessous, indiquer les valeurs approximatives de x pour lesquelles :

a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$ c) $f'(x) = 1$ d) $f'(x) = -4$ $f'(x) = -\frac{1}{2}$



2) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Simplifier le résultat au maximum.

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = 2x^3 + 2x + 6$

c) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

d) $f(x) = \tan(x) - x$

e) $f(x) = (x + 5)(x - 3)$

f) $f(x) = (3x^2 + 5)(x^2 - 1)$

g) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

i) $f(x) = \frac{x + 5}{x - 1}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

k) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{2x^2 - x + 1}$

l) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

m) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

n) $f(x) = e^{\sin(x)}$

o) $f(x) = \cos^3(\sqrt{x})$

p) $f(x) = \ln(\sin(4x))$

3) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Simplifier le résultat au maximum.

a) $f(x) = 4x^2 - 5x - 4$

b) $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 3x$

c) $f(x) = \frac{x+4}{2x-5}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

e) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

f) $f(x) = (x^2-1) \cdot (x^2+2x+1)$

g) $f(x) = (x^4+1) \cdot (x^4+8x^2-9)$

h) $f(x) = \frac{1}{x^3+7}$

i) $f(x) = (3x+1)^2$

j) $f(x) = (6x-1)^3$

k) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

l) $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(4x+1)^2}$

m) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

n) $f(x) = \sqrt{x^2+5x-1}$

o) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+3}$

p) $f(x) = \frac{3}{(1-x^2)^2}$

q) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

r) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$

s) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

t) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

u) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

v) $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$

w) $f(x) = \sin^3(x) \cdot \cos(x)$

x) $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 \cdot \cos^2(x)}$

4) Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Simplifier le résultat au maximum.

a) $f(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$

b) $f(x) = \ln(3x)$

c) $f(x) = \ln(\ln(x))$

d) $f(x) = \ln(e^x)$

e) $f(x) = \sqrt{x + \tan(x)}$

f) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}\right)$

g) $f(x) = \sin(\ln(x))$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \ln(x^2+x)$

j) $f(x) = 7^{x^2+2x}$

k) $f(x) = 3 \cdot e^{\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

m) $f(x) = e^x \cdot (1 - x^2)$

n) $f(x) = e^{\sin(x)}$

o) $f(x) = \arctan(2 - x)$

p) $f(x) = x^x$

3.5 Solutions des exercices

1) a) $x = -1, 1, 2, 3$

b) $x \cong -0.3, 1.45, 2.6$

c) $x \cong -0.1, 1, 2.8$

d) $x \cong -0.8$

e) $x \cong -0.4, 1.75, 2.4$

2) a) $f'(x) = -3$

b) $f'(x) = 2 \cdot (3x^2 + 1)$

c) $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

d) $f'(x) = \tan^2(x)$

e) $f'(x) = 2 \cdot (x + 1)$

f) $f'(x) = 4x \cdot (3x^2 + 1)$

g) $f'(x) = 2 \cos^2(x) - 1$

h) $f'(x) = e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$

i) $f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$

j) $f'(x) = \frac{-x^2 - 8x + 9}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-x - 9}{(x-1)^3}$

k) $f'(x) = \frac{-7x^2 + 22x - 2}{(2x^2 - x + 1)^2}$

l) $f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$

m) $f'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$

n) $f'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$

o) $f'(x) = \frac{-3 \cos^2(\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

p) $f'(x) = 4 \cot(4x)$

3) a) $f'(x) = 8x - 5$

b) $f'(x) = 16x^3 - 10x + 3$

c) $f'(x) = -\frac{13}{(2x-5)^2}$

d) $f'(x) = \frac{x \cdot (2-x)}{(1-x)^2}$

e) $f'(x) = \frac{x^3 - 2}{x^3}$

f) $f'(x) = 2 \cdot (x+1)^2 \cdot (2x-1)$

g) $f'(x) = 8x \cdot (x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 2)$

h) $f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3+7)^2}$

i) $f'(x) = 6 \cdot (3x+1)$

j) $f'(x) = 18 \cdot (6x-1)^2$

k) $f'(x) = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$

l) $f'(x) = \frac{12 \cdot (2x-1)}{(4x+1)^3}$

m) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

n) $f'(x) = \frac{2x+5}{2 \cdot \sqrt{x^2+5x-1}}$

o) $f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}}$

p) $f'(x) = \frac{12x}{(1-x^2)^3}$

q) $f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

r) $f'(x) = \frac{5x^4}{(1 + x)^6}$

s) $f'(x) = \frac{1}{(1 - 4x^2) \cdot \sqrt{1 - 4x^2}}$

t) $f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

u) $f'(x) = \frac{1}{(x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

v) $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$

w) $f'(x) = \sin^2(x) \cdot (4 \cdot \cos^2(x) - 1)$

x) $f'(x) = \frac{1 + \sin^2(x)}{2 \cdot \cos^3(x)}$

4) a) $f'(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $f'(x) = \frac{1}{x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

d) $f'(x) = 1$

e) $f'(x) = \frac{2 + \tan^2(x)}{2 \cdot \sqrt{x + \tan(x)}}$

f) $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

g) $f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

h) $f'(x) = \frac{2}{1 - x^2}$

i) $f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

j) $f'(x) = 7^{x^2+2x} \cdot \ln(7) \cdot (2x + 2)$

k) $f'(x) = \frac{3 \cdot e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x}}$

l) $f'(x) = \frac{2 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$

m) $f'(x) = e^x \cdot (1 - 2x - x^2)$

n) $f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

o) $f'(x) = \frac{-1}{1 + (2 - x)^2}$

p) $f(x) = (1 + \ln(x)) \cdot x^x$

Chapitre 4

Applications des dérivées

4.1 Dérivées et tangentes à des courbes

Comme nous l'avons défini au paragraphe 3.1.2, une tangente à une courbe est une droite qui touche la courbe en exactement un point.

Si on considère la courbe d'équation $y = f(x)$, représentant une fonction réelle f , la tangente à cette courbe au point $T(a; f(a))$ est la droite qui passe par $(a; f(a))$ et dont la pente est égale à $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a (voir paragraphes 3.1.2 et 3.2.1).

Nous allons présenter ci-dessous deux méthodes de calcul de l'équation de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ dans le cas où le point de tangence est connu et celui où il est à déterminer.

Rappel

1. L'équation d'une droite de pente m est de la forme :

$$y = mx + h$$

où h est l'ordonnée à l'origine.

2. L'équation d'une droite de pente m et passant par le point $A(x_0; y_0)$ est de de la forme :

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

4.1.1 Calcul de la tangente avec point de tangence connu

Si le point de tangence $T(a; f(a))$ est donné, le problème est "simple" à résoudre.

Marche à suivre pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point T :

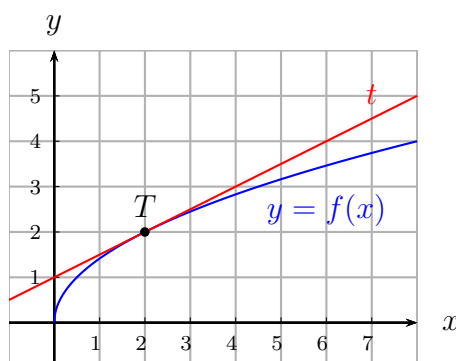
1. Calculer $m = f'(a)$, la pente de la tangente.
2. Introduire les coordonnées du point de tangence $(a; f(a))$ dans l'équation de la tangente : $y - f(a) = m \cdot (x - a)$.
3. Transformer l'équation de la tangente pour obtenir une équation de la forme $y = mx + h$.

Exemple

Soient la fonction $f(x) = \sqrt{2x}$ et le point $T(2; 2)$. Donner l'équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ passant par le point T .

Le point T appartient à la courbe ($f(2) = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$). T est bien le point de tangence. On peut donc suivre la méthode proposée ci-dessus.

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$
2. $y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$
3. $t : y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$

**4.1.2 Calcul de la tangente avec point de tangence inconnu**

Si le point de tangence n'est pas donné, le problème est un peu plus compliqué.

Marche à suivre pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ passant par le point $A(x_0; y_0)$ (n'appartenant pas à cette courbe) :

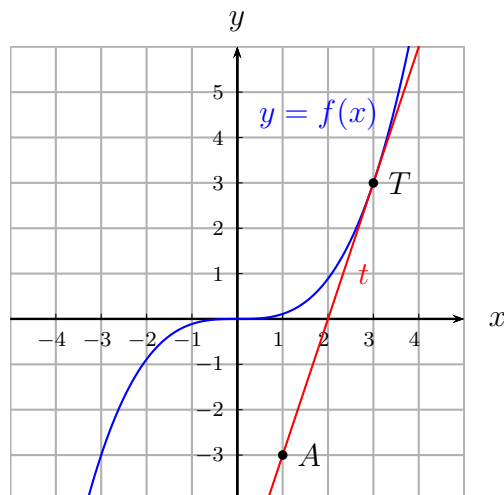
1. Calculer $f'(x)$.
2. Poser $T(x_T; f(x_T))$ pour le point de tangence et $y - f(x_T) = f'(x_T) \cdot (x - x_T)$ pour l'équation de la tangente.
3. Calculer x_T à partir de l'équation $y_0 - f(x_T) = f'(x_T) \cdot (x_0 - x_T)$ (équation obtenue en remplaçant x et y par la coordonnées de A , un point connu de la tangente).
4. Calculer $y_T = f(x_T)$ et $m = f'(x_T)$.
5. Introduire les coordonnées du point de tangence $(x_T; y_T)$ dans l'équation de la tangente : $y - y_T = m \cdot (x - x_T)$.
6. Transformer l'équation de la tangente pour obtenir une équation de la forme $y = mx + h$.

Exemple

Soient la fonction $f(x) = \frac{x^3}{9}$ et le point $A(1; -3)$. Donner l'équation de la tangente t à la courbe $y = f(x)$ passant par le point A .

Comme le point A n'appartient pas à la courbe ($f(1) = \frac{1^3}{9} = \frac{1}{9}$), on peut utiliser la méthode proposée ci-dessus.

1. $f'(x) = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$
2. $T(x_T; f(x_T))$ et $t : y - f(x_T) = f'(x_T) \cdot (x - x_T)$
3. Equation à résoudre : $-3 - \frac{x_T^3}{9} = \frac{x_T^2}{3} \cdot (1 - x_T)$. En développant, on obtient l'équation $2x_T^3 - 3x_T^2 - 27 = 0$. Par tâtonnement, on trouve $x_T = 3$.
4. $y_T = f(3) = \frac{3^3}{9} = 3$ et $m = f'(3) = \frac{3^2}{3} = 3$.
5. $y - 3 = 3 \cdot (x - 3)$.
6. $y = 3x - 6$.



4.1.3 Angle entre deux courbes

Définition 4.1

Soient deux fonctions f et g telles que $f(a) = g(a)$.

L'**angle entre les deux courbes** d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ en leur point d'intersection I d'abscisse a est l'angle aigu entre les droites tangentes aux deux courbes au point I .

Rappel

L'angle aigu α entre deux droites d et d' non verticales de pentes respectives m et m' vérifie l'équation :

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m' - m}{1 + m' \cdot m} \right|$$

Exemple

Soient les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et un point d'intersection de leurs représentations graphiques $I(1; 1)$. Pour déterminer l'angle entre les deux courbes au point I , il faut tout d'abord déterminer les pentes des droites tangentes aux deux courbes :

1. $f'(x) = 2x \rightarrow m = f'(1) = 2$
2. $g'(x) = 3x^2 \rightarrow m' = g'(1) = 3$

On calcule ensuite l'angle aigu α en utilisant la relation donnée ci-dessus :

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} \right| = \frac{1}{7}$$

et la fonction réciproque de la fonction tangente : $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = 8.13^\circ$.

4.2 Théorèmes relatifs aux fonctions dérivées

Nous présentons, dans ce chapitre, quatre théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions dérivées qui seront utiles soit pour décrire l'allure de la représentation graphique d'une fonction dérivable f , soit pour calculer certaines limites.

Avant de passer à l'étude de ces théorèmes, il est utile de rappeler deux résultats rencontrés dans la partie du cours concernant les fonctions continues.

Rappel : théorèmes sur les fonctions continues

Théorème 4.1

Soit f une fonction continue sur un ensemble D .

L'image par f d'un intervalle fermé borné $I = [a; b] \subset D$ est un intervalle fermé borné $[m; M]$, où m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f sur I .

Théorème 4.2

Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$. Quel que soit γ , $\gamma \in [m; M]$ (image de $[a; b]$), il existe au moins un c , $c \in [a; b]$, tel que $f(c) = \gamma$.

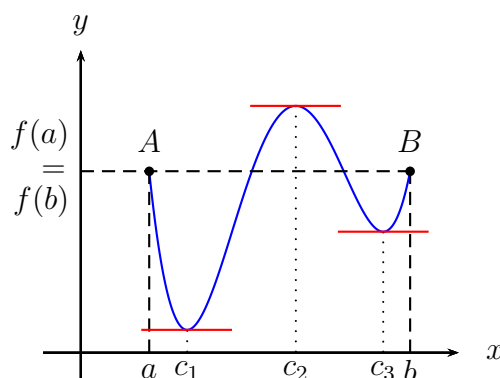
4.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 4.3 (Théorème de Rolle)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a; b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

Illustration



Autrement dit, entre les points A et B de même ordonnée, il existe au moins un point à tangente horizontale.

Démonstration. Soient un intervalle $[a; b]$ et f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.

Puisque la fonction f est continue sur $[a; b]$, elle admet une borne inférieure m et une borne supérieure M sur $[a; b]$. Deux cas sont alors possibles :

- $M = m$. Dans ce cas, f est une fonction constante. On a donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a; b[$.
- $M > m$. Dans ce cas, f prend sur $[a; b]$ des valeurs différentes de $f(a) = f(b)$. Pour fixer les idées, on suppose que f prend des valeurs supérieures à $f(a) = f(b)$ (sans perte de généralité). Comme f est continue sur $[a; b]$, elle possède une borne supérieure M . De plus, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = M$ (comme $M \neq f(a) = f(b)$; voir théorèmes ci-dessus).

Comme M est une borne supérieure, $f(c+h) - f(c) \leq 0$ pour h positif ou négatif. Il en résulte que si

- $h > 0$: $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$
- $h < 0$: $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

Ainsi, comme f est une fonction dérivable en c , on obtient le résultat suivant en considérant les nombres dérivés à gauche et à droite :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\leq 0} = 0$$

□

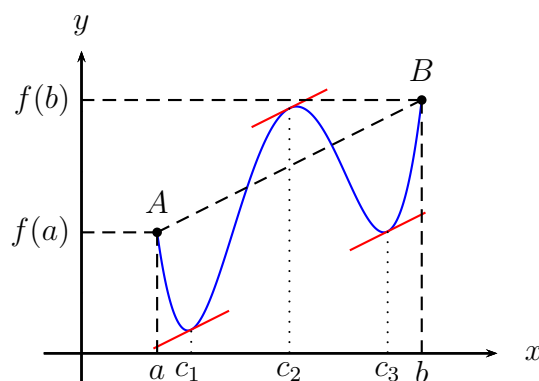
4.2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.4 (Théorème des accroissements finis (ou de Lagrange))

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$, alors il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Illustration



La pente de la sécante $[AB]$ est égale à $m_{[AB]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui est la même expression que celle du membre de droite de l'équation ci-dessus. Comme $f'(c)$ est la pente de la tangente au point $(c; f(c))$, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins un point $P(c; f(c))$ sur la courbe en lequel la tangente présente la même pente que celle de la sécante $[AB]$.

Démonstration. Soient un intervalle $[a; b]$ et f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.

On définit une nouvelle fonction g (voir ci-dessous pour l'interprétation géométrique) :

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right]$$

La dérivée de g est donnée par :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle :

- g est continue sur $[a; b]$ car f et h , définie par $h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ (fonction polynôme), sont continues sur $[a; b]$,
- g est dérivable sur $]a; b[$ car f et h sont dérivables sur $]a; b[$,
- $g(a) = g(b) = 0$ par calcul ou par l'interprétation géométrique.

Ainsi, par le théorème de Rolle appliqué à la fonction g , il existe au moins un $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. En transformant cette égalité, on obtient le résultat du théorème : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. \square

Remarques

1. Comment comprendre la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a) \right]$?
En fait, $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ est l'équation de la sécante $[AB]$. Par conséquent, pour chaque valeur de x , $g(x)$ est égale à la différence des ordonnées de la courbe $y = f(x)$ et de la sécante $[AB]$ pour les points de même abscisse x .
2. En général les valeurs de c sont bien déterminées mais inconnues. Le théorème des accroissements finis, comme le théorème de Rolle, affirme l'existence d'un c au moins, sans qu'il soit possible de le calculer toujours effectivement.
3. Autres formulations du théorème des accroissements finis :
 - a. $f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'(c)$ avec $a < c < b$
 - b. Si $b = x_0 + h$ et $a = x_0$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \theta \cdot h)$ avec $0 < \theta < 1$

4.2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 4.5 (Théorème de Cauchy)

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$, dérivables sur l'intervalle $]a; b[$, si $g(a) \neq g(b)$ et si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a; b[$, alors il existe au moins un nombre c dans l'intervalle $]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème des accroissements finis. On définit une nouvelle fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

qui vérifie les hypothèses du théorème de Rolle (à montrer). Il existe donc au moins un $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, comme $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$, on obtient que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. \square

Remarque

Le théorème de Cauchy ne peut pas être démontré en appliquant le théorème des accroissements finis à $f(x)$ et $g(x)$. En effet, on arriverait à

– il existe $c_1 \in]a; b[$ tel que $f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et

– il existe $c_2 \in]a; b[$ tel que $g'(c_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

Ainsi : $\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, mais en général $c_1 \neq c_2$.

4.2.4 Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital permet de remplacer une limite par une autre qui *peut* être plus simple à calculer.

Théorème 4.6 (Règle de l'Hospital)

Soient f et g deux fonctions telles que :

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

b) il existe un voisinage V de a tel que f et g sont dérivables dans $V \setminus \{a\}$;

c) g et g' ne s'annulent pas dans $V \setminus \{a\}$;

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ existe.

Alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Démonstration. Soient un nombre réel a , un voisinage V de a et deux fonctions f et g qui vérifient les hypothèses de la règle de l'Hospital.

Il est possible de démontrer la règle de l'Hospital avec ces hypothèses, mais ce travail est assez complexe et fait appel à des mathématiques "fines". Nous allons supposer ici, en plus, que $f(a) = g(a) = 0$ et par conséquent que les fonctions f et g sont continues en a (voir hypothèse a)).

– Choisissons un nombre x arbitraire dans V tel que $x > a$. f et g sont donc continues sur $[a; x]$, dérivables sur $]a; x[$ et g et g' ne s'annulent pas sur $]a; x[$. Alors, par le théorème de Cauchy, on sait qu'on peut associer à x un nombre réel $c(x)$, avec $a < c(x) < x$, tel que :

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ceci implique que, en utilisant les propriétés des limites¹ et le fait que $\lim_{x \rightarrow a^+} c(x) = a$,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

– Choisissons maintenant un nombre x arbitraire dans V tel que $x < a$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on peut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

Comme les limites à gauche et à droite sont les mêmes et existent par hypothèse sur $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, on obtient finalement que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. \square

Remarques

1. La règle de l'Hospital est aussi valable si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. En d'autres mots, la règle de l'Hospital peut être utilisée si on est dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
2. La règle de l'Hospital est aussi valable pour des limites unilatères ou pour des limites vers plus l'infini ou moins l'infini ; autrement dit, " $x \rightarrow a$ " peut être remplacé par l'un ou l'autre des symboles $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

Utilisation de la règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital s'utilise en trois étapes :

1. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a une **forme indéterminée** ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Si ce n'est pas le cas, on ne peut pas utiliser la règle de l'Hospital.
2. Dériver $f(x)$ et $g(x)$ **séparément**.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemples

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, on a bien une forme indéterminée.

La règle de l'Hospital peut s'appliquer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \stackrel{Hosp}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos(2x)}{1} = 2$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}$.

Ici, nous avons $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}$ n'a donc pas une forme indéterminée. Ce quotient tend vers $+\infty$.

Si on avait appliqué **à tort** la règle de l'Hospital, on aurait obtenu :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{Hosp}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} \stackrel{Hosp}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

1. **Rappel limites** : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert contenant a , sauf éventuellement en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$

$$3. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \stackrel{\text{Hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2}{1} = 4$$

$$4. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

4.3 Que dit f' à propos de f ?

La plupart des applications liées aux dérivées dépendent de notre aptitude à déduire les caractéristiques d'une fonction f des informations relatives à sa dérivée f' . Parce que $f'(x)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x; f(x))$, elle renseigne, en chaque point, sur la direction selon laquelle la courbe se prolonge. Il est donc normal de s'attendre à ce que l'information sur $f'(x)$ fournisse de l'information sur $f(x)$.

4.3.1 Croissance et décroissance

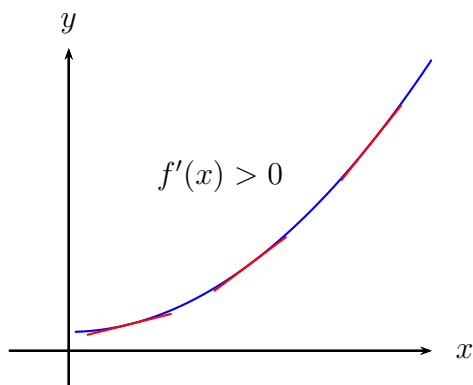
Plus particulièrement, la dérivée de f va nous permettre de déterminer les régions de croissance et de décroissance de f (le caractère croissant ou décroissant des fonctions a été défini dans le cours de première année).

Proposition 4.7 (Croissance et décroissance)

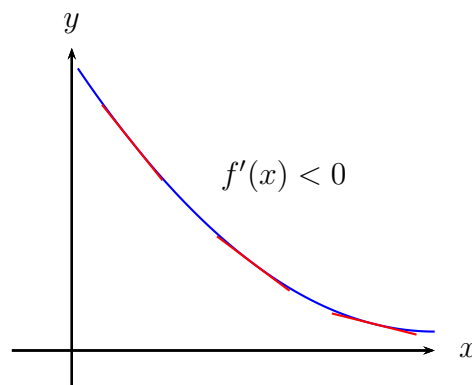
Soit I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable sur I .

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$;
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Illustration



Fonction strictement croissante



Fonction strictement décroissante

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable sur I .

Sens \Rightarrow

- Si f est strictement croissante sur I :** soient $x_0 \in I$ et un nombre réel $h > 0$ (sans perte de généralité) tels que $x_0 + h \in I$. Comme f est une fonction strictement croissante, on a que $f(x_0 + h) > f(x_0)$ ou $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ et par conséquent, comme f est une fonction dérivable en x_0 , on obtient que :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

car on calcule la limite du quotient de deux nombres positifs.

- b) **Si f est strictement décroissante sur I** : soient $x_0 \in I$ et un nombre réel $h > 0$ (sans perte de généralité) tels que $x_0 + h \in I$. Comme f est une fonction strictement décroissante, on a que $f(x_0 + h) < f(x_0)$ ou $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ et par conséquent on obtient que :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$$

car on calcule la limite du quotient d'un nombre négatif sur un nombre positif.

- c) **Si f est constante sur I** : la fonction f est de la forme $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ sur I . Or, à l'aide des règles de dérivation, on obtient que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Sens \Leftarrow

Soient x_1 et x_2 deux nombres de l'intervalle I tels que $x_1 < x_2$. Comme f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I , elle est continue sur $[x_1; x_2]$ et dérivable sur $]x_1; x_2[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1; x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$. Comme $x_2 - x_1 > 0$, on a que :

- a) **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$** : $f'(c)$ est strictement positif et ainsi $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (égal au produit des deux nombres positifs). La fonction f est donc strictement croissante sur I .
- b) **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$** : $f'(c)$ est strictement négatif et ainsi $f(x_2) - f(x_1) < 0$ (égal au produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif). La fonction f est donc strictement décroissante sur I .
- c) **Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$** : $f'(c)$ est nulle et ainsi $f(x_2) - f(x_1) = 0$ (égal au produit de 0 et d'un nombre positif). La fonction f est donc constante sur I .

□

On peut maintenant énoncer un résultat important pour la suite du cours découlant de cette proposition.

Proposition 4.8

Deux fonctions f et g qui ont des dérivées égales sur un intervalle I différent d'une constante sur I ou

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \iff f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

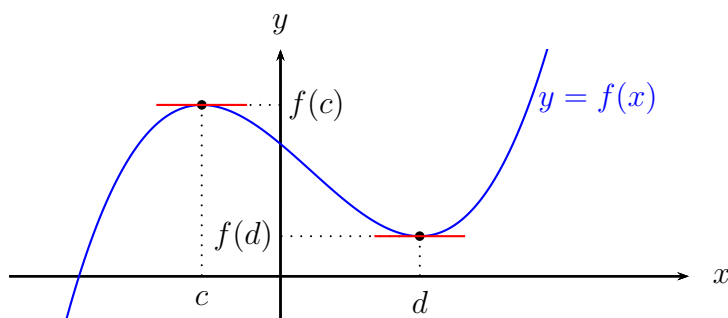
Démonstration. Soient un intervalle I et deux fonctions f et g . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I &\iff f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ &\iff [f(x) - g(x)]' = 0 \quad \forall x \in I \\ &\iff f(x) - g(x) = C \quad \forall x \in I \quad (f - g \text{ est une fct constante}) \\ &\iff f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

□

4.3.2 Valeurs maximales et minimales

Un nombre important de problèmes pratiques, appelées *problèmes d'optimisation* (voir chapitre 4.5) peuvent être ramenés à trouver les valeurs maximales ou minimales d'une fonction. Dans cette partie, nous allons montrer comment utiliser la dérivée pour déterminer ces valeurs extrêmes.



Définition 4.2 (Extrema locaux)

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble D .

Le nombre $f(c)$, avec $c \in D$, est un **maximum local** de f s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que pour tout $x \in D \cap I$ on ait $f(x) \leq f(c)$. On dit aussi que f admet un maximum en c .

Le nombre $f(d)$, avec $d \in D$, est un **minimum local** de f s'il existe un intervalle ouvert I contenant d tel que pour tout $x \in D \cap I$ on ait $f(x) \geq f(d)$. On dit aussi que f admet un minimum en d .

Définition 4.3 (Extrema absolus)

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble D .

Le nombre $f(c)$, avec $c \in D$, est le **maximum absolu** de f si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(c)$.

Le nombre $f(d)$, avec $d \in D$, est le **minimum absolu** de f si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq f(d)$.

Remarques

1. Les valeurs minimale et maximale de f portent en commun le nom de valeurs **extrêmes** de f .
2. Un extremum absolu est toujours un extremum local. En effet, une valeur extrême $f(c)$ pour un ensemble D en est une également dans le voisinage immédiat du point c . Donc, *une liste de tous les extrema locaux comprendra automatiquement les extrema absolus de la fonction, s'il en existe.*

Exemples

1. Le nombre $f(0) = 1$ est le minimum absolu de la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = x^2 + 1$.
2. Le nombre $g(0) = 1$ est un maximum local de la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = \cos(x)$.
3. Le nombre $h(0) = 0$ est le minimum absolu de la fonction de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par $h(x) = \sqrt{x}$.

4. La fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $i(x) = x^3$ ne possède ni minimum ni maximum sur \mathbb{R} .

On a donné ci-dessus la représentation graphique d'une fonction f qui passe par un maximum local en c et un minimum local en d . Il apparaît qu'aux points de maximum et de minimum la tangente est horizontale. Ainsi, $f'(c) = 0$ et $f'(d) = 0$.

Théorème 4.9 (Théorème de Fermat)

Si f admet un maximum ou un minimum local en $x = c$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, qu'une fonction f admette un maximum local au point $x = c$ et que f est dérivable en c . Il existe donc un intervalle I contenant c tel que pour tout x de I , on a :

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{ou} \quad f(x) - f(c) \leq 0$$

– Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$ avec $x < c$, : $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Comme f est dérivable à gauche en c , on obtient, par les propriétés des limites, :

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_g(c) \geq 0$$

– De même, pour tout $x \in I$ avec $x > c$, on a : $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Comme f est dérivable à droite en c , on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_d(c) \leq 0$$

– Enfin, comme f est dérivable au point c : $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c) = 0$

□

Remarques

1. Ce théorème donne une condition *nécessaire* pour l'existence d'un extremum.

Attention : quand $f'(c) = 0$, f n'a pas nécessairement un extremum en c . La réciproque de ce théorème n'est généralement pas vraie.

2. Soit la fonction $f(x) = x^3$, dont la dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$. Or, cette fonction n'a ni maximum, ni minimum en 0. Le fait que $f'(0) = 0$ entraîne seulement que la tangente en $(0;0)$ à la courbe $y = x^3$ est horizontale (la courbe traverse la tangente en ce point).

3. Soit la fonction $g(x) = |x|$ qui a un minimum en 0. Or, cette valeur ne pourra pas être trouvée parmi les points en lesquels $f'(x) = 0$ car $f'(0)$ n'existe pas.

Le théorème de Fermat suggère quand même que, dans la recherche des valeurs extrêmes, on commence par les nombres c tels que $f'(c) = 0$ ou tels que $f'(c)$ n'existe pas.

Définition 4.4

Un **point critique** d'une fonction f est un point c du domaine de définition de f tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.

Extrema pour une fonction continue sur un intervalle fermé

Pour trouver les extrema absolus d'une fonction f continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ (voir le théorème 4.1 qui assure de l'existence de ces extrema), il faut donc :

1. Calculer les valeurs de f aux points critiques de f sur $]a; b[$.
2. Calculer les valeurs de f aux bornes de l'intervalle.
3. Choisir la plus grande et la plus petite des valeurs trouvées en 1 et en 2.

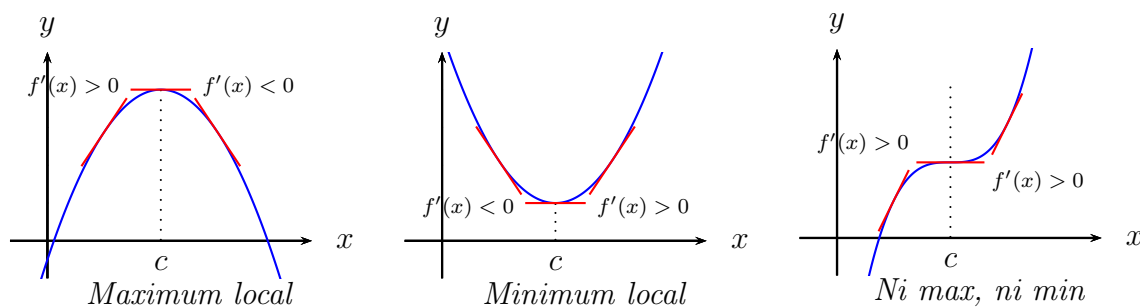
On peut encore utiliser le signe de la dérivée pour déterminer si un point critique est un maximum local ou minimum local ou ni l'un ni l'autre.

Théorème 4.10 (Test de la dérivée première)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , dérivable sur $I \setminus \{c\}$ et $c \in I$ un point critique de f .

- a) Si f' passe du positif au négatif en c , alors $f(c)$ est un maximum local de f .
- b) Si f' passe du négatif au positif en c , alors $f(c)$ est un minimum local de f .
- c) Si f' ne change pas de signe en c , alors f n'a ni maximum ni minimum local en c .

Illustration



Démonstration. On démontre ici uniquement le point a) en supposant que $f'(c) = 0$. La démonstration des autres cas est analogue.

Si $f'(x)$ passe du positif au négatif en s'annulant en c , il existe un voisinage V de c tel que :

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour } x < c \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \quad \text{pour } x > c$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe γ compris entre c et x tel que

$$f(x) - f(c) = f'(\gamma) \cdot (x - c)$$

Alors,

- a) Si $x < c$: $\gamma < c$ et $f'(\gamma) > 0$. Ainsi $f(x) - f(c) = f'(\gamma) \cdot (x - c) < 0$ ou $f(x) < f(c)$.
- b) Si $x > c$: $\gamma > c$ et $f'(\gamma) < 0$. Ainsi $f(x) - f(c) = f'(\gamma) \cdot (x - c) < 0$ ou $f(x) < f(c)$.

En résumé, de a) et b), on a $f(x) < f(c)$ et $f(c)$ est donc un maximum local de f . \square

Application

Pour déceler la présence de maxima ou de minima locaux d'une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} (ou sur un intervalle ouvert ou fermé I), nous allons étudier le signe de $f'(x)$ dans un tableau de signes de la forme présentée ci-dessous (exemple pour une fonction avec trois points critiques c_1 , c_2 et c_3) :

x		c_1		c_2		c_3	
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	–
$f(x)$	↘	MIN	↗	MAX	↘		↘

La deuxième ligne du tableau donne le signe de f' (peut être séparée en plusieurs lignes) et la dernière ligne indique le comportement de f en utilisant les conventions d'écriture suivantes :

- ↗ : intervalle où f est croissante ;
- ↘ : intervalle où f est décroissante ;
- MAX ou MIN : extremum local.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$. Déterminer les extrema locaux de f .

1. On commence par calculer la dérivée de f : $f'(x) = x^2 - x - 2$
2. On cherche ensuite les zéros de f' et les points où f' n'est pas définie \rightarrow points critiques. Ici, f' s'annule en $c_1 = -1$ et en $c_2 = 2$.
3. On réalise un tableau de signes sur le modèle de celui donné ci-dessus :

x		-1		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

4. Par lecture dans le tableau de signes, on obtient que le nombre $f(-1) = \frac{37}{6}$ est un maximum local et que le nombre $f(2) = \frac{5}{3}$ est un minimum local.

4.4 Que dit f'' sur f ?

Le signe de $f''(x)$ caractérise également l'allure du graphique de f . Du fait que $f'' = (f)'$, on sait que quand $f''(x)$ est strictement positive, alors f' croît. Cela se traduit par le fait que, de gauche à droite, les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont de plus en plus fortes. Au niveau de la représentation graphique, le tracé de la courbe va s'incurver vers le haut. Une telle courbe est dite **convexe**. On développe cette idée de manière plus précise ci-dessous.

4.4.1 Convexité et concavité

Définition 4.5

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert I .

La fonction f est **convexe** (respectivement **concave**) sur I , si pour tout $a \in I$, le graphe de f est au-dessus (respectivement au-dessous) de la tangente en $T(a; f(a))$.

Formellement

La fonction f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) \cdot f'(a).$$

La fonction f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$ et $a \in I$, on a

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \cdot f'(a).$$

On peut facilement lier ces notions au signe de la dérivée seconde d'une fonction f sur I .

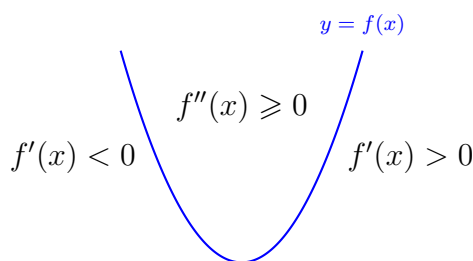
Théorème 4.11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I .

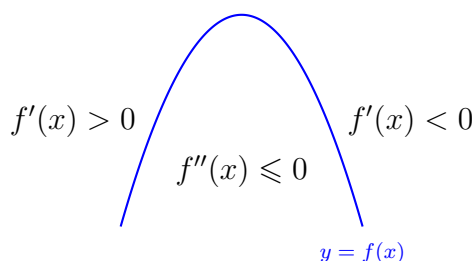
a) Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est convexe sur I .

b) Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est concave sur I .

Illustration



Fonction convexe



Fonction concave

Démonstration. Nous ne démontrons ici que la partie a) du théorème. La démonstration de la partie b) s'effectue de manière analogue.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I avec $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. On choisit un point $a \in I$ et on considère la tangente t au graphe de f au point $T(a; f(a))$. On interprète ici cette tangente comme la représentation graphique d'une fonction affine définie par $t(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. On définit ensuite la fonction

$$\delta(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\delta(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui est équivalent à dire que f est convexe sur I .

Soit maintenant $x_0 \in I$ différent de a . Comme f est deux fois dérivable sur I , on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur f et affirmer qu'il existe une valeur c comprise entre a et x_0 telle que $f(x_0) - f(a) = f'(c) \cdot (x_0 - a)$. On a alors :

$$\delta(x_0) = f'(c) \cdot (x_0 - a) - f'(a) \cdot (x_0 - a) = (f'(c) - f'(a)) \cdot (x_0 - a)$$

On peut maintenant appliquer le théorème des accroissements finis sur f' et affirmer qu'il existe une valeur d comprise entre a et c telle que $f'(c) - f'(a) = f''(d) \cdot (c - a)$. On a alors :

$$\delta(x_0) = f''(d) \cdot (c - a) \cdot (x_0 - a)$$

– Si $x_0 > a$, on a $a < d < c < x_0$ et

$$\underbrace{f''(d)}_{\geq 0 \text{ (hyp)}} \cdot \underbrace{(c - a)}_{> 0} \cdot \underbrace{(x_0 - a)}_{> 0} \geq 0.$$

– Si $x_0 < a$, on a $x_0 < c < d < a$ et

$$\underbrace{f''(d)}_{\geq 0 \text{ (hyp)}} \cdot \underbrace{(c-a)}_{< 0} \cdot \underbrace{(x_0-a)}_{< 0} \geq 0.$$

On a donc démontré que $\delta(x_0) \geq 0$ et, comme x_0 est choisi de manière arbitraire, que $\delta(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. \square

Trucs mnémotechniques

1. Pour se rappeler la différence entre convexe et concave, penser qu'une courbe concave a la forme d'une caverne.
2. Si la dérivée seconde est positive, on peut imaginer que "la courbe sourit". Inversement, quand elle est négative, "elle tire la tronche".

4.4.2 Valeurs maximales et minimales

Le signe de $f''(x)$ permet de formuler une condition suffisante pour déterminer si un point critique est un extremum local de f .

Théorème 4.12 (Test de la dérivée seconde)

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable (f'' continue) sur un intervalle ouvert I contenant un nombre réel c tel que $f'(c) = 0$.

- a) Si $f''(c) < 0$, alors $f(c)$ est un maximum local de f .
- b) Si $f''(c) > 0$, alors $f(c)$ est un minimum local de f .

Ce théorème découle immédiatement du théorème liant convexité ou concavité et signe de $f''(x)$.

4.4.3 Point d'inflexion

Définition 4.6

Soit f une fonction dont le graphe admet une tangente en a .

Le graphe de f admet un **point d'inflexion** en a s'il existe g et d tels que

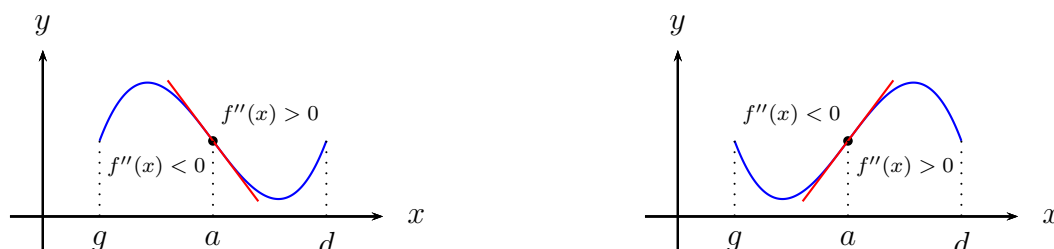
- f est convexe sur $]g; a[$ et concave sur $]a; d[$ ou
- f est concave sur $]g; a[$ et convexe sur $]a; d[$.

Si de plus on a $f'(a) = 0$, on parle d'un **point d'inflexion à tangente horizontale**.

En d'autres mots, le graphe f admet un point d'inflexion en a si la dérivée seconde change de signe en a (elle s'annule donc en a ou n'existe pas en a).

Au niveau de la représentation graphique de la fonction f , la tangente au graphe de f en a "traverse" le graphe en a si f admet un point d'inflexion en a .

Illustration



Remarques

1. Soit une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et supposons que f'' s'annule en un point a de I sans changer de signe ; on ne peut alors conclure à l'existence d'un point d'inflexion.
2. Par application du théorème 4.10, en un point d'inflexion, la dérivée f' admet un maximum ou un minimum ou (équivalent) la pente de la tangente passe par un maximum ou un minimum.

Application

Pour déceler la présence de points d'inflexion du graphe d'une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} (ou sur un intervalle ouvert ou fermé I), nous allons étudier le signe de $f''(x)$ dans un tableau de signes de la forme présentée ci-dessous (exemple pour une fonction avec trois points a_1, a_2 et a_3 tels que $f''(a_i) = 0$) :

x		a_1		a_2		a_3	
$f''(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪		∪	p.i.	∩	p.i.	∪

La deuxième ligne du tableau donne le signe de f'' (peut être séparée en plusieurs lignes) et la dernière ligne indique le comportement de f en utilisant les conventions d'écriture suivantes :

- ∪ : intervalle où f est convexe ;
- ∩ : intervalle où f est concave ;
- p.i. : point d'inflexion.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 24x^2$. Déterminer les points d'inflexion du graphe de f .

1. On commence par calculer la dérivée première de f : $f'(x) = 4x^3 - 48x$.
2. A partir de $f'(x)$, on calcule la dérivée seconde de f : $f''(x) = 12x^2 - 48$.
3. On cherche ensuite les zéros de f'' et les points où f'' n'est pas définie. Ici, f'' s'annule en $a_1 = -2$ et en $a_2 = 2$.
4. On réalise un tableau de signes sur le modèle de celui donné ci-dessus :

x		-2		2	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	p.i.	∩	p.i.	∪

5. Par lecture dans le tableau de signes, on obtient que les points $(-2; -80)$ et $(2; -80)$ sont des points d'inflexion du graphe de f .

4.5 Problèmes d'optimisation

Les **problèmes d'optimisation** constituent l'une des plus importantes applications de calcul des dérivées. On y demande la façon optimale (la meilleure) de réaliser quelque chose. Voici des exemples de problèmes de ce genre :

- Quelles dimensions faut-il donner à une boîte à conserve afin de minimiser son coût de fabrication ?
- Quelle est l'accélération maximale que l'on puisse imprimer à une navette spatiale? (Cette question intéresse les astronautes qui doivent résister aux effets de l'accélération).
- Quelle doit être la vitesse d'une automobile pour que le coût d'un trajet soit minimale si celui-ci dépend de la durée du parcours et de la consommation du véhicule ?

Tous ces problèmes peuvent être ramenés à trouver les valeurs maximales ou minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs sont appelées **valeurs optimales**.

La résolution d'un problème d'optimisation passe par une lecture attentive de la donnée souvent accompagnée d'un dessin, une définition de toutes les variables nécessaires et la recherche des extrema d'une fonction.

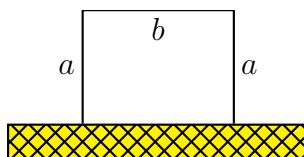
Méthode de résolution

Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation :

1. Exprimer la quantité variable Q à rendre maximale ou minimale comme fonction d'une ou plusieurs variables.
2. Si Q dépend de plus d'une variable, disons de n variables, trouver au moins $(n - 1)$ équations liant ces variables.
3. Utiliser ces équations pour exprimer Q comme une fonction d'une seule variable, v , et déterminer l'ensemble D des valeurs admissibles de cette variable.
4. Calculer le ou les extrema de Q en réalisant les étapes suivantes :
 - a) calculer la dérivée de Q sur D par rapport à v (si possible),
 - b) déterminer ensuite les points critiques de $Q \rightarrow$ points où $Q'(v) = 0$ ou où $Q'(v)$ n'existe pas,
 - c) réaliser un tableau de signes pour Q' sur D afin de déterminer les maxima et les minima locaux de Q ,
 - d) calculer les valeurs de Q aux bornes de D (si D est un intervalle fermé),
 - e) choisir la plus grande et/ou la plus petite des valeurs trouvées en c) et en d),et déterminer, si besoin, les valeurs des variables en ce ou ces extrema.

Exemple

On dispose de barrières d'une longueur totale L pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne.



Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?

1. Dans ce problème, la quantité à rendre optimale est l'aire délimitée par l'enclos, qu'on note A . On peut poser immédiatement que $A = a \cdot b$.

2. A dépend de deux variables a et b . Il faut donc trouver $2 - 1 = 1$ équations qui les lient.

Comme la longueur totale de la barrière est fixe, on a que $L = 2a + b$ ou $b = L - 2a$.

3. On exprime ensuite A comme fonction de a (choix) : $A(a) = a \cdot (L - 2a) = a \cdot L - 2 \cdot a^2$.

Comme l'aire doit être positive, l'ensemble des valeurs admissibles pour a est : $D = [0; \frac{L}{2}]$.

4. On calcule ensuite les extrema de A :

a) La dérivée de A par rapport à a est : $A'(a) = L - 4 \cdot a$.

b) On résout l'équation $A'(a) = 0 \rightarrow L - 4 \cdot a = 0$. Une solution : $a = \frac{L}{4}$.

c) Tableau de signes pour A' :

a	0		$\frac{L}{4}$		$\frac{L}{2}$
$A'(a)$		+	0	-	
$A(a)$	0	\nearrow	MAX	\searrow	0

Maximum local de A pour $a = \frac{L}{4}$.

d) Valeurs aux bornes de D (voir aussi tableau de signes) :

- $A(0) = 0$, l'aire est nulle car dans ce cas le pré n'a pas de hauteur ;
- $A(\frac{L}{2}) = 0$, l'aire est nulle car dans ce cas le pré n'a pas de longueur.

e) En comparant les valeurs obtenues en c) et en d), on conclue que la valeur maximale est atteinte lorsque $a = \frac{L}{4}$ et $b = \frac{L}{2}$.

L'aire du pré est alors égale à $\frac{L^2}{8}$.

4.6 Exercices

1) Vérifier le théorème de Rolle pour

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $1 \leq x \leq 2$

b) $f(x) = \sin(x)$ sur $0 \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ sur $0 \leq x \leq 4$

2) Vérifier le théorème des accroissements finis pour

a) $f(x) = 5x^2 - 1$ avec $a = 1$ et $b = 2$

b) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ avec $a = 0$ et $b = 1$

3) Utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer la valeur approchée de :

a) $\sqrt[6]{65}$ b) $(3,001)^3$ c) $\frac{1}{999}$

4) Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer :

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } -1 < x < 0 \text{ ou } x > 0$$

5) Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } -1 < x < 0 \text{ ou } x > 0$$

6) Dessiner une représentation graphique possible d'une fonction f connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x) > 0$ pour $1 < x < 3$,
- $f'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $x > 3$,
- $f'(x) = 0$ en $x = 1$ et $x = 3$.

7) Dessiner une courbe dont ...

- a) ... la "pente" partout positive croît continûment.
- b) ... la "pente" partout positive décroît continûment.
- c) ... la "pente" partout négative croît continûment.
- d) ... la "pente" partout négative décroît continûment.

8) Dessiner une courbe dont ...

- a) ... la première et la seconde dérivée sont partout positives.
- b) ... la seconde dérivée est partout négative, mais dont la première dérivée est partout positive.
- c) ... la seconde dérivée est partout positive, mais dont la première dérivée est partout négative.

d) ... la première et la seconde dérivée sont partout négatives.

9) Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(5x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{4x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{5x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (1 - e^x)}{(1 + x) \cdot \ln(1 - x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 50 \frac{1 - \ln(x)}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 50 \frac{1 - \ln(x)}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x^2 + 1)e^{-x}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x^2 + 1)e^{-x}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2}$

o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x \cdot e^{-x^2}$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x \cdot e^{-x^2}$

q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right) \cdot e^x$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right) \cdot e^x$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{4}{x}\right) \cdot e^x$

t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \ln(x) - x^2$

u) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$

v) $\lim_{x \rightarrow -2} x \cdot e^{\frac{1}{x+2}}$

w) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x+2}}$

x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x+2}}$

10) Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \cdot \ln(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin\left(\frac{k}{x}\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

11) a) Si les arêtes d'un cube de 2 cm de côtés croissent de 1 cm/min, comment le volume croît-il ?

- b) Si la surface d'une sphère de 10 cm de rayon croît de $5\text{ cm}^2/\text{min}$, comment le rayon croît-il ?
- 12) Une échelle longue de 5 mètres est appuyée contre un mur. Quand l'extrémité posée sur le sol est à une distance de 4 mètres du mur, l'échelle glisse à une vitesse de 2 m/s . A quelle vitesse l'extrémité appuyée contre le mur glisse-t-elle alors vers le bas ?
- 13) De l'eau coule d'un entonnoir conique à la vitesse de $1\text{ cm}^3/\text{s}$. Si le rayon de base de l'entonnoir est égale à 4 cm et sa hauteur à 8 cm , trouver la vitesse à laquelle le niveau d'eau baisse quand ce dernier se trouve à 2 cm du bord extrême.

4.7 Solutions des exercices

- 9) a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{5}$
e) $-\frac{1}{2}$ f) 1 g) $+\infty$ h) 0
i) $+\infty$ j) 0 k) $+\infty$ l) 1
m) $-\infty$ n) 0 o) 0 p) 0
q) 0 r) $+\infty$ s) $-$ t) $+\infty$
u) 0 v) $-$ w) $-\infty$ x) $+\infty$
- 10) a) 0 b) 0 c) 0 d) 1
e) k f) 1 g) e^{-2} h) e^a
- 11) a) $12 \text{ cm}^3/\text{min}$
b) $\frac{1}{16\pi} \text{ cm}/\text{min}$
- 12) $-\frac{8}{3} \text{ m}/\text{s}$
- 13) $-\frac{1}{9\pi} \text{ cm}/\text{s}$

Chapitre 5

Etude de fonctions

5.1 Méthode

Nous allons étudier, dans ce chapitre, une méthode qui permet de décrire les principales caractéristiques d'une fonction réelle f (domaine de définition, zéros, signe, optima, points d'inflexion, ...) et de les utiliser pour représenter graphiquement la fonction f le plus précisément possible sans l'aide d'un ordinateur.

L'étude d'une fonction comprend **7 points** qui sont décrits ci-dessous. Un exemple complet est donné à la suite de l'énoncé de la méthode.

1. Domaine de définition et continuité

Déterminer le plus grand domaine \mathcal{D}_f sur lequel la fonction f est définie.

Déterminer si la fonction f est **continue** sur \mathcal{D}_f et exhiber les éventuels points de discontinuité (nombres réels a tels que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$).

2. Parité et périodicité

Etudier la parité de f sur \mathcal{D}_f :

– si $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathcal{D}_f$, la fonction f est **paire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

– si $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathcal{D}_f$, la fonction f est **impaire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine.

Remarques : Si f est paire ou impaire, on réalise l'étude de f uniquement sur \mathbb{R}_+ et on en déduit le comportement de f sur \mathbb{R}_- . Pour que f puisse être paire ou impaire sur \mathcal{D}_f , il faut *absolument* que cet ensemble soit symétrique par rapport à l'origine.

Déterminer si f est une fonction **périodique**. Dans l'affirmative, chercher la longueur de la période p .

Remarque : Si f est périodique, on réalise l'étude de f uniquement sur un intervalle de longueur p inclus dans \mathcal{D}_f et on en déduit le comportement de f sur \mathcal{D}_f .

3. Zéros et signe de la fonction

Calculer les **zéros** de f , puis réaliser un tableau de signes afin de déterminer les intervalles où f est positive ou négative.

4. Limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes

Calculer les limites pour tous les x qui se trouvent au bord du domaine de définition. En déduire les éventuelles asymptotes verticales (**A. V.**) à la courbe $y = f(x)$ et les trous ou sauts de cette même courbe.

Calculer la ou les asymptotes affines (**A. H.** ou **A. O.**) à la courbe $y = f(x)$ (comportement en $\pm\infty$) et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.

5. Croissance et points critiques

Calculer la **dérivée** de f , puis les **points critiques**¹ de f en résolvant notamment l'équation $f'(x) = 0$.

Réaliser un tableau de signes pour la fonction dérivée afin de déterminer les régions de **croissance** ou de **décroissance** de f . Identifier également les minima, les maxima et les points d'inflexion à tangente horizontale.

6. Concavité et points d'inflexion

Calculer la **dérivée seconde** de f , puis ses zéros en résolvant l'équation $f''(x) = 0$.

Réaliser un tableau de signes pour la fonction dérivée seconde afin de déterminer les régions où la fonction f est **concave** ou **convexe**. Identifier également les **points d'inflexion** et calculer les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ en ces points.

7. Représentation graphique

Réaliser une **représentation graphique**, assez grande, de la fonction f à l'aide de toutes les informations glanées aux points 1 à 6, en précisant les asymptotes et les points particuliers (zéros, optima et points d'inflexions). Pour plus de précision, calculer et représenter quelques points du graphe de f , dont le point $(0; f(0))$

5.2 Exemple complet

On présente ci-dessous l'étude de la fonction : $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

1. Domaine de définition et continuité

Comme f est une fonction rationnelle, on calcule les zéros du dénominateur pour déterminer \mathcal{D}_f :

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 2$$

Le domaine de définition est donc donné par :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

La fonction f est continue sur \mathcal{D}_f : le quotient de fonctions continues (ici : polynômes) est continu si le dénominateur est différent de 0.

1. Un point c du domaine de définition est un point critique si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

2. Parité et périodicité

On compare $f(-x)$ à $f(x)$ et $-f(x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

La fonction f est **impaire**.

Remarque : On pourrait donc réaliser l'étude uniquement sur \mathbb{R}_+ , ce que nous ne ferons pas dans ce premier exemple.

f n'est pas une fonction périodique car elle est une fonction rationnelle.

3. Zéros et signe de la fonction

On cherche d'abord le(s) zéro(s) de f :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Le signe de la fonction est donné par le tableau suivant (dans la première ligne, on inscrit les valeurs de x trouvées aux points 1 et 3) :

x		-2		0		2	
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
signe f	-		+	0	-		+

4. Limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes

A. V.

Les asymptotes verticales, si elles existent, ont comme équations $x = a$ où a est une des abscisses trouvées au point 1. De même, les trous ou les sauts se situeront en ces mêmes abscisses. On calcule donc les limites aux bornes du domaine de définition :

▷ Pour $x = -2$, on a :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{-8}{0^+}}{=} -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{-8}{0^-}}{=} +\infty$$

▷ Pour $x = 2$, on a :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{8}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{8}{0^+}}{=} +\infty$$

Les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à la courbe $y = f(x)$.

A. H.

On calcule les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ pour déterminer s'il existe des asymptotes horizontales :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty$$

La courbe $y = f(x)$ n'admet pas d'asymptote horizontale vers $\pm\infty$.

A. O.

On tente tout d'abord de calculer la valeur de la pente de l'asymptote oblique :

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Puis la valeur de l'ordonnée à l'origine :

$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

La courbe $y = f(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ vers $\pm\infty$.

La position du graphe de f relativement à l'asymptote oblique est donnée par le signe de :

$$\delta(x) = f(x) - (mx + h) = \frac{x^3}{x^2 - 4} - (1 \cdot x + 0) = \frac{4x}{x^2 - 4}$$

On résume la situation dans le tableau de signes suivant.

x		-2		0		2	
$4x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$\delta(x)$	-		+	0	-		+
Pos. rel. c. / a. o.	dessous		dessus	coupe	dessous		dessus

La courbe $y = f(x)$ et l'a. o. se coupent donc au point $(0; f(0)) = (0; 0)$.

5. Croissance et points critiques

On commence par calculer la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(3x^2 - 12 - 2x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

On cherche ensuite les zéros de f' et les points où f' n'est pas définie \rightarrow points critiques. Ici, f' s'annule en :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

De plus, f' n'existe pas en -2 et 2 , qui n'appartiennent pas à \mathcal{D}_f . Les points critiques sont donc $-2\sqrt{3}$, 0 et $2\sqrt{3}$.

On reporte les valeurs des points critiques et les valeurs déterminées au point 1 dans la première ligne du tableau de signe de f' , qu'on complète ensuite.

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 12$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x^2 - 4)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-		-	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘		↘	p.i.	↘		↘	MIN	↗

On obtient donc les points particuliers du graphe suivants :

- **MAX** : $(-2\sqrt{3}; f(2\sqrt{3})) = (-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$
- **MIN** : $(2\sqrt{3}; f(2\sqrt{3})) = (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$
- point d'inflexion à tangente horizontale : $(0; f(0)) = (0; 0)$

6. Concavité et points d'inflexion

On calcule tout d'abord la dérivée seconde de f :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{[2x(x^2 - 12) + x^2 \cdot 2x] \cdot (x^2 - 4)^2 - x^2(x^2 - 12) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{2x(x^2 - 4)[(2x^2 - 12)(x^2 - 4) - 2x^2(x^2 - 12)]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \\
 &= \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}
 \end{aligned}$$

On cherche ensuite les zéros de f'' et les points où f'' n'est pas définie. Ici, f'' s'annule en :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 8x(x^2 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \Rightarrow \text{impossible} \end{cases}$$

De plus, f'' n'existe pas en -2 et 2 , qui n'appartiennent pas à \mathcal{D}_f .

On reporte les valeurs des points déterminées ci-dessus et les valeurs déterminés au point 1 dans la première ligne du tableau de signe de f'' , qu'on complète ensuite.

x		-2		0		2	
x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-		+	0	-		+
$f(x)$	∧		∪	p.i.	∧		∪

On obtient donc le **point d'inflexion** suivant : $(0; f(0)) = (0; 0)$.

D'après le point 5, on sait déjà que la pente m de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au p. i. $(0; 0)$ est égale à 0 (ou on la calcule par : $m = f'(0)$).

7. Représentation graphique

On commence par tracer un système d'axe (assez grand) dans lequel on reporte en "traitillés" les asymptotes déterminées au point 4, ainsi que les éventuels trous et sauts.

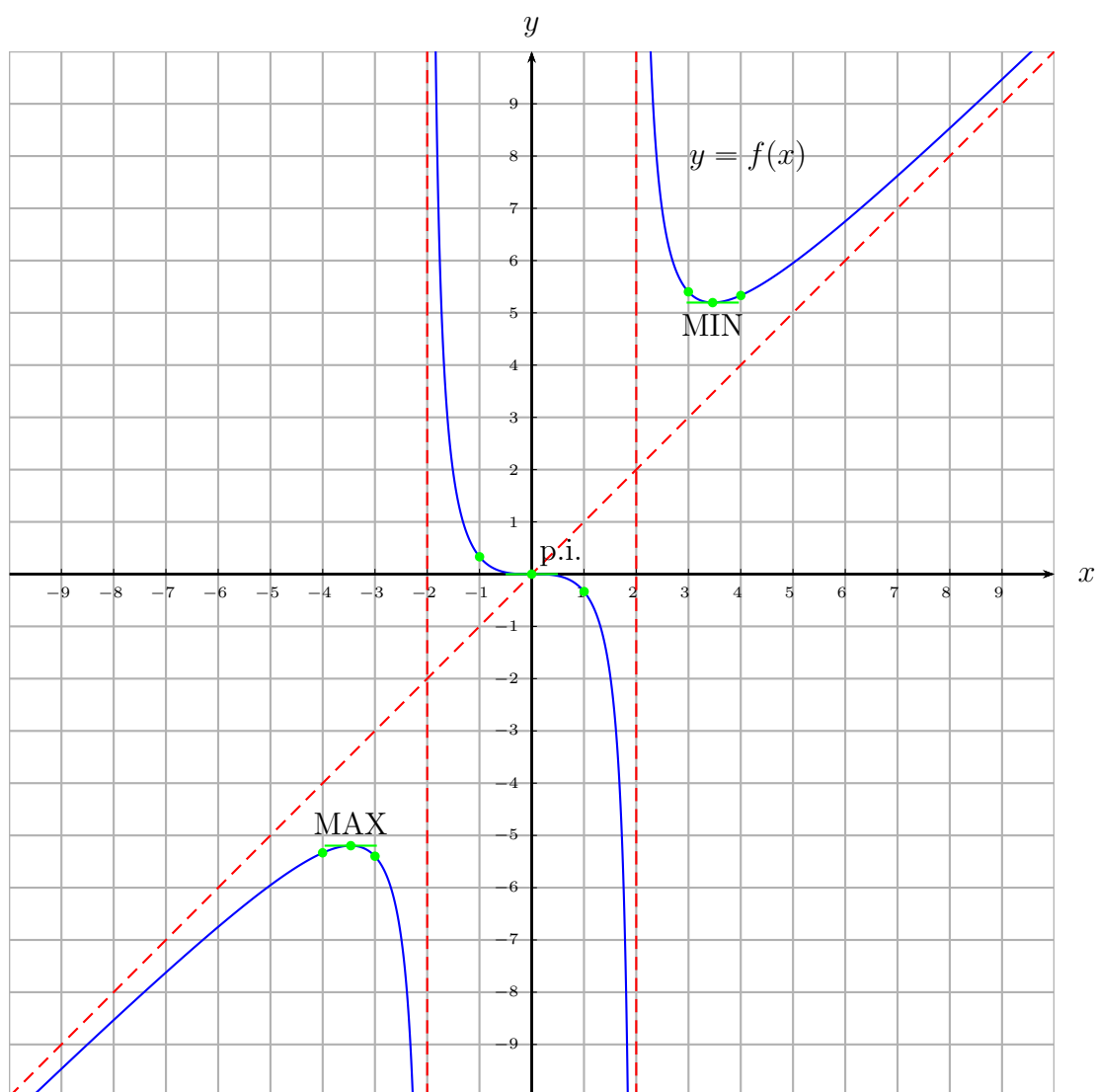
On dessine ensuite tous les points particuliers déterminés aux points 3, (4), 5 et 6 de la méthode. Pour les optima et les points d'inflexion, on dessine également une petite partie de la tangente à la courbe en ces points.

Pour plus de précision, on calcule quelques points du graphe de f :

$$(0; f(0)) = (0; 0) ; (1; f(1)) = (1; \frac{1}{3}) ; (3; f(3)) = (3; \frac{27}{5}) ; (4; f(4)) = (4; \frac{16}{3}) ; \dots$$

que l'on reporte sur le dessin ainsi, comme la fonction est impaire, que leur symétrique par rapport à l'origine.

On trace enfin la courbe d'après les informations récoltées aux points 2, 3, 5 et 6. On se base notamment sur chacun des tableaux de signes réalisés dans l'étude. On obtient ainsi la représentation graphique de f donnée ci-dessous.



5.3 Exercices

1) Etudier et représenter graphiquement les fonctions f définies ci-dessous :

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$

b) $f(x) = |4 - x^2|$

c) $f(x) = \frac{-3x + 4}{2x + 3}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{2(x^2 - 4x + 3)}$

g) $f(x) = \frac{x(x - 3)^2}{(x - 2)^2}$

h) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} *$

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

j) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1} *$

k) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

l) $f(x) = x^3 e^{-x^4}$

m) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x+3}}$

n) $f(x) = (2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}$

o) $f(x) = (e^x - 5)(e^x + 1)$

p) $f(x) = \frac{2x - 1}{2x} \cdot e^{-x}$

q) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

r) $f(x) = \frac{\ln(x^2) + 1}{2x}$

s) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(2x)$

t) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \cos(x)}$

u) $f(x) = \sin^2(x) - 2 \cos(x)$

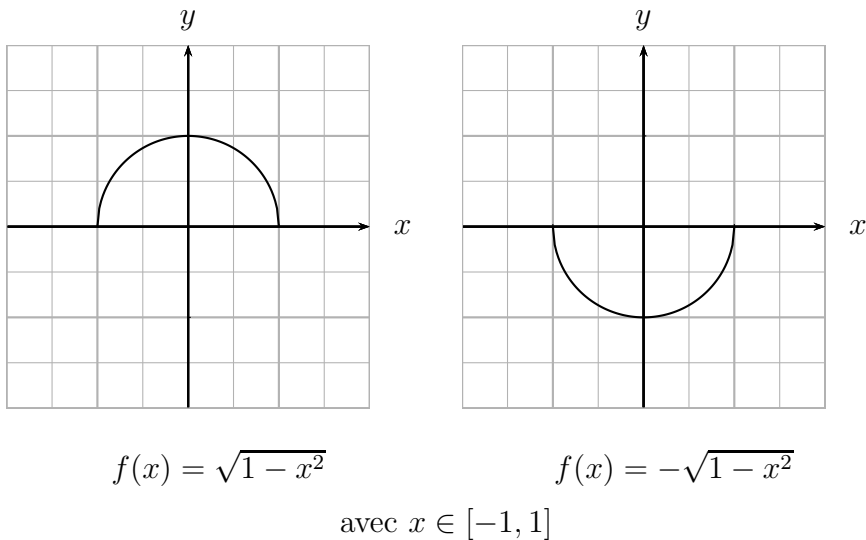
v) $f(x) = x \cdot \sin(x) *$

Chapitre 6

Courbes paramétrées

6.1 Introduction

Lorsqu'on désire représenter des courbes dans le plan, on aimerait avoir la possibilité de dessiner des courbes qui peuvent couper des droites verticales plusieurs fois. Or, si on se restreint aux courbes données par une équation de la forme $y = f(x)$ où f est une fonction réelle, ceci est impossible car une fonction associe à chaque élément de l'ensemble de départ (à chaque x) une et une seule image, ce qui revient à dire que le graphe d'une fonction réelle peut couper au plus une fois une droite verticale (voir le *test de la droite verticale* dans le chapitre fonction). Par exemple, le cercle de rayon 1 centré à l'origine, qu'on appelle cercle trigonométrique, ne peut être décrit comme la courbe représentant le graphe d'une fonction. On aurait besoin de deux fonctions au minimum.

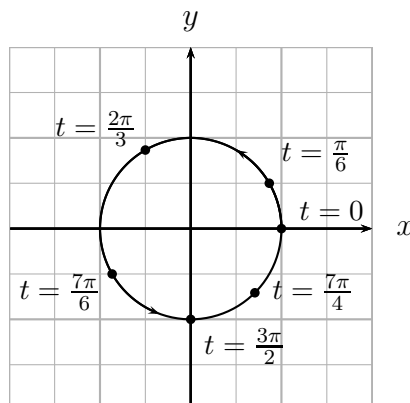


Par contre, on sait, par les définitions des fonctions trigonométriques, qu'un point M de ce cercle a pour coordonnée $M = (\cos(t); \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour dessiner le cercle trigonométrique, on dessine les points $(\cos(t); \sin(t))$ en faisant varier t dans $[0; 2\pi[$ (le point $M_0 = (\cos(0); \sin(0)) = (1; 0)$ correspondant à $t = 0$ est le même que le point $M_{2\pi} = (\cos(2\pi); \sin(2\pi)) = (1; 0)$ correspondant à 2π : les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques). On obtient ainsi une fonction f dont la variable t est un nombre réel et dont l'ensemble d'arrivée est le plan \mathbb{R}^2 (l'ensemble image est le cercle trigonométrique).

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (\cos(t); \sin(t))$$



6.2 Définition et exemples

6.2.1 Définitions

Dans ce cours, nous travaillerons dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soient une fonction réelle f définie sur l'ensemble \mathcal{D}_f , $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, et une fonction réelle g définie sur l'ensemble \mathcal{D}_g , $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 6.1

La **fonction paramétrée** p associée aux fonctions f et g est la fonction qui associe à chaque élément t de $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ le point $(f(t); g(t))$ du plan \mathbb{R}^2 :

$$p : \mathcal{D}_p \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (f(t); g(t))$$

La variable t est souvent appelée **paramètre**.

Remarque

Le **domaine de définition** \mathcal{D}_p de p est l'intersection des domaines de définition \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g de f et g : $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Le point M_t de coordonnées $(f(t); g(t))$ décrit un sous-ensemble \mathcal{C}_I du plan lorsque t varie dans un intervalle $I \subset \mathcal{D}_p$.

Définition 6.2

Une **représentation paramétrique** d'une courbe \mathcal{C} est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un **paramètre** (souvent noté t, k, θ, \dots) :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

avec $t \in E \subset \mathcal{D}_p$. L'ensemble E donne les valeurs de t nécessaires pour représenter la courbe \mathcal{C} . Ces équations sont appelées **équations paramétriques** de \mathcal{C} .

On note parfois également :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Remarque

La courbe \mathcal{C} n'est pas nécessairement la représentation graphique d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On peut parfois, en éliminant le paramètre t entre les deux équations, obtenir y comme fonction de x , et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une relation $y = h(x)$.

Ceci n'est intéressant que si la fonction h obtenue est simple. De plus, il faut alors faire attention aux valeurs prises par la variable x lorsque t varie.

6.2.2 Exemples

La droite

La représentation paramétrique

$$d : \begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ (variable) correspond aux équations paramétriques d'une droite d passant par le point $A(2; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$. Les fonctions associées à cette représentation paramétrique sont $f(t) = 2 - 8t$ et $g(t) = 5 + 3t$.

Ici, comme nous l'avons vu précédemment dans le cours, on peut éliminer le paramètre t et obtenir l'équation cartésienne de d qui lie directement x et y : $3x + 8y - 46 = 0$.

On peut isoler y dans cette équation et obtenir la relation $y = -\frac{3}{8}x + \frac{23}{4}$. y est ici exprimée comme une fonction de x : $y = h(x)$ avec $h(x) = -\frac{3}{8}x + \frac{23}{4}$.

Le cercle

La représentation paramétrique

$$C : \begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ (variable) et $r \in \mathbb{R}$ (fixe), correspond aux équations paramétriques d'un cercle C de centre $(x_0; y_0)$ et de rayon r .

Pour s'en convaincre, on peut tenter d'éliminer le paramètre t et d'obtenir une équation liant les deux coordonnées x et y des points du cercle. On commence par isoler t dans les deux équations :

$$\cos(t) = \frac{x - x_0}{r} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{y - y_0}{r}$$

En élevant chaque membre des équations ci-dessus au carré et en les additionnant, on obtient l'équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

qui est bien l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(x_0; y_0)$ et de rayon r , en remarquant que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

L'ellipse

La représentation paramétrique

$$E : \begin{cases} x &= x_0 + a \cos(t) \\ y &= y_0 + b \sin(t) \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ (variable) et $a, b \in \mathbb{R}$ (fixe) correspond aux équations paramétriques d'une ellipse E de centre $(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à l'axe Ox si $a > b$ (parallèle à Oy dans le cas contraire).

En effet, on peut tenter d'éliminer le paramètre t et d'obtenir une équation liant les deux coordonnées x et y des points de l'ellipse. On commence par isoler t dans les deux équations :

$$\cos(t) = \frac{x - x_0}{a} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{y - y_0}{b}$$

Comme auparavant, en élevant chaque membre des équations ci-dessus au carré et en les additionnant, on obtient l'équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

qui est bien l'équation cartésienne d'une ellipse de centre $(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à l'axe Ox si $a > b$.

L'hyperbole

La représentation paramétrique

$$H : \begin{cases} x &= x_0 + a \cosh(t) \\ y &= y_0 + b \sinh(t) \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ (variable) et $a, b \in \mathbb{R}$ (fixe) correspond aux équations paramétriques d'une hyperbole H de centre $(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à l'axe Ox . (*Rappel* : le cosinus hyperbolique est donné par $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et le sinus hyperbolique est donné par $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$).

En effet, on peut tenter d'éliminer le paramètre t et d'obtenir une équation liant les deux coordonnées x et y des points de l'hyperbole. On commence par isoler t dans les deux équations :

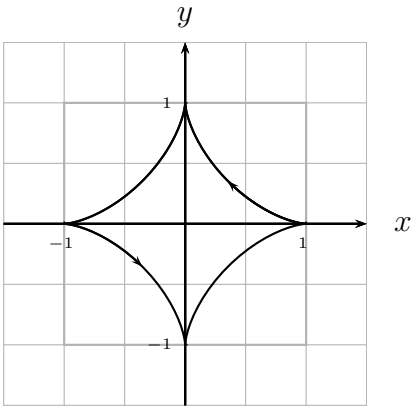
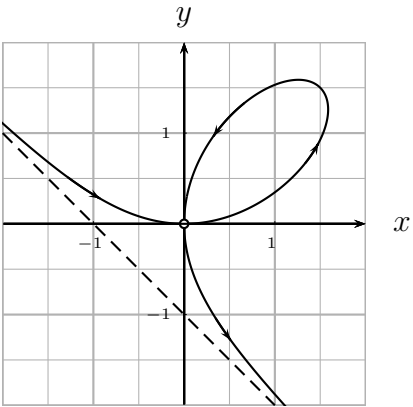
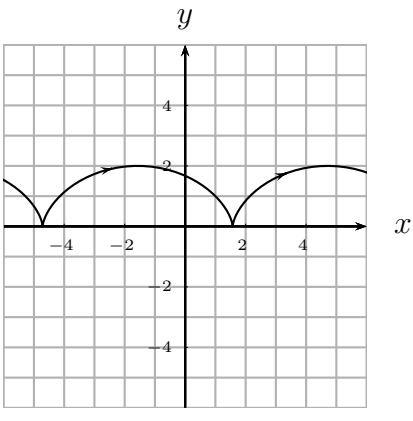
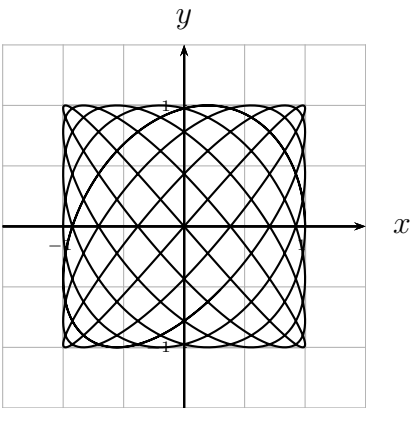
$$\cosh(t) = \frac{x - x_0}{a} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{y - y_0}{b}$$

En élevant chaque membre des équations ci-dessus au carré et en les additionnant, on obtient l'équation

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

qui est bien l'équation cartésienne d'une hyperbole de centre $(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à l'axe Ox , en remarquant que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

D'autres exemples de courbes paramétrées

<p>Une astroïde</p>	<p>Un folium de Descartes</p>
<p>$\{(\cos^3(t); \sin^3(t)) : t \in \mathbb{R}\}$</p>	<p>$\{(\frac{3t}{1+t^3}; \frac{3t^2}{1+t^3}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$</p>
	
<p>Une cycloïde</p>	<p>Une courbe de Lissajous</p>
<p>$\{(t + \cos(t); 1 - \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$</p>	<p>$\{(\sin(7t + \frac{\pi}{2}); \sin(8t)) : t \in \mathbb{R}\}$</p>
	

6.3 Asymptotes

On étudie ici le comportement d'une courbe \mathcal{C} donnée par des équations paramétriques de la forme

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

lorsque $x(t)$ et/ou $y(t)$ tendent vers l'infini quand t tend vers une valeur $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Asymptotes verticales

La courbe \mathcal{C} admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$, lorsque $x(t)$ tend vers le nombre réel (fini!) a quand t tend vers t_0 et $y(t)$ tend vers une valeur

infinie.

$$\boxed{\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}}$$

Si $x(t) - a$ est strictement positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche. La courbe coupe l'asymptote lorsque $x(t) = a$.

Asymptotes horizontales

La courbe \mathcal{C} admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$, lorsque $x(t)$ tend vers une valeur infinie quand t tend vers t_0 et $y(t)$ tend vers le nombre réel a .

$$\boxed{\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a \end{cases}}$$

Si $y(t) - a$ est strictement positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote, sinon elle est au-dessous. La courbe coupe l'asymptote lorsque $y(t) = a$.

6.3.1 Asymptotes obliques

Une **asymptote oblique** ne peut exister que si $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers une valeur infinie quand t tend vers t_0 . Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

$$\boxed{\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}}$$

La droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} si :

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \\ h &= \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) \end{aligned}}$$

existent dans \mathbb{R} . Cette formule est analogue à celle rencontrée dans le chapitre consacré aux asymptotes à une courbe décrite par une équation de la forme $y = f(x)$ où f est une fonction réelle.

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de l'expression $y(t) - (m \cdot x(t) + h)$. Si celle-ci est positive, la courbe est au-dessus de l'asymptote, sinon, elle est au-dessous.

Remarque

Comme pour les courbes décrites par une équation de la forme $y = f(x)$, une asymptote ne peut exister que si $x(t)$ et/ou $y(t)$ n'est pas définie en t_0 . On va donc rechercher les asymptotes dans les points t_0 qui n'appartiennent pas au domaine de définition. De plus, pour être complet, on va également déterminer le comportement de la courbe lorsque t tend vers $\pm\infty$.

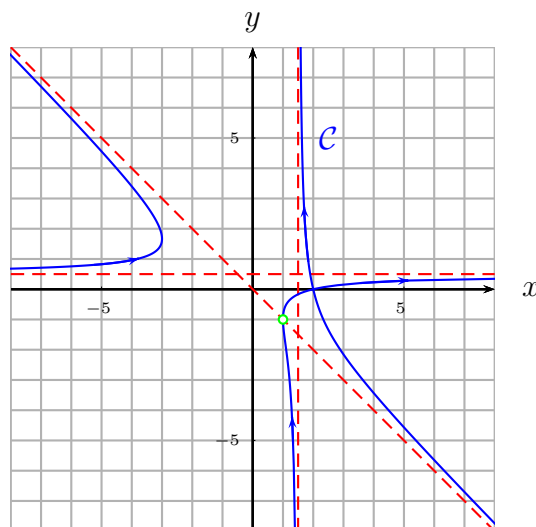
Exemple

La courbe \mathcal{C} ci-contre est décrite par les équations paramétriques :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2 + t + 1}{t(t + 1)} \\ y = \frac{t^2 + t - 1}{t(1 - t)} \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. On a

1. une asymptote verticale en $t = 1$.
Son équation est $x = \frac{3}{2}$.
2. une asymptote horizontale en $t = -1$. Son équation est $y = \frac{1}{2}$.
3. une asymptote oblique en $t = 0$.
Son équation est $y = -x$.



6.4 Dérivées et points particuliers

6.4.1 Dérivées

Dans ce paragraphe, on va montrer comment décrire la forme d'une courbe \mathcal{C} donnée par des équations paramétriques de la forme

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

en utilisant les dérivées des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Comme pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ces dérivées donnent le comportement, croissance ou décroissance, des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Pour décrire ce comportement, on va étudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ dans un tableau de signes "semblable" à celui donné ci-dessous qui décrit une partie des comportements possibles pour une courbe paramétrée. Dans la première ligne du tableau, on inscrit les valeurs de t pour lesquelles $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$ ou $y'(t)$ n'existent pas ou pour lesquelles $x'(t)$ ou $y'(t)$ valent 0 (points critiques des fonctions $x(t)$ et $y(t)$).

t		t_1		t_2		t_3	
$x'(t)$	+	0	-	-	-	0	+
$y'(t)$	+	+	+	0	-	0	-
$x(t)$	\rightarrow	$x(t_1)$	\leftarrow	$x(t_2)$	\leftarrow	$x(t_3)$	\rightarrow
$y(t)$	\uparrow	$y(t_1)$	\uparrow	$y(t_2)$	\downarrow	$y(t_3)$	\downarrow
comportement	\nearrow	tg. vert.	\nwarrow	tg. hor.	\swarrow	pt sing.	\searrow

On utilise les conventions d'écriture suivantes :

- \rightarrow : intervalle où $x(t)$ est croissante ;
- \leftarrow : intervalle où $x(t)$ est décroissante ;

- \uparrow : intervalle où $y(t)$ est croissante ;
- \downarrow : intervalle où $y(t)$ est décroissante ;
- \nearrow : intervalle où les premières coordonnées des points de la courbe sont croissantes et les deuxièmes croissantes (forme de la courbe) ;
- \nwarrow : intervalle où les premières coordonnées des points de la courbe sont décroissantes et les deuxièmes croissantes (forme de la courbe) ;
- \swarrow : intervalle où les premières coordonnées des points de la courbe sont décroissantes et les deuxièmes décroissantes (forme de la courbe) ;
- \searrow : intervalle où les premières coordonnées des points de la courbe sont croissantes et les deuxièmes décroissantes (forme de la courbe).

6.4.2 Points particuliers

L'étude du signe des dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ permet de déterminer certains points particuliers de la courbe \mathcal{C} :

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la courbe admet une **tangente verticale** au point $(x(t_0); y(t_0))$.
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale** au point $(x(t_0); y(t_0))$.
- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, le point $(x(t_0); y(t_0))$ de la courbe est appelé **point singulier** (point de rebroussement, point double, ...).

6.4.3 Pente de la tangente à la courbe

Dans le chapitre consacré aux dérivées, nous avons vu que la pente de la tangente à une courbe pouvait être approchée par la pente d'une sécante passant par deux points distincts de la courbe suffisamment proches.

Pour obtenir la pente de la tangente, nous considérons donc deux points voisins de la courbe : $M_{t_0} = (x(t_0); y(t_0))$ et $M_{t_0+h} = (x(t_0+h); y(t_0+h))$ avec $h > 0$ (les points sont voisins si h est suffisamment petit). La pente de la sécante passant par ces deux points est donnée par :

$$m(t_0; h) = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)}$$

Cette expression peut être modifiée de la manière suivante ($h > 0$) :

$$m(t_0; h) = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \cdot \frac{h}{x(t_0+h) - x(t_0)} = \frac{\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}}{\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}}$$

La pente de la tangente au point M_{t_0} est obtenue en considérant la limite des pentes des sécantes lorsque h tend vers 0 :

$$m(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} m(t_0; h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}}{\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

En résumé, la pente de la tangente en un point de la courbe \mathcal{C} est donnée par le quotient des dérivées de $y(t)$ et $x(t)$.

Remarques

- 1 On pourra compléter le tableau des dérivées par une ligne donnant les valeurs de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ pour les valeurs de t figurant déjà dans ce tableau.
- 2 **Important** : lorsqu'on représente graphiquement une courbe paramétrée, on va toujours calculer la limite des pentes des tangentes, $\lim_{t \rightarrow t_0} m(t)$, pour un point singulier M_{t_0} afin de pouvoir le dessiner correctement.

Exemple

La courbe paramétrée C ci-dessous est décrite par les équations paramétriques :

$$C : \begin{cases} x = \frac{\ln(t+2) \cdot t + 1}{t} \\ y = \frac{t^2 + 1}{t} \end{cases}$$

avec $t \in]-2, 0[\cup]0, \infty[$. Les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ sont :

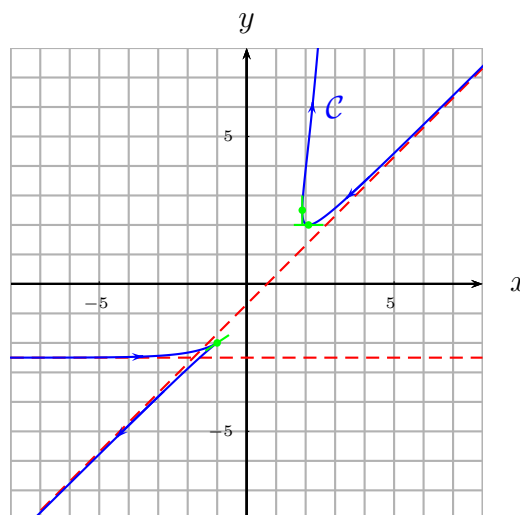
$$x'(t) = \frac{(t-2) \cdot (t+1)}{t^2 \cdot (t+2)} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t^2}$$

Ainsi, $x'(t)$ s'annule en $t = 2$, $t = -1$ et $t \rightarrow +\infty$ (on considère ici également les limites de $x'(t)$ pour $t \rightarrow \pm\infty$, car $t \rightarrow \pm\infty$ peut correspondre à un point de la courbe de coordonnées finies) et $y'(t)$ en $t = -1$ et $t = 1$. D'après ces informations, on peut construire le tableau de signes suivant :

t	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		+	0	-		-	-	-	0	+	0
$y'(t)$		+	0	-		-	0	+	+	+	+
$x(t)$		\rightarrow	-1	\leftarrow		\leftarrow	2.1	\leftarrow	1.9	\rightarrow	$+\infty$
$y(t)$	-2.5	\uparrow	-2	\downarrow		\downarrow	2	\uparrow	2.5	\uparrow	$+\infty$
comportement		\nearrow	pt sing.	\swarrow		\swarrow	tg. hor.	\nwarrow	tg. ver.	\nearrow	

On a alors :

1. un point à tangente horizontale en $t = 1$.
Ce point est $(\ln(3) + 1; 2)$.
2. un point à tangente verticale en $t = 2$.
Ce point est $(\ln(4) + \frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.
3. un point singulier en $t = -1$.
Ce point est $(-1, -2)$.
On a $\lim_{t \rightarrow -1} m(t) = \frac{2}{3}$.



6.5 Etude de courbes paramétrées

Nous allons étudier, dans ce chapitre, une méthode qui permet de décrire les principales caractéristiques d'une courbe paramétrée \mathcal{C} et de les utiliser pour représenter graphiquement la courbe \mathcal{C} le plus précisément possible sans l'aide d'un ordinateur.

6.5.1 Méthode

L'étude d'une courbe paramétrée donnée par des équations paramétriques de la forme

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

comprend **5 points** qui sont décrits ci-dessous.

1. Domaine de définition

Déterminer le plus grand domaine \mathcal{D}_x sur lequel la fonction $x(t)$ est définie et le plus grand domaine \mathcal{D}_y sur lequel la fonction $y(t)$ est définie.

Le domaine de définition de la courbe \mathcal{C} est alors donné par : $\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$

2. Limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes

Déterminer, s'il y en a, les asymptotes verticales (**A.V.**), horizontales (**A.H.**) et obliques (**A.O.**) à la courbe \mathcal{C} et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.

3. Dérivées et points particuliers

Calculer les **dérivées** des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, puis les **points critiques** de $x(t)$ et $y(t)$ en résolvant notamment les équations $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.

Réaliser un tableau de signes pour les fonctions dérivées afin de déterminer les régions de **croissance** ou de **décroissance** de $x(t)$ et $y(t)$, ainsi que le comportement de la courbe \mathcal{C} .

Identifier également les points à tangente horizontale, les points à tangente verticale et les points singuliers. Pour chaque point singulier, calculer la limite de la pente de la tangente.

4. Intersection avec les axes

Déterminer les valeurs de t solutions de l'équation $x(t) = 0$ ou $y(t) = 0$ et les points de la courbe correspondant, qui sont les points d'intersection avec les axes Ox et Oy .

5. Représentation graphique

Réaliser une **représentation graphique**, assez grande, de la courbe paramétrée \mathcal{C} à l'aide de toutes les informations glanées aux points 1 à 4, en précisant les asymptotes et les points particuliers. Pour plus de précision, calculer et représenter éventuellement quelques points supplémentaires de la courbe \mathcal{C} .

6.5.2 Exemple complet

On présente ci-dessous l'étude de la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{e^{-t}}{t} \\ y = \frac{1}{t(t-1)} \end{cases}$

1. Domaine de définition

Le domaine de définition de la fonction $x(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ est $\mathcal{D}_x = \mathbb{R}^*$ car le dénominateur est égal à zéro pour $t_1 = 0$.

Le domaine de définition de la fonction $y(t) = \frac{1}{t(t-1)}$ est $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ car le dénominateur est égal à zéro pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$.

Le domaine de définition de la courbe \mathcal{C} est donc donné par :

$$\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$$

2. Limites aux bornes du domaine de définition et asymptotes

Pour pouvoir déterminer les équations des éventuelles asymptotes verticales et horizontales, on calcule tout d'abord les limites des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ aux bornes du domaine de définition :

▷ Pour $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^{-t}}{t} \stackrel{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty \\ \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t}}{t} \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty \end{aligned}$$

▷ Pour $t = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{e} & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty \\ \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{e} & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty \end{aligned}$$

▷ Pour $t \rightarrow -\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t}}{t} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} H, & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{+\infty}}{=} 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-t}}{1} &= -\infty \end{aligned}$$

▷ Pour $t \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t} \stackrel{\frac{0}{+\infty}}{=} 0 & \bullet \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t(t-1)} \stackrel{\frac{1}{+\infty}}{=} 0 \end{aligned}$$

D'après ces calculs, on a les résultats suivants :

- La droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est une *asymptote verticale* pour $t = 1$.
- La droite d'équation $y = 0$ est une *asymptote horizontale* pour $t \rightarrow -\infty$.
- Il peut exister une asymptote oblique pour $t = 0$. On calcule alors les limites suivantes :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t(t-1)}}{\frac{e^{-t}}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-t}(t-1)} = -1 \\ h &= \lim_{t \rightarrow 0} (y(t) - mx(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t(t-1)} + \frac{e^{-t}}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-t}(t-1)}{t(t-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} H, \\ &\quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-e^{-t}(t-1) + e^{-t}}{2t-1} = -2 \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = -x - 2$ est une *asymptote oblique* pour $t = 0$.

3. Dérivées et points particuliers

On commence par calculer les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$:

$$x'(t) = \frac{-e^{-t} \cdot t - e^{-t}}{t^2} = \frac{-e^{-t}(t+1)}{t^2}$$

$$y'(t) = \frac{-2t+1}{t^2(t-1)^2}$$

On cherche ensuite les zéros de $x'(t)$ et $y'(t)$ et les points où $x'(t)$ et $y'(t)$ ne sont pas définies \rightarrow points critiques des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

$x'(t)$ s'annule pour $t = -1$ et $t \rightarrow +\infty$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$. De plus $x'(t)$ n'est pas définie pour $t = 0$, qui n'appartient pas à \mathcal{D}_x (donc n'est pas un point critique).

$y'(t)$ s'annule pour $t = \frac{1}{2}$ et $t \rightarrow \pm\infty$ car $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0$. De plus $y'(t)$ n'est pas définie pour $t = 0$ et $t = 1$, qui n'appartiennent pas à \mathcal{D}_y (donc ne sont pas des points critiques).

On reporte les valeurs de t qui correspondent aux points critiques de $x(t)$ et $y(t)$ et les valeurs déterminées au point 1 dans la première ligne du tableau de signes des dérivées, qu'on complète ensuite.

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	+	+	0	-		-	-	-	-	-	0
$y'(t)$	0	+	+	+		+	0	-		-	0
$x(t)$	$-\infty$	\rightarrow	$-e$	\leftarrow		\leftarrow	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	\leftarrow	$\frac{1}{e}$	\leftarrow	0
$y(t)$	0	\uparrow	$\frac{1}{2}$	\uparrow		\uparrow	-4	\downarrow		\downarrow	0
comportement	A.H.	\nearrow	tg. ver.	\nwarrow	A.O.	\nwarrow	tg. hor.	\swarrow	A.V.	\swarrow	pt. sing.

On obtient donc les points particuliers de la courbe suivants :

- point à tangente verticale : $(-e; \frac{1}{2}) \cong (-2.72; 0.5)$.
- point à tangente horizontale : $(\frac{2}{\sqrt{e}}; -4) \cong (1.21; -4)$.
- point singulier : $(0; 0)$. La limite de la pente de la tangente quand $t \rightarrow +\infty$ est donnée par :

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1-2t}{t^2(t-1)^2} \cdot \frac{t^2}{-e^{-t}(t+1)} =$$

$$-\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1-2t)e^t}{(t-1)^2(t+1)} = -\underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1-2t}{t+1}}_{-2} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{(t-1)^2} \stackrel{+\infty}{\underset{+\infty}{=}}_{H.}$$

$$2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{2(t-1)} \stackrel{+\infty}{\underset{+\infty}{=}}_{H.} 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{2} = +\infty$$

4. Intersection avec les axes

L'équation $x(t) = \frac{e^{-t}}{t} = 0$ n'a pas de solution dans \mathcal{D}_C , donc pas de point d'intersection avec l'axe Oy .

L'équation $x(t) = \frac{1}{t(t-1)} = 0$ n'a pas de solution dans \mathcal{D}_C , donc pas de point d'intersection avec l'axe Ox .

5. Représentation graphique

On commence par tracer un système d'axes (assez grand) dans lequel on reporte en "traitillés" les asymptotes déterminées au point 2, ainsi que les éventuels trous et sauts.

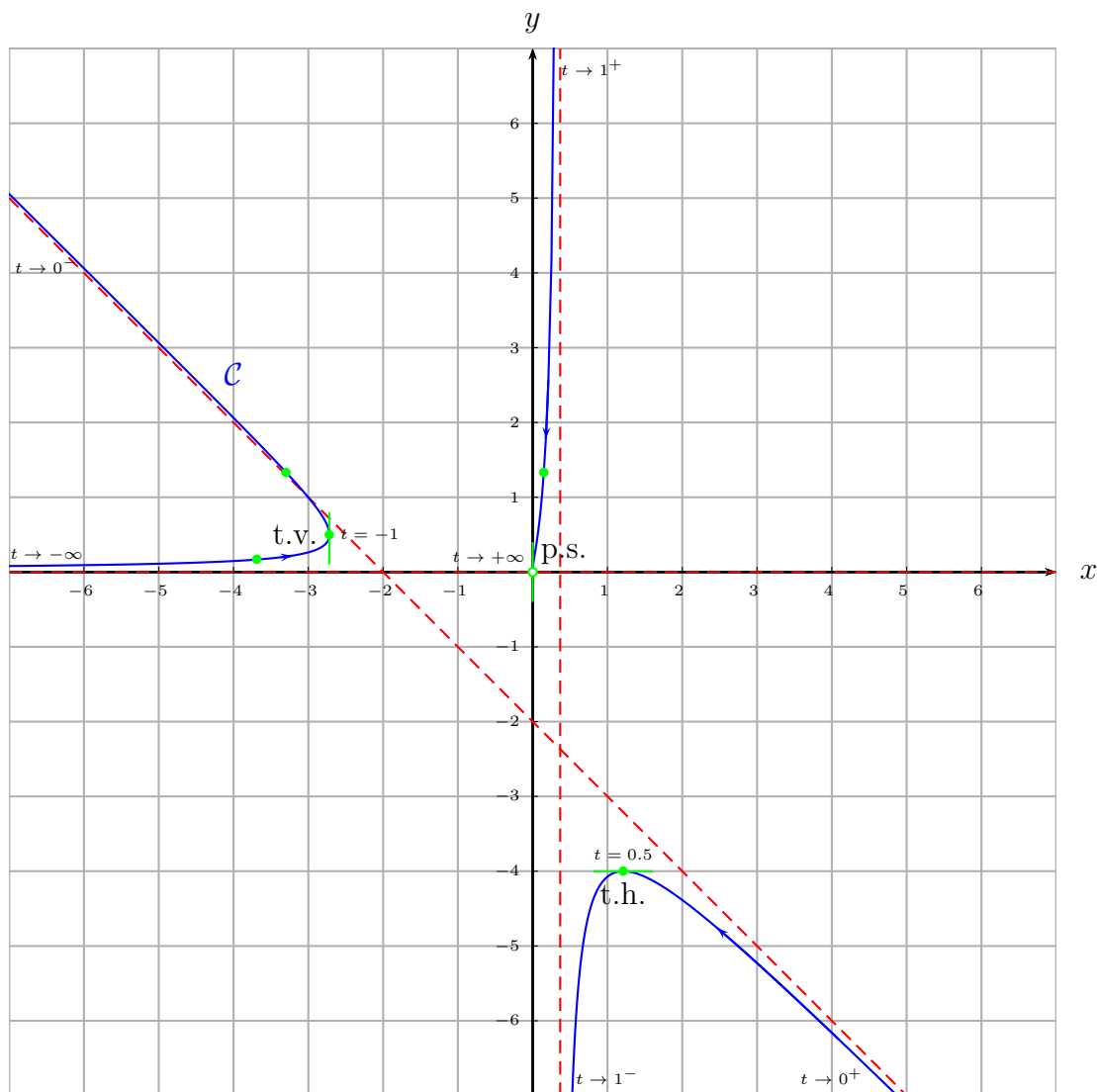
On dessine ensuite tous les points particuliers déterminés aux points 3 et 4 de la méthode. Pour les points à tangente verticale, à tangente horizontale et singuliers, on dessine également une petite partie de la tangente à la courbe en ces points.

Pour plus de précision, on calcule quelques points de la courbe \mathcal{C} :

$$M_{-2} \cong (-3.69; 0.17) ; M_{-0.5} \cong (-3.30; 1.33) ; M_{1.5} \cong (0.15; 1.33) ; \dots$$

que l'on reporte sur le dessin.

On trace enfin la courbe d'après les informations récoltées au point 3. On se base notamment sur le tableau de signes réalisé à ce point. On obtient ainsi la représentation graphique de \mathcal{C} donnée ci-dessous.



6.6 Exercices

1) Déterminer les équations cartésiennes des courbes dont les représentations paramétriques sont données ci-dessous, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t}{t-1} \\ y = t + 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b \cdot \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{e) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{a}{\cos(t)} \\ y = b \tan(t) \end{cases}$$

$$\text{f) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin(t) \end{cases}$$

2) Etudier et représenter graphiquement les courbes \mathcal{C} définies ci-dessous :

$$\text{a) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\text{e) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1} \\ y = \frac{2t-1}{t^2-1} \end{cases}$$

$$\text{f) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2+1}{2t} \\ y = \frac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

$$\text{g) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{e^t}{2t^2-3t} \\ y = \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

$$\text{h) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{e^{-t}}{t} \\ y = \frac{1}{t(t+2)} \end{cases}$$

$$\text{i) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{\ln(t)}{t} \\ y = t \ln(t) \end{cases}$$

$$\text{j) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

$$\text{k) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin^3(t) \end{cases}$$

$$\text{l) } \mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cos^3(t) \\ y = a \sin(t) \end{cases}$$

6.7 Solutions des exercices

1) a) $y = x^2 + 4x + 5$

c) $x = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

f) $a^4 x^2 = (a^2 - y^2)^3$

Deuxième partie

Algèbre

Chapitre 7

Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques.

7.1 Domaines du plan

Définition 7.1

Une **inéquation linéaire à deux inconnues** x et y est une inéquation qui peut être ramenée à la forme :

$$ax + by + c \geq 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le symbole \geq peut être remplacé par un des symboles $>$, $<$ ou \leq .

L'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'inéquation $ax + by + c \geq 0$ est un **demi-plan** qui admet comme frontière la droite d d'équation $ax + by + c = 0$.

Remarque

Si le symbole d'inégalité est \geq ou \leq , les points de la droite frontière d sont solutions de l'inéquation. Dans le cas contraire où le symbole d'inégalité est $>$ ou $<$, les points de la droite frontière d ne sont pas solutions de l'inéquation.

Exemples

1. Le couple $(-2; 3)$ est une solution de l'inéquation $2x + 3y - 9 \leq 0$ car $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 9 = -4 \leq 0$. Par contre le couple $(3; 4)$ n'est pas solution de l'inéquation $2x + 3y - 9 \leq 0$ car $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 9 = 9 \not\leq 0$.
2. L'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'inéquation

$$2x + 3y - 9 \leq 0$$

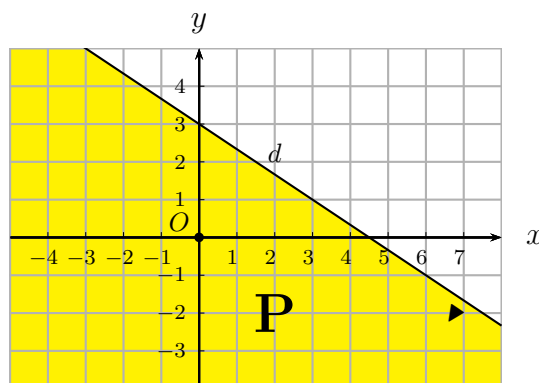
est un demi-plan qui se représente graphiquement en utilisant la droite frontière

$$d : 2x + 3y - 9 = 0$$

Cette droite passe, par exemple, par le point A de coordonnées $(0; 3)$ et le point B de coordonnées $(3, 1)$.

Ainsi, pour représenter l'ensemble des solutions de cette inéquation, on trace tout d'abord la droite d . Puis, on considère un **point test**, c'est-à-dire, un point n'appartenant pas à d qui permettra de savoir dans quel demi-plan l'inéquation $2x + 3y - 9 \leq 0$ est vérifiée (comme d partage le plan en deux demi-plans). On peut prendre ici, par exemple, le point O de coordonnées $(0;0)$. Comme les coordonnées de O vérifient $2x + 3y - 9 \leq 0$, ce point est solution de l'inéquation. L'ensemble des points M vérifiant l'inéquation $2x + 3y - 9 \leq 0$ est donc le demi-plan de frontière d contenant le point O . On hachure ou on colorie généralement le demi-plan P solution.

Comme le signe d'inégalité est \leq , les points de la droite d sont solutions de l'inéquation et, pour le montrer, on dessine la droite d en trait plein. Si le signe d'inégalité avait été $>$ ou $<$, on aurait dessiné la droite d en traitillés pour montrer que les points de cette droite ne sont pas, dans ce cas, solutions de l'inéquation.



3. Le système d'inéquations

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ 2x + y > 0 \end{cases}$$

se représente graphiquement en utilisant les droites d_1 et d_2 d'équations :

$$d_1 : 2x + 3y = 9$$

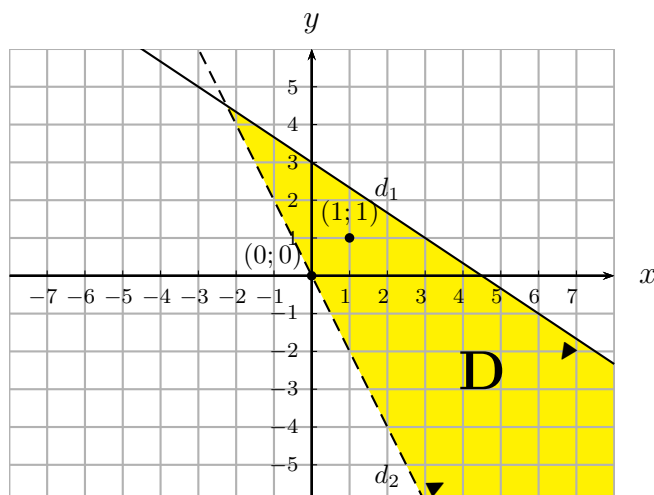
$$d_2 : 2x + y = 0$$

La première inéquation est équivalente à celle donnée à l'exemple 2.

L'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant la seconde inéquation $2x + y > 0$ est le demi-plan admettant comme frontière la droite d_2 (dessinée en traitillés car le symbole d'inégalité est $>$) et contenant le point test $(1; 1)$ (on ne peut pas considérer ici le point $(0; 0)$ car il appartient à la droite d_2).

Pour représenter l'ensemble des points solutions du système d'inéquations donné ci-dessus (points qui vérifient simultanément les deux inéquations), on commence par tracer les deux droites frontières. On indique ensuite, par un petit triangle, le demi-plan défini par chaque inéquation. Le domaine D représentant l'ensemble des points satisfaisant toutes les inéquations est alors l'intersection des demi-plans définis par les inéquations considérées.

On hachure ou on colorie finalement ce domaine D pour indiquer l'ensemble des solutions du système d'inéquations.



Ainsi, pour représenter l'ensemble des solutions d'une inéquation linéaire à deux inconnues de la forme $ax + by + c \geq 0$ (ou avec un des symboles $<$, $>$, \leq), on peut suivre la démarche suivante :

1. Dessiner la **droite frontière** $ax + by + c = 0$:
 - en trait plein si le symbole d'inégalité est \geq ou \leq ,
 - en traitillés si le symbole d'inégalité est $>$ ou $<$.
2. Déterminer de quel côté de la frontière sont les points qui satisfont l'inéquation à l'aide d'un **point test**.
3. Colorier le demi-plan solution.

7.2 Programmation linéaire

7.2.1 Un exemple : l'artisan pâtissier

Un artisan pâtissier décide de confectionner des chaussons et des tartes aux pommes. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il dispose de 3,5 kg de pommes, 1,5 kg de pâte et de 5 plaques.

Pour confectionner un chausson aux pommes, il utilise 200 g de pommes et 100 g de pâte. Chaque chausson est vendu 3 CHF.

Pour confectionner une tarte aux pommes, il utilise 500 g de pommes, 150 g de pâte et une plaque. Chaque plaque est divisée en 6 parts vendues chacune 2 CHF.

Combien de chaussons et de tartes aux pommes doit-il fabriquer pour maximiser son chiffre d'affaire ?

Formulation mathématique du problème

Il faut traduire ce problème dans une formulation mathématique afin de pouvoir le résoudre. Cette formulation mathématique va généralement se réaliser en suivant les 3 points donnés ci-dessous :

- 1) *Identifier les inconnues à déterminer dans le problème.* Ces inconnues sont appelées **variables de décision**.

Dans notre exemple, il faut déterminer le nombre de chaussons et de tartes à confectionner. On va noter

- x : nombre de chaussons aux pommes
- y : nombre de tartes aux pommes

- 2) *Identifier les restrictions possibles* \longrightarrow *à chaque ressource disponible ou à chaque limitation correspond une inéquation.* Ces inéquations sont appelées **contraintes**.

Dans notre cas, les ressources à considérer sont les pommes et les pâtes. De plus, l'artisan pâtissier ne dispose que de 5 plaques. On considère alors ces trois ressources et on associe à chacune d'elles une inéquation.

Pommes : Pour chaque chausson fabriqué, le pâtissier utilise 200 grammes de pommes. Ainsi pour confectionner x chaussons, il va utiliser $200 \cdot x$ grammes de pommes. De même, pour chaque tarte fabriquée, il utilise 500 grammes de pommes. Ainsi pour confectionner y tartes, il va utiliser $500 \cdot y$ grammes de pommes. Or, il ne possède que 3500 grammes de pommes.

Ceci se traduit par l'inéquation :

$$200x + 500y \leq 3500$$

Pâte : Pour chaque chausson fabriqué, le pâtissier utilise 100 grammes de pâte. Ainsi pour confectionner x chaussons, il va utiliser $100 \cdot x$ grammes de pâtes. De même, pour chaque tarte fabriquée, il utilise 150 grammes de pâte. Ainsi pour confectionner y tartes, il va utiliser $150 \cdot y$ grammes de pâte. Or, il ne possède que 1500 grammes de pâte.

Ceci se traduit par l'inéquation :

$$100x + 150y \leq 1500$$

Plaque : Pour chaque tarte fabriquée, l'artisan utilise 1 plaque. Ainsi pour confectionner y tartes, il va utiliser $1 \cdot y$ plaques. Or, il ne possède que 5 plaques.

Ceci se traduit par l'inéquation :

$$y \leq 5$$

Ainsi, étant donné les réserves du pâtissier, les variables de décision x et y devront satisfaire le système d'inéquations linéaires :

$$\begin{cases} 200x + 500y \leq 3500 & \text{pommes} \\ 100x + 150y \leq 1500 & \text{pâte} \\ y \leq 5 & \text{plaques} \end{cases}$$

De plus, le pâtissier ne peut pas fabriquer des quantités négatives. Ainsi, x et y doivent encore vérifier les deux **contraintes de non-négativité** :

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad y \geq 0$$

- 3) *Identifier l'élément à optimiser (à maximiser ou à minimiser).* On parle généralement de **fonction objectif**.

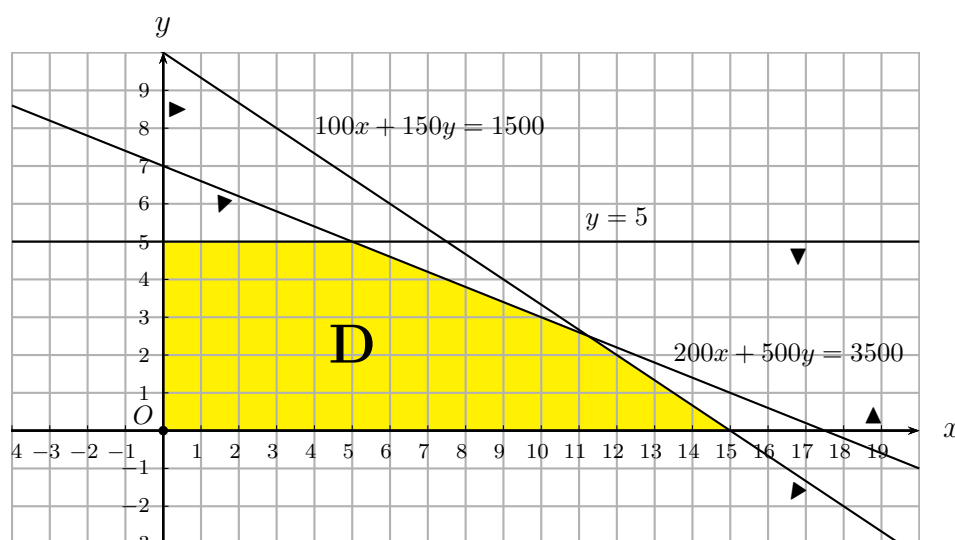
Ici, le pâtissier désire maximiser le chiffre d'affaire associé à une production de x chaussons et y tartes. Comme chaque chausson est vendu 3 CHF, il gagne $3 \cdot x$ CHF en fabriquant x chaussons. On admet généralement le fait que toute la marchandise produite est écoulee. De plus, comme chaque tarte est divisée en 6 parts vendues chacune 2 CHF, il gagne $2 \cdot 6 \cdot y = 12 \cdot y$ CHF en confectionnant y tartes. La fonction objectif R (ou le chiffre d'affaire) à **maximiser** est donnée par :

$$R = 3x + 12y$$

Résolution du problème

On utilise maintenant cette formulation mathématique pour résoudre le problème du pâtissier.

On commence par dessiner le domaine D correspondant à l'ensemble des solutions des 5 inéquations (contraintes) définies par le problème. Pour chaque inéquation, on trace la droite frontière et on indique par un petit triangle le demi-plan défini par l'inéquation. On colorie ensuite le domaine D correspondant à l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes. Ce domaine D est donné ci-dessous (coloriée en jaune). La solution optimale, celle qui rend le chiffre d'affaire maximal, se trouve sur le bord ou à l'intérieur de ce domaine.



A ce stade, on n'a pas encore utilisé la connaissance de la fonction objectif à maximiser :

$$R = 3x + 12y$$

En soustrayant $3x$ et en divisant par 12, on voit que cette équation est équivalente à

$$y = \frac{R - 3x}{12} = -\frac{3}{12}x + \frac{R}{12} = -\frac{1}{4}x + \frac{R}{12}$$

Ceci permet de constater que le chiffre d'affaire est directement lié à l'ordonnée à l'origine de la droite de pente $-\frac{1}{4}$ passant par le point $(x; y)$. Ici, plus l'ordonnée à l'origine sera importante, plus le chiffre d'affaire sera conséquent puisqu'il est égal à 12 fois l'ordonnée à l'origine. Or, les contraintes forcent le point $(x; y)$ à se trouver dans le domaine D . Il faut donc trouver la droite de pente $-\frac{1}{4}$ passant par au moins un point du domaine D et ayant la plus grande ordonnée à l'origine possible.

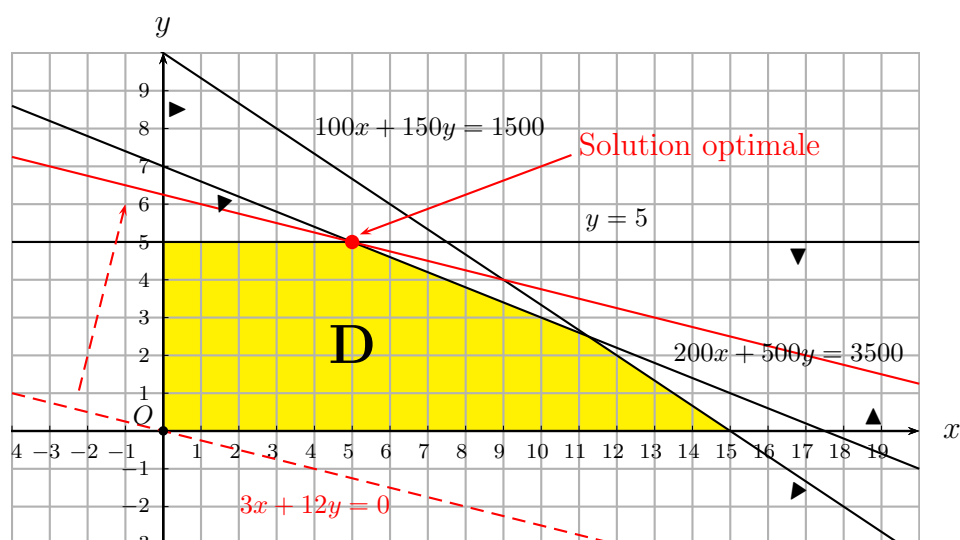
Graphiquement, on commence par dessiner la droite représentant la fonction objectif et correspondant à un chiffre d'affaire de 0 (ou, de manière équivalente, passant par l'origine du repère) :

$$3x + 12y = 0$$

qui correspond à la droite de pente $-\frac{1}{4}$ d'ordonnée à l'origine égale à 0.

On effectue ensuite une translation de cette droite de manière à rendre son ordonnée à l'origine la plus importante possible tout en gardant au moins un point de la droite dans le domaine D .

Le point $(x; y)$ correspondant à la production (ou solution) optimale est alors le dernier point du domaine D que la droite représentant la fonction objectif touche lors de son déplacement.



Dans notre cas, ce point correspond au point d'intersection des droites d'équations $200x + 500y = 3500$ et $y = 5$. On peut le déterminer en résolvant le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 200x + 500y = 3500 \\ y = 5 \end{cases}$$

La solution de ce système est le couple $(5; 5)$.

Ainsi, si l'artisan pâtissier veut maximiser son chiffre d'affaire, il doit confectionner 5 chaussons aux pommes et 5 tartes aux pommes. Son chiffre d'affaire sera alors de

$$R = 3 \cdot 5 + 12 \cdot 5 = 75 \text{ CHF}$$

Pour cela, il aura besoin de $200 \cdot 5 + 500 \cdot 5 = 3500$ g de pommes, $100 \cdot 5 + 150 \cdot 5 = 1250$ g de pâte et $1 \cdot 5 = 5$ plaques. On voit, ici, que le pâtissier n'utilise pas toute la pâte pour rendre son chiffre d'affaire maximale.

7.2.2 Démarche générale de résolution

On donne ci-dessous la démarche générale de résolution d'un problème de programmation linéaire que l'on peut modéliser à l'aide de 2 variables de décision.

1. Formuler le problème sous une forme mathématique en identifiant les *variables de décision*, les *m contraintes* et la *fonction objectif*.
2. Déterminer et représenter le domaine D correspondant à l'ensemble des solutions des m inéquations (contraintes) définies par le problème.
3. Tracer la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine du repère.
4. Réaliser une translation de cette droite de manière à rendre l'ordonnée à l'origine
 - la plus *grande* possible si on désire *maximiser* la valeur de la fonction objectif,
 - la plus *petite* possible si on désire *minimiser* la valeur de la fonction objectif, tout en gardant au moins un point de la droite dans le domaine D .
5. Le point correspondant à la *solution optimale* est le dernier point du domaine D que la droite correspondant à la fonction objectif touchera lors de son déplacement.

Remarques

1. Seuls les points $(x; y)$ faisant partie du domaine D satisfont toutes les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera **toujours** l'un des sommets de ce domaine si la solution cherchée est un nombre réel.
2. Dans l'exemple de l'artisan pâtissier, la solution optimale est en nombres entiers; ce n'est de loin pas toujours le cas. Il faudra donc toujours chercher les coordonnées exactes du sommet, que l'on détermine grâce au dessin, en calculant l'intersection des droites concernées.
3. Réaliser un dessin suffisamment grand pour être précis. Ne pas le placer tout en bas d'une feuille, car ceci posera problème pour dessiner la droite correspondant à la fonction objectif.

7.3 Exercices

- 1) Pour nourrir des bovins, on dispose de deux produits P et P' composés des matières A , B et C .

Un sac de P pèse 900 g et contient 100 g de A , 200 g de B et 600 g de C .

Un sac de P' pèse 600 g et contient 200 g de chacune des matières.

Quotidiennement, chaque bovin doit consommer au moins 300 g de A , 500 g de B et 700 g de C .

Les prix respectifs par kilo de P et P' sont de 6 CHF et 4 CHF.

Quelle dépense journalière minimale par bovin faut-il envisager, de sorte que chaque bovin reçoive une quantité de nourriture suffisante ?

- 2) L'organisateur d'une excursion doit louer des autocars pour transporter 400 personnes.

la société de transport à laquelle il s'adresse dispose de 10 autocars dont la capacité de transport est de 30 personnes, et de 6 autocars dont la capacité est de 45 personnes.

Pour le premier type d'autocar, la société demande 1500 CHF par autocar. Pour le second type, elle demande 2500 CHF par autocar.

- a) Trouver le nombre d'autocars de chaque type que l'organisateur doit louer pour que la location soit la moins chère possible.

- b) Que se passe-t-il si la société demande 2000 CHF par autocar du second type au lieu de 2500 CHF.

- 3) Une entreprise de meubles fabrique des tables de salle à manger et des tables de cuisine en utilisant trois types de machines M , M' et M'' .

Pour fabriquer une table de salle à manger, il faut utiliser M pendant 1 heure, M' pendant 1 heure et M'' pendant 3 heures.

Pour une table de cuisine, il faut 1 heure de M , 2 heures de M' et 1 heure de M'' .

Pour la période à venir, les machines M , M' et M'' ne sont respectivement disponibles que 60 heures, 90 heures et 150 heures.

- a) Sachant qu'une table de salle à manger rapporte 400 CHF et une table de cuisine 200 CHF, déterminer ce que doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximale.

- b) Même question dans le cas où une table de salle à manger rapporte 200 CHF et une table de cuisine 300 CHF.

- c) Même question dans le cas où chaque table rapporte 300 CHF.

- d) Même question dans le cas où une table de salle à manger rapporte 140 CHF et une table de cuisine 420 CHF.

7.4 Solutions des exercices

- 1) 11 CHF
- 2) a) 10 autocars de capacité 30 et 2,22 autocars de capacité 45
b) 4,33 autocars de capacité 30 et 6 autocars de capacité 45
- 3) a) 45 tables de salle à manger et 15 tables de cuisine
b) 30 tables de salle à manger et 30 tables de cuisine
c) 30 tables de salle à manger et 30 tables de cuisine, par exemple (infinité de solutions)
d) 0 table de salle à manger et 45 tables de cuisine

Troisième partie

**Géométrie vectorielle et analytique
plane**

Chapitre 8

Produit scalaire

8.1 Définitions produit scalaire et norme

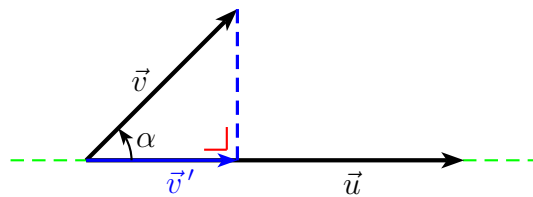
Le produit scalaire est une notion importante en géométrie pour traiter des questions de longueurs, angles et orthogonalité, ainsi qu'en physique où elle permet d'exprimer plusieurs grandeurs physiques, notamment le travail d'une force lors d'un déplacement. A deux vecteurs, il associe leur produit, qui est un *nombre* (ou un *scalaire*, d'où son nom).

Définition 8.1

On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} le produit de la mesure algébrique (avec signe) \bar{u} de \vec{u} et de la mesure algébrique \bar{v}' de la projection orthogonale, \vec{v}' , de \vec{v} sur une droite de direction \vec{u} .

On note le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} :

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}'}$$



Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et le nombre réel λ , on a :

1. Commutativité :
2. Bilinearité :
3. Produit par un nombre réel :
4. Positivité :
5. Vecteur nul :

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= \vec{v} \bullet \vec{u} \\ \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w} \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v}) \\ \vec{u} \bullet \vec{u} &\geq 0 \\ \vec{u} \bullet \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

Définition 8.2

On appelle **norme** d'un vecteur \vec{u} , la racine carrée du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{u}$. La norme

de \vec{u} se note $\|\vec{u}\|$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Remarque

La **norme** d'un vecteur est synonyme de la **longueur** de chacune des flèches représentant ce vecteur.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et le nombre réel λ , on a :

1. Positivité :

$$\|\vec{u}\| \geq 0$$

2. Vecteur nul :

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

3. Produit par un nombre réel :

$$\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$$

4. Inégalité triangulaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

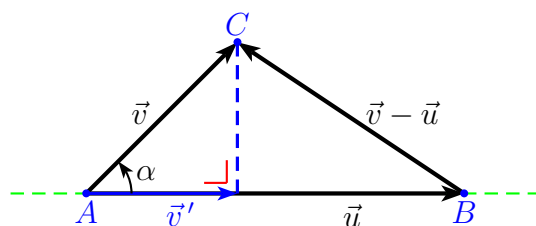
Proposition 8.1

Si A , B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$ (α est l'angle entre le vecteur \vec{u} et le vecteur \vec{v}), on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

On appelle cette égalité l'**expression géométrique** du produit scalaire.

Démonstration. Soient A , B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$. Pour le triangle ABC , les longueurs des côtés sont données par $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$.



Le théorème du cosinus affirme que

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

Nous pouvons utiliser la définition de la norme pour écrire cette égalité en terme de produits scalaires

$$(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Le membre de gauche de cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= \vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'égalité

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

qui peut s'écrire, après simplifications,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Il est également possible de démontrer cette égalité en partant du fait que la mesure algébrique de \vec{v}' est donnée par $\vec{v}' = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$. \square

Définition 8.3

On appelle vecteur **unitaire** un vecteur de norme 1.

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur unitaire} \iff \|\vec{u}\| = 1}$$

Proposition 8.2

Si $\vec{v} \neq 0$, les vecteurs unitaires de même direction que \vec{v} sont

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

8.2 Orthogonalité

8.2.1 Vecteurs orthogonaux et droites perpendiculaires

Définition 8.4

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarques

1. Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs \vec{v} , car $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul, sans que l'un des vecteurs soit nul.

Définition 8.5

Les droites d et g de vecteurs directeurs respectifs \vec{d} et \vec{g} sont **perpendiculaires** si les vecteurs \vec{d} et \vec{g} sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{d} \cdot \vec{g} = 0$.

Remarque

Deux droites perpendiculaires sont nécessairement sécantes.

Définition 8.6

On appelle **vecteur normal** à une droite d tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

8.2.2 Repère orthonormé

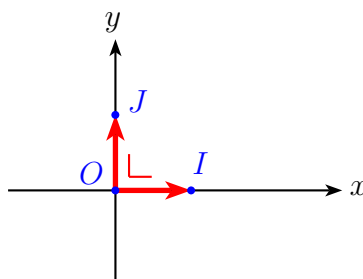
Définition 8.7

Une base (\vec{i}, \vec{j}) de \mathbf{V}_2 est dite **orthonormée** si

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$$

Un repère $(O; I; J)$ de π est dit **orthonormé** si

$$\begin{cases} \|\vec{OI}\| = \|\vec{OJ}\| = 1 \\ \vec{OI} \cdot \vec{OJ} = 0 \end{cases}$$



Remarque

Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases de \mathbf{V}_2 comme étant orthonormées et les repères de π comme étant également orthonormés.

8.2.3 Expression analytique du produit scalaire

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Proposition 8.3

Le **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Démonstration. Dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , on calcule le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} (en utilisant les propriétés du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}) \cdot (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}) \\ &= u_1 v_1 \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{=1} + u_2 v_2 \cdot \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{=1} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

□

8.2.4 Expression analytique de la norme

On considère le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ donné en composantes dans une *base orthonormée* (\vec{i}, \vec{j}) .

Proposition 8.4

La **norme** du vecteur \vec{u} est le nombre réel :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

8.2.5 Vecteur normal à une droite

Proposition 8.5

La droite d'équation cartésienne $p : ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme **vecteur normal**.

Démonstration. Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite d'équation cartésienne $d : ax + by + c = 0$. Nous allons montrer que les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = a \cdot (x_B - x_A) + b \cdot (y_B - y_A) \\ &= \underbrace{(ax_B + by_B)}_{=-c, \text{ car } B \in d} - \underbrace{(ax_A + by_A)}_{=-c, \text{ car } A \in d} = 0 \end{aligned}$$

Comme \vec{n} est orthogonal à tous les vecteurs formés à partir de deux points de la droite d , \vec{n} est normal à d . □

Remarque

Une droite peut être déterminée par **un point et un vecteur normal**.

Exemple

Nous allons déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3; -1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(3; -4)$ et $C(2; 4)$.

1. Un vecteur normal de la droite d est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de d est $-x + 8y + c = 0$

2. Comme $A \in d$, on peut déterminer d en résolvant l'équation

$$(-1) \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 11$$

L'équation cartésienne de d est : $-x + 8y + 11 = 0$

8.2.6 Pentés de droites perpendiculaires

Proposition 8.6

Deux droites de pentés m et m' non nulles sont perpendiculaires si le produit de leur pentés vaut -1 .

$$\boxed{m \cdot m' = -1} \quad \text{ou} \quad \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

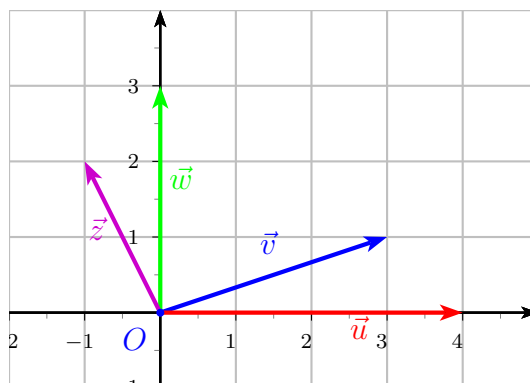
Démonstration. Soient deux droites d et d' perpendiculaires, de pentés respectives m et m' non nulles. Ces droites admettent donc les vecteurs directeurs $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{d}' = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs directeurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{d} \bullet \vec{d}' = 1 \cdot 1 + m \cdot m' = 0$ ou $m \cdot m' = -1$. \square

8.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{OI}, \vec{OJ})$ de \mathbf{V}_2 associée.

- 1) On donne ci-dessous les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{z} .



Calculer les produits scalaires suivants tout d'abord sans utiliser les composantes scalaires des vecteurs (travail à partir de la définition du produit scalaire), puis en les utilisant.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ | b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ | c) $\vec{u} \cdot \vec{z}$ | d) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ |
| e) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ | f) $\vec{w} \cdot \vec{z}$ | g) $\vec{v} \cdot \vec{v}$ | h) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ |
| i) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ | j) $\vec{v} \cdot \vec{z}$ | | |

- 2) L'implication suivante est-elle vraie ?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

avec $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- 3) Soit un rectangle $ABCD$ dont les côtés $[AB]$ et $[BC]$ mesurent respectivement 10 et 4. On note I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

Calculer les produits scalaires suivants tout d'abord sans utiliser les composantes scalaires des vecteurs (travail à partir de la définition du produit scalaire), puis en les utilisant.

- | | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $\vec{AI} \cdot \vec{AB}$ | b) $\vec{AJ} \cdot \vec{AB}$ | c) $\vec{JI} \cdot \vec{AB}$ | d) $\vec{AB} \cdot \vec{BA}$ |
| e) $\vec{AB} \cdot \vec{AA}$ | f) $\vec{AJ} \cdot \vec{AC}$ | g) $\vec{IJ} \cdot \vec{BD}$ | h) $\vec{JI} \cdot \vec{DB}$ |

- 4) Dans le plan, on donne un triangle ABC quelconque.

Construire les ensembles de points suivants :

- | | |
|---|---|
| a) $E = \{M \mid \vec{BC} \cdot \vec{AM} = 0\}$ | b) $F = \{M \mid \vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}\}$ |
| c) $G = \{M \mid \vec{BM} \cdot \vec{CA} > 0\}$ | d) $H = \{M \mid \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0\}$ |

5) Démontrer les implications suivantes et en donner une interprétation géométrique.

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

$$\text{b) } \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

6) On donne les cinq vecteurs suivants : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

a) Calculer

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{b) } \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{c) } \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$\text{d) } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\text{e) } \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{f) } \vec{u} \cdot \vec{a}$$

b) Comparer $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ et $(\vec{u} \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v})$

c) Calculer

$$\text{a) } \|\vec{u}\|$$

$$\text{b) } \|\vec{v}\|$$

$$\text{c) } \|\vec{w}\|$$

$$\text{d) } \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

$$\text{e) } \|\vec{u} + \vec{v}\|$$

$$\text{f) } \|\vec{a}\|$$

7) Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer un vecteur unité \vec{v} colinéaire à \vec{u} .

b) Déterminer un vecteur \vec{w} de norme 4 colinéaire à \vec{u} .

8) Calculer les composantes scalaires d'un vecteur \vec{b} orthogonal à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et de norme $\frac{13}{2}$.

9) Soit le triangle de sommets $A(4; -6)$, $B(9; 9)$ et $C(-1; 4)$.

a) Vérifier, par calcul, que ce triangle est isocèle.

b) Vérifier, par calcul, que ce triangle est rectangle.

c) Calculer l'aire de ce triangle.

10) Un triangle ABC est tel que $a = 3$, $c = 2$, $\beta = 135^\circ$.

Calculer : $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

11) Un triangle ABC a pour côtés $a = 12$, $b = 9$ et $c = 7$.

Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{BC}$.

12) On donne les points $A(2; 1)$ et $B(3; -5)$.

a) Déterminer les sommets C et D d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté.

b) Déterminer les sommets P et Q d'un carré $APBQ$ dont $[AB]$ est une diagonale.

- 13) On donne les points $A(-2; 4)$, $B(1; -2)$ et $C(\lambda; \lambda)$.
Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle?
- 14) On donne les points $A(0; 0)$ et $C(6, 6)$.
Trouver deux points B et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange dont la diagonale $[BD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AC]$.
- 15) Décomposez \vec{v} en deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , où \vec{a} est parallèle à \vec{w} et \vec{b} orthogonal à \vec{w} .
- a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Que peut-on remarquer en comparant les composantes scalaires de \vec{a} et \vec{b} ?
- 16) Écrire l'équation de la droite d passant par le point $A(-5; -3)$ et perpendiculaire à la droite g d'équation $5x + 4y - 20 = 0$.
- 17) Soit le triangle ABC de sommets $A(2; -1)$, $B(4; 7)$ et $C(-2; 1)$.
Écrire l'équation de la hauteur passant par le sommet A .
- 18) On donne les équations de deux côtés d'un rectangle $2x - y + 11 = 0$ et $2x - y + 1 = 0$, ainsi que l'équation de l'une de ses diagonales $y = 3$.
Trouver les sommets de ce rectangle.
- 19) Soient la droite d d'équation $x - 2y - 4 = 0$ et le point $A(3; 5)$.
Déterminer la projection orthogonale du point A sur la droite d .
- 20) Soient les points $A(-2; 1)$, $B(1; \frac{5}{2})$ et $C(1; -1)$
Déterminer le point M de la droite (OC) dont la projection orthogonale sur la droite (AB) est le point $M'(0; 2)$.
- 21) Soient la droite d d'équation $3x - 4y - 8 = 0$ et le point $A(1; 5)$.
Calculer les coordonnées du point symétrique du point A par rapport à la droite d .

8.4 Solutions des exercices

- 1) a) 12 b) 0 c) -4 d) 16
 e) 3 f) 6 g) 10 h) 12
 i) 3 j) -1

2) L'implication est fausse.

- 3) a) 0 b) 50 c) -50 d) -100
 e) 0 f) 66 g) -42 h) -42

- 6) a) a) 5 b) -2 c) 13
 d) 3 e) -20 f) -8
 c) g) $\sqrt{13}$ h) $\sqrt{17}$ i) 1
 j) $\sqrt{13}$ k) $\sqrt{40}$ l) $\sqrt{20}$

- 7) a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{16}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$

- 8) $\vec{b} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

9) Aire : $\frac{125}{2}$

- 10) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4, 24$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4, 24$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8, 24$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13, 24$

11) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -88$

12) a) Deux solutions : $C_1(9; -4)$, $D_1(8; 2)$ et $C_2(-3; -6)$, $D_2(-4; 0)$

b) $P(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$, $Q(\frac{11}{2}; -\frac{3}{2})$

13) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = \frac{5}{2}$ et $\lambda_4 = -2$

Le triangle est isocèle si $\lambda = -5$ ou si $\lambda = \frac{5}{2}$.

14) $C(9; -3)$, $D(-3; 9)$

- 15) a) $\vec{a} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 c) $\vec{a} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

16) $d : -4x + 5y - 5 = 0$

17) $h_a : x + y - 1 = 0$

18) $(-3; 5)$ $(-4; 3)$ $(0; 1)$ $(1; 3)$

19) $P(\frac{26}{5}; \frac{3}{5})$

20) $M(2; -2)$

21) $A'(7; -3)$

Chapitre 9

Applications du produit scalaire

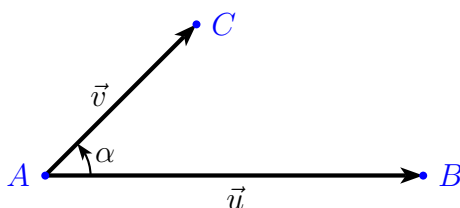
9.1 Angles

9.1.1 Angle de deux vecteurs

Définition 9.1

Soient A , B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

L'angle α entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est égal à l'angle \widehat{BAC} .



Formule

On peut déterminer l'angle α en se basant sur l'expression trigonométrique du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

9.1.2 Angle de deux droites

Définition 9.2

On appelle **angle de deux droites** d et g tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs directeurs \vec{d} et \vec{g} .

Formule

L'angle aigu α de deux droites d et g est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{g}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{g}\|}$$

On peut également déterminer l'angle de deux droites non verticales à partir de leur pente.

Formule

Soient deux droites d et d' non verticales de pentes respectives m et m' . L'angle aigu α des deux droites d et d' est donné par :

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m' - m}{1 + m' \cdot m} \right|$$

Cette dernière formule sera démontrée en exercice.

9.2 Distances

9.2.1 Distance de deux points

Définition 9.3

On appelle **distance** de deux points A et B la norme du vecteur \overrightarrow{AB} . La distance de A à B se note $\delta(A; B)$.

$$\delta(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Propriétés

Quels que soient les points A , B et C du plan π , on a :

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. Positivité : | $\delta(A; B) \geq 0$ |
| 2. Distance nulle : | $\delta(A; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ |
| 3. Inégalité triangulaire : | $\delta(A; C) \leq \delta(A; B) + \delta(B; C)$ |

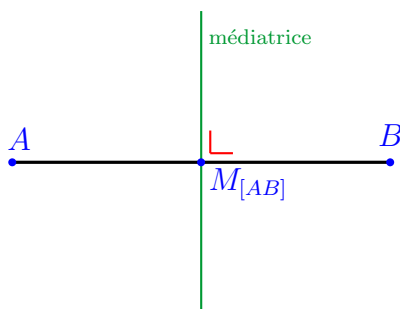
Remarque

On peut définir d'autres distances dans le plan π . Il suffit pour cela de déterminer une application δ de $\pi \times \pi$ vers \mathbb{R}_+ qui vérifie les trois propriétés ci-dessus quels que soient les points A , B et C du plan.

Equidistance

L'ensemble des points du plan équidistants de deux points A et B est une droite appelée **médiatrice** de $[AB]$

La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet comme vecteur normal le vecteur \overrightarrow{AB} .



Exemple

Nous allons établir l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2; -1)$ et $B(-1; 3)$

1. Un vecteur normal de la médiatrice m est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de m est $x + 4y + c = 0$.

2. Comme m passe par le point milieu de $[AB]$, $M_{[AB]} = (-\frac{3}{2}; 1)$, on peut déterminer c en résolvant l'équation :

$$-\frac{3}{2} + 4 \cdot 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\frac{5}{2}$$

L'équation cartésienne de m est : $x + 4y - \frac{5}{2} = 0$

9.2.2 Distance d'un point à une droite

Définition 9.4

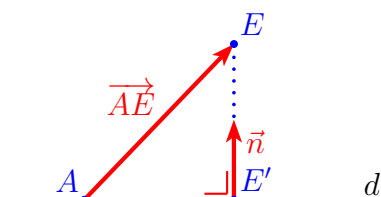
La distance $\delta(E; d)$ d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur d .

Formule vectorielle

Soit d la droite passant par un point A et de vecteur normal \vec{n} .

La distance du point E à la droite d est :

$$\delta(E; d) = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Démonstration. Nous calculons tout d'abord le produit scalaire

$$\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AE'} + \overrightarrow{E'E}) \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{AE'} \cdot \vec{n}}_{=0} + \overrightarrow{E'E} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{E'E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\alpha)$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{E'E}$ et \vec{n} . Or, cet angle est égal à 0° ou à 180° . Ainsi, $\cos(\alpha) = \pm 1$.

En prenant la valeur absolue des deux membres de l'égalité, nous obtenons

$$|\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{E'E}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot 1$$

d'où nous tirons

$$\delta(E; d) = \|\overrightarrow{E'E}\| = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

□

Formule analytique

Soit d la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

La distance de point $E(x_0; y_0)$ à la droite d est :

$$\delta(E; d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. Cette formule s'obtient facilement en appliquant la formule vectorielle avec le point $A(0; -\frac{c}{b})$ de d et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ orthogonal à d :

$$\delta(E; d) = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + \frac{c}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + b \cdot \frac{c}{b}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

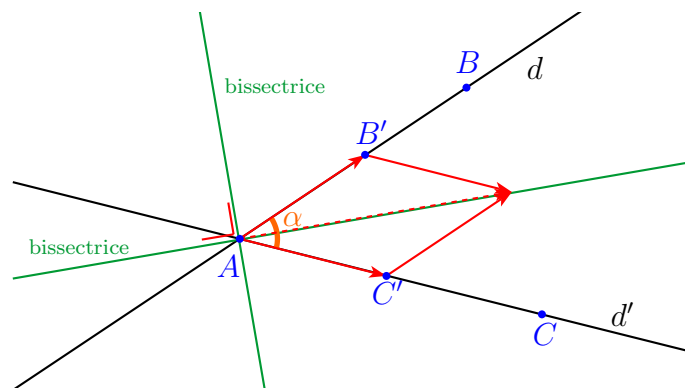
Equidistance

L'ensemble des points du plan équidistants de deux droites sécantes d et d' est constitué de deux droites appelées **bissectrices** de d et d' .

Les droites sécantes d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ont pour bissectrices les deux droites d'équations

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

En prenant le signe $+$, on obtient l'équation d'une des bissectrices, et avec le signe $-$, l'équation de l'autre bissectrice. Ces deux droites sont perpendiculaires.



Pour déterminer la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on peut utiliser la méthode décrite ci-dessus. Parmi les deux droites obtenues, pour sélectionner la bissectrice qui convient, on peut réaliser un dessin ou utiliser les inéquations de demi-plans.

Une autre méthode de construction, à préférer, est basée sur la construction de la bissectrice à la règle et au compas, ainsi que sur le fait que, lorsqu'on additionne deux vecteurs de même norme, leur somme est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle qu'ils forment (car la diagonale d'un losange est également bissectrice).

Ainsi, pour déterminer un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on prend :

- un vecteur $\overrightarrow{AB'}$ de mêmes direction et sens que \overrightarrow{AB}
- un vecteur $\overrightarrow{AC'}$ de mêmes direction et sens que \overrightarrow{AC}

tels que $\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AC'}\|$ (on choisit généralement des normes égales à 1). Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est alors un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle α . Il suffit ensuite de considérer le point A pour obtenir l'équation de cette bissectrice.

Exemple

Soient les points $A(4; 8)$, $B(4; 2)$ et $C(1; 4)$. Pour déterminer la bissectrice de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on commence par déterminer

– le vecteur $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ de mêmes direction et sens que \overrightarrow{AB} , mais de norme égale à 1.

– le vecteur $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ de mêmes direction et sens que \overrightarrow{AC} , mais de norme égale à 1.

Un vecteur directeur de la bissectrice est alors donné par

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de la bissectrice est $b_\alpha : 3x - y + c = 0$.

En utilisant le point A, on détermine le coefficient c

$$3 \cdot 4 - 8 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -4$$

L'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle α est $b_\alpha : 3x - y - 4 = 0$

9.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de \mathbf{V}_2 associée.

1) Soient les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les angles formés par les vecteurs :

a) \vec{v} et \vec{w} b) \vec{w} et \vec{v} c) \vec{v} et \vec{z} d) \vec{z} et \vec{w}

2) Soit le triangle de sommets $A(-2; 5)$, $B(4; 7)$ et $C(10; -1)$.

Calculer les trois angles de ce triangle.

3) Soit un rectangle de dimensions 12 et 8.

Calculer l'angle aigu d'intersection des diagonales.

4) Calculer l'angle aigu d'intersection de la droite d d'équation $x + y - 2 = 0$ avec :

a) l'axe des ordonnées

b) la droite g d'équation $4x + y + 1 = 0$

5) Un triangle est donné par les équations cartésiennes de ses trois côtés :

$$d_1 : 2x - 3y + 5 = 0 \quad d_2 : -4x + 2y + 11 = 0 \quad d_3 : 5x + y = 0$$

Déterminer les angles aigus d'intersection entre ces droites et en déduire les angles intérieurs du triangle.

6) Calculer la distance des points $A(3; -5)$ et $B(8; 7)$.

7) Calculer la distance du point P à la droite d dans les cas suivants, en utilisant la formule vectorielle puis la formule analytique.

a) $P(3; -2)$ $d : 4x + 3y + 9 = 0$

b) $P(-2; -4)$ $d : 5x - 12y - 12 = 0$

c) $P(3; -5)$ $d : 2x - 7y + 8 = 0$

d) $P(2; 1)$ $d : \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$

8) Soit le triangle de sommets $A(-4; 2)$, $B(6; -1)$ et $C(3; 7)$.

a) Calculer le périmètre du triangle ABC .

b) Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet B .

c) Calculer l'aire du triangle ABC .

9) On donne les points $A(3; -2)$ et $B(7; 1)$.

Écrire l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

- 10) Soit le triangle de sommets $A(-2; -3)$, $B(4; 8)$ et $C(0; 6)$.
- Déterminer :
 - le centre de gravité G de ce triangle ;
 - l'orthocentre H de ce triangle ;
 - le centre Ω du cercle circonscrit à ce triangle.
 - Vérifier que les trois points G , H , Ω appartiennent à une même droite, appelée droite d'Euler, et que G se trouve au tiers du segment ΩH .
- 11) On donne les points $A(4; -1)$ et $B(-5; 11)$.
Déterminer les points de la droite (AB) situés à la distance 3 de A .
- 12) Trouver les équations des droites passant par le point $A(1; 1)$ et dont la distance au point $B(-6; 2)$ est égale à 5.
- 13) Soit la droite d d'équation $3x - 4y - 11 = 0$.
Déterminer l'ensemble des points M situés à la distance 8 de la droite d .
- 14) On donne deux points $A(2; 1)$, $B(8; 9)$ et la droite d d'équation $x + 2y - 30 = 0$.
Déterminer les points C situés sur la droite d et tels que l'aire du triangle ABC soit égale à 20.
- 15) Déterminer les équations des bissectrices des droites d'équations : $x - 3y + 8 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.
- 16) Trouver l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites d'équations $3x + 4y - 1 = 0$ et $5x + 12y - 2 = 0$.
- 17) Soient les droites $d : 8x - 15y - 120 = 0$ et $g : 5x + 12y - 60 = 0$.
- Établir les équations des deux axes de symétrie de ces deux droites.
 - Montrer que ces deux axes sont perpendiculaires.
- 18) Soit le triangle de sommets $A(9; -4)$, $B(4; 8)$ et $C(-5; -4)$.
- Écrire l'équation des trois bissectrices intérieures de ce triangle.
 - Calculer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans ce triangle.
 - Calculer le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.
- 19) Soit le triangle de sommets $A(-11; -8)$, $B(13; 10)$ et $C(-11; 0)$.
Déterminer le centre et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.
- 20) Deux droites d_1 et d_2 ont pour bissectrice la droite d'équation $3x - 2y + 16 = 0$.
Trouver l'équation de d_1 , connaissant l'équation de $d_2 : x - 2y + 8 = 0$.

9.4 Solutions des exercices

- 1) a) $109,65^\circ$ b) $109,65^\circ$ c) $14,04^\circ$ d) $123,69^\circ$
- 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 108,43^\circ$, $\gamma = 26,57^\circ$
- 3) $67,38^\circ$
- 4) a) 45° b) $30,96^\circ$
- 5) Angles intérieurs du triangle : $112,38^\circ$, $37,88^\circ$, $29,74^\circ$
- 6) 13
- 7) a) 3 b) 2 c) $\frac{49}{\sqrt{53}}$ d) $\frac{3}{5}$
- 8) a) Périmètre : 27,58
 b) Longueur hauteur : 8,25
 c) Aire : 35,5
- 9) $m_{[AB]} : 4x + 3y - \frac{37}{2} = 0$
- 10) a) $G(\frac{2}{3}; \frac{11}{3})$, $H(-\frac{143}{16}; \frac{87}{8})$, $\Omega(\frac{175}{32}; \frac{1}{16})$
- 11) $(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})$ et $(\frac{29}{5}; -\frac{17}{5})$
- 12) Droites $d : 4x + 3y - 7 = 0$ et $d' : 3x - 4y + 1 = 0$
- 13) $E = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y - 51 = 0 \text{ ou } 3x - 4y + 29 = 0\}$
- 14) $C_1(\frac{140}{11}; \frac{95}{11})$, $C_2(\frac{60}{11}; \frac{135}{11})$
- 15) Bissectrices $b_1 : 2x + 2y - 9 = 0$ et $b_2 : 4x - 4y + 7 = 0$
- 16) Bissectrice $b : 64x + 112y - 23 = 0$
- 17) Axes de symétrie : $a : 19x - 399y - 540 = 0$ et $a' : 189x + 9y - 2580 = 0$
- 18) a) $b_A : 2x + 3y - 6 = 0$, $b_B : 8x - y - 24 = 0$, $b_C : x - 2y - 3 = 0$
 b) $\Omega(3; 0)$
 c) $r = 4$
- 19) Centre : $\Omega(-8; -2)$, rayon : $r = 3$
- 20) $d_1 : 29x - 2y + 120 = 0$

Chapitre 10

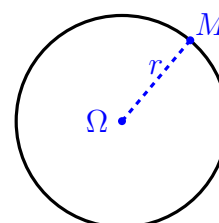
Le cercle

10.1 Définition

Définition 10.1

On appelle **cercle** c de **centre** Ω et de **rayon** r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des points M du plan situés à la distance r du centre Ω . On a donc :

$$M \in c \Leftrightarrow \delta(\Omega; M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$



On note ce cercle : $c(\Omega; r)$.

10.2 Equation cartésienne d'un cercle

Soit le cercle c de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r .

Un point $M(x; y)$ appartient au cercle c si et seulement si $\delta(\Omega; M) = r$. On a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r &\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \end{aligned}$$

Cette dernière relation est appelée **équation cartésienne** (canonique) du cercle c .

En développant la formule ci-dessus, on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$$

avec $a \neq 0$, appelée **équation générale** d'un cercle.

Remarque

Tous les cercles peuvent s'exprimer par une équation du type $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$, mais l'ensemble des points vérifiant une équation de ce type n'est pas nécessairement un cercle (ce peut être l'ensemble vide).

Exemple

Soit le cercle c donné par l'équation générale : $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$. Nous allons déterminer le centre Ω et le rayon r de ce cercle.

L'idée est de transformer l'équation générale en l'équation cartésienne canonique pour pouvoir lire directement Ω et r . On commence par regrouper les termes en x et y , puis on "complète les carrés".

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2 - 10x}_{(x-5)^2 - 25} + \underbrace{y^2 + 4y}_{(y+2)^2 - 4} + 13 &= 0 \\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 &= 25 + 4 - 13 \\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Le cercle c a pour centre $\Omega(5; -2)$ et pour rayon $r = \sqrt{16} = 4$.

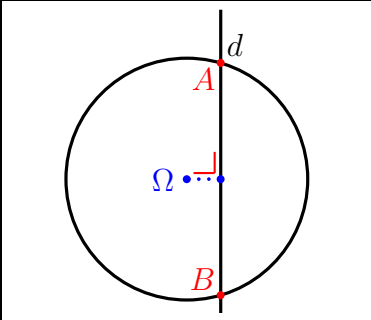
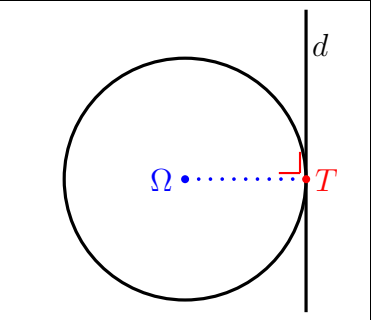
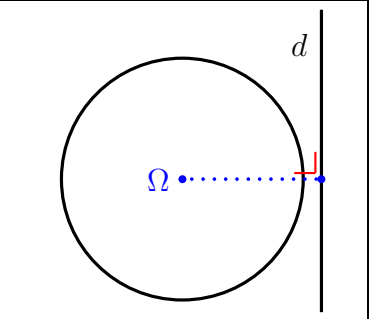
Définition 10.2

On appelle **disque ouvert** $(\Omega; r)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(\Omega; M) < r$.

On appelle **disque fermé** $(\Omega; r)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(\Omega; M) \leq r$.

10.3 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'un cercle $c(\Omega; r)$.

		
$\delta(\Omega; d) < r$	$\delta(\Omega; d) = r$	$\delta(\Omega; d) > r$
Deux points A et B d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Définition 10.3

Une **droite tangente** au cercle $c(\Omega; r)$ est une droite située à la distance r de Ω .

Propriété

La droite tangente au cercle $c(\Omega; r)$ au point T a pour vecteur normal $\vec{\Omega T}$.

Calcul de l'intersection d'une droite et d'un cercle

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un cercle c .

Les points communs au cercle et à la droite ont des coordonnées qui vérifient l'équation du cercle et l'équation de la droite. Pour calculer les coordonnées des points d'intersection,

il suffit donc de résoudre le système formé de l'équation cartésienne du cercle et de l'équation cartésienne de la droite.

Pour ceci, on isole une des inconnues dans l'équation cartésienne de la droite et on la substitue dans l'équation cartésienne du cercle.

On obtient alors une équation de degré 2 à une inconnue, qu'on résout.

- Si cette équation admet deux solutions, alors l'intersection est constituée de deux points A et B .
- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point T . d est tangente au cercle c en T .
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soient le cercle $c : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ et la droite $d : 2x - y - 10 = 0$. Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection en résolvant le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2x - 10$$

On peut isoler y dans l'équation de la droite et substituer cet y dans l'équation du cercle pour obtenir

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 10)^2 - 8x - 6(2x - 10) &= 0 \\ x^2 + 4x^2 - 40x + 100 - 8x - 12x + 60 &= 0 \\ 5x^2 - 60x + 160 &= 0 \\ x^2 - 12x + 32 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 16 = 4^2$.

Comme $\Delta > 0$, la droite d et le cercle c s'intersectent en deux points A et B . Les coordonnées de ces points sont :

$$\begin{aligned} x_A = \frac{12 + 4}{2} = 8 &\rightarrow y_A = 2 \cdot 8 - 10 = 6 \\ x_B = \frac{12 - 4}{2} = 4 &\rightarrow y_B = 2 \cdot 4 - 10 = -2 \end{aligned}$$

On a donc les deux points d'intersection $A(8; 6)$ et $B(4; -2)$.

Définition 10.4

L'angle aigu d'intersection entre une droite et un cercle est l'angle aigu formé par la droite et la tangente au cercle en un des points d'intersection.

10.4 Position relatives de deux cercles

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux cercles $c(\Omega; R)$ et $c'(\Omega', r)$ avec $R > r$.

$\delta(\Omega; \Omega') < R - r$	$\delta(\Omega; \Omega') = R - r$	$\begin{cases} \delta(\Omega; \Omega') > R - r \\ \delta(\Omega; \Omega') < R + r \end{cases}$	$\delta(\Omega; \Omega') = R + r$	$\delta(\Omega; \Omega') > R + r$
$\cap : \emptyset$	$\cap : \text{un point } I$	$\cap : A \text{ et } B$	$\cap : \text{un point } I$	$\cap : \emptyset$

Calcul de l'intersection de deux cercles

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection de deux cercles c et c' .

Les points communs aux deux cercles ont des coordonnées qui vérifient les équations de ces deux cercles. Pour calculer les coordonnées des points d'intersection, il suffit donc de résoudre le système formé par les équations cartésiennes de ces deux cercles.

En soustrayant les équations de ces cercles, on obtient l'équation d'une droite qui passe par les éventuels points d'intersection (car les solutions d'un système d'équations sont aussi solutions des combinaisons linéaires des équations du système). On est ainsi ramené à la recherche des points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Exemple

Soient les cercles $c : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ et $c' : x^2 + y^2 - 16x - 2y + 40 = 0$. Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection en considérant tout d'abord la différence des deux équations du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 40 = 0 \quad \ominus \end{cases}$$

$$8x - 4y - 40 = 0$$

En divisant par 4 les deux membres de l'équation obtenue, on trouve l'équation de la droite $d : 2x - y - 10 = 0$.

On doit maintenant déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $c : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ et la droite $d : 2x - y - 10 = 0$, ce qui a été fait à l'exemple précédent.

Ainsi les cercles c et c' s'intersectent en $A(8; 6)$ et $B(4; -2)$.

Définition 10.5

L'angle aigu d'intersection entre deux cercles est l'angle aigu formé par les tangentes à ces cercles en un des points d'intersection.

10.5 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{OI}, \vec{OJ})$ de \mathbf{V}_2 associée.

- 1) Écrire l'équation cartésienne développée des cercles suivants :
 - a) cercle de centre O (origine) et de rayon $r = 3$.
 - b) cercle de centre $\Omega(6; -8)$ et passant par l'origine.
- 2) Écrire l'équation cartésienne développée du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$.
- 3) Les équations suivantes définissent-elles des cercles ? Si oui, déterminer le centre et le rayon.

a) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$	b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$	d) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 26 = 0$	f) $2x^2 + 2y^2 - 9x + 4y - 8 = 0$
- 4) Représenter graphiquement l'ensemble E des points $M(x; y)$ tels que $y = \sqrt{4 - x^2}$. Exprimer la fonction f dont le graphe est E .
- 5) a) Écrire la fonction f dont la représentation graphique est le demi-cercle situé au-dessus de son diamètre horizontal $[AB]$, avec $A(-3; 5)$ et $B(3; 5)$.
 b) Même question pour le demi-cercle situé au-dessous du diamètre $[AB]$.
- 6) Écrire l'équation cartésienne du cercle passant par les points $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$ et dont le centre appartient à la droite d'équation $3x - y - 2 = 0$.
- 7) Écrire l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle de sommets $A(7; 4)$, $B(2; -1)$ et $C(7; 0)$.
- 8) Écrire l'équation du cercle inscrit dans le triangle de sommets $A(2; -1)$, $B(-1; 5)$ et $C(10; 3)$.
- 9) On donne la droite $d : 4x - 3y = 19$ et le cercle $c : x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$.
 - a) Déterminer leur position relative.
 - b) Déterminer les éventuels points d'intersection.
- 10) Déterminer l'intersection de la droite d d'équation $x - 2y = 1$ avec le cercle c d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.
- 11) Établir l'équation de la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ au point $T(-5; 7)$.

- 12) Établir l'équation des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x = 19$ passant par le point $A(1; 6)$.
- 13) Établir l'équation des tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ parallèles à la droite $d : 2x + y - 7 = 0$.
- 14) Former l'équation du cercle de centre $\Omega(1; -1)$ tangent à la droite $d : 5x - 12y + 9 = 0$.
- 15) Écrire l'équation du cercle passant par le point $A(4; 7)$ tangent à la droite d d'équation $4x - 3y + 15 = 0$ au point $T(0; 5)$.
- 16) Déterminer l'équation des cercles tangents aux deux droites $d : 7x - y - 5 = 0$ et $d' : x + y + 13 = 0$, un des points de tangence étant $T(1; 2)$.
- 17) On donne les cercles $c : x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$.
- Déterminer leur position relative.
 - Déterminer les éventuels points d'intersection.
- 18) On donne les cercles $c : x^2 + y^2 - 4x = 32$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$.
Déterminer leurs éventuels points d'intersection.
- 19) Soit le cercle $c : 16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$.
- Déterminer le point du cercle le plus proche de l'origine.
 - Déterminer le point du cercle c le plus proche de la droite $d : 8x - 4y + 73 = 0$.
- 20) Calculer l'angle d'intersection
- de la droite $d : 2x - y = 3$ et du cercle $c : x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$.
 - des deux cercles $c : x^2 + y^2 + 3x = y$ et $c' : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$.
- 21) Soient $A(2; 3)$ et $B(5; 0)$ deux sommets consécutifs d'un carré.
Déterminer les deux autres sommets. Donner toutes les solutions
- 22) On donne les points $A(1; -4)$ et $B(3; 2)$.
Déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 6$.
- 23) Soit le cercle $c : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 32$ et le point $A(4; 1)$.
- Le point A est-il situé à l'intérieur du cercle ?
 - Déterminer analytiquement le plus petit des deux secteurs angulaires définis par le cercle c et les demi-droites $[\Omega O)$ et $[\Omega A)$, O étant l'origine et Ω le centre du cercle c .
 - Calculer l'aire de ce secteur angulaire.

10.6 Solutions des exercices

- 1) a) $x^2 + y^2 - 9 = 0$
 b) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$
- 2) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$
- 3) a) $\Omega(-3; 0), r = 5$ b) $\Omega(1; -2), r = 5$
 c) $\Omega(-3; 4), r = 3$ d) —
 e) — f) $\Omega(\frac{9}{4}; -1), r = 3, 17$
- 4) $f : \begin{array}{l} [-2; 2] \rightarrow [0; 2] \\ x \quad \mapsto y = \sqrt{4 - x^2} \end{array}$
- 5) a) $f : \begin{array}{l} [-3; 3] \rightarrow [5; 8] \\ x \quad \mapsto y = 5 + \sqrt{9 - x^2} \end{array}$
 b) $g : \begin{array}{l} [-3; 3] \rightarrow [5; 2] \\ x \quad \mapsto y = 5 - \sqrt{9 - x^2} \end{array}$
- 6) $x^2 + y^4 - 4x - 8y + 10 = 0$
- 7) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$
- 8) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
- 9) a) Deux points d'intersection
 b) $I_1(1; -5), I_2(7; 3)$
- 10) $I(3; 1)$
- 11) $t : 3x - 4y + 43 = 0$
- 12) $t_1 : 2x + y - 8 = 0, t_2 : -x + 2y - 11 = 0$
- 13) $t_1 : 2x + y - 1 = 0, t_2 : 2x + y + 19 = 0$
- 14) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
- 15) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$
- 16) $c_1 : (x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800, c_2 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$
- 17) a) Deux points d'intersection
 b) $I_1(-1; -1); I_2(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$
- 18) Pas de point d'intersection (c' à l'intérieur de c)
- 19) a) $P(0, 72; -0, 12)$
 b) $P(-\frac{7}{2}; \frac{5}{4})$
- 20) 1) $79, 7^\circ$

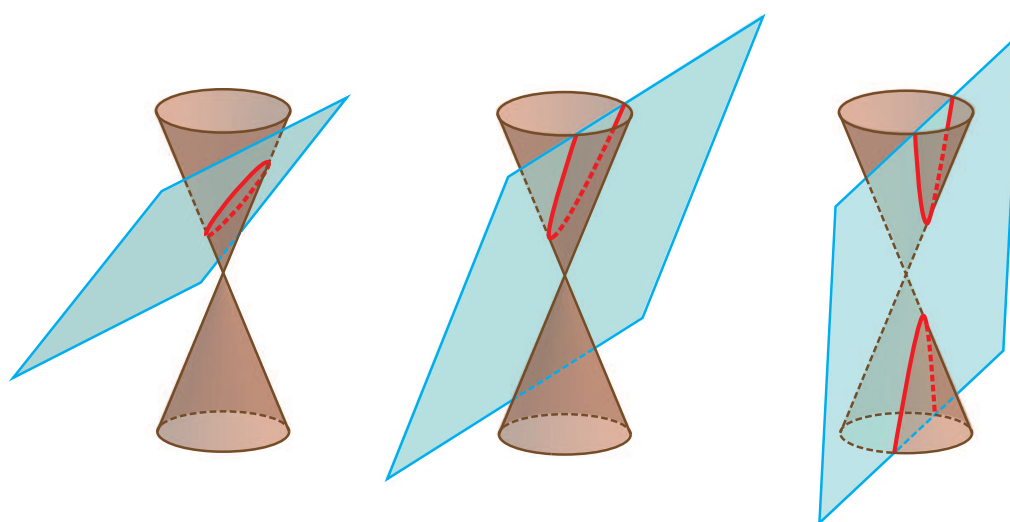
- 2) $18,42^\circ$
- 21) $C_1(2; -3), D_1(-1; 0)$ ou $C_2(8; 3), D_2(5; 6)$
- 22) Cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$
- 23) a) A l'intérieur
c) Aire : 23.67

Chapitre 11

Coniques

11.1 Introduction

Les sections coniques, appelées également **coniques**, peuvent être obtenues par l'intersection d'un cône circulaire droit à deux nappes et d'un plan. En modifiant le position du plan, on peut obtenir une *ellipse* (le plan coupe le cône une seule fois selon une courbe fermée), une *parabole* (le plan coupe le cône une seule fois selon une courbe non fermée), ou une *hyperbole* (le plan coupe le cône deux fois), comme le montre la figure ci-dessous.



Ellipse

Parabole

Hyperbole

On obtient des *coniques dégénérées* si le plan coupe le cône en un seul point ou le long d'une ou de deux droites qui se trouvent sur le cône. Dans l'Antiquité, les Grecs ont étudié les sections coniques de manière très approfondie, et ils ont découvert des propriétés qui permettent d'établir leurs définitions en termes de points et de droites, comme on le fera dans ce chapitre.

11.2 Ellipses

11.2.1 Définition

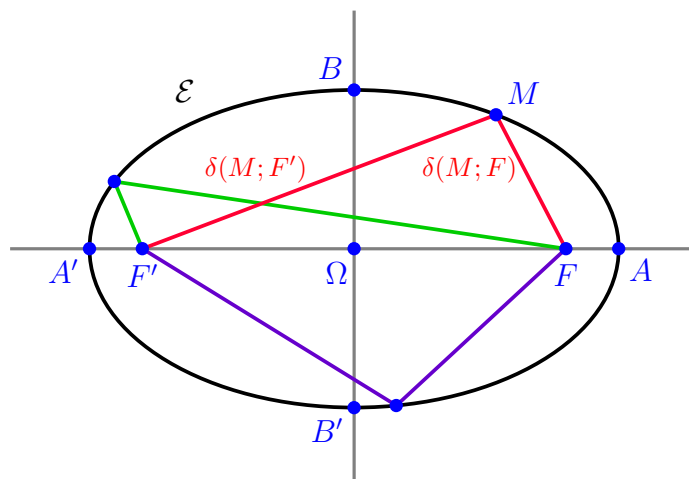
On considère deux points F et F' du plan et un nombre réel a tel que $\delta(F; F') < 2a$.

Définition 11.1

L'ensemble \mathcal{E} des points M du plan dont la somme des distances aux points F et F' est égale à $2a$ est appelé **ellipse**.

$$\mathcal{E} = \{M \mid \delta(M; F) + \delta(M; F') = 2a\}$$

Les points F et F' sont appelés **foyers** de l'ellipse.



On peut facilement construire cette ellipse sur une feuille de papier. Il suffit de piquer deux punaises aux points F et F' et de fixer un bout de ficelle de longueur $2a$ aux punaises. Après avoir passé la ficelle autour d'un crayon, il faut le déplacer en maintenant la ficelle tendue. La somme des distances $\delta(M; F)$ et $\delta(M; F')$ est alors égale à la longueur de la ficelle et est donc constante. Ainsi, le crayon tracera une ellipse dont les foyers sont F et F' .

L'ellipse admet un centre de symétrie appelé **centre** de l'ellipse. Il est généralement noté Ω et correspond au milieu du segment $[FF']$.

L'ellipse possède deux axes de symétrie orthogonaux. L'un d'eux passe par les foyers et est appelé **axe focal** ou **grand axe**. L'autre axe est appelé **petit axe**. On nomme **sommets** de l'ellipse les points d'intersection A, A', B et B' de la courbe avec ses axes.

On désigne encore par $2c$ la distance (appelée distance focale) entre les deux foyers F et F' : $\delta(F; F') = 2c$.

11.2.2 Ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox ou Oy

Pour obtenir une équation cartésienne "simple" d'une ellipse, on peut tout d'abord considérer une ellipse \mathcal{E} dont le centre est l'origine O du repère et dont les deux foyers appartiennent à l'axe Ox . Pour que la distance focale soit égale à $2c$, les coordonnées des foyers sont $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$. Dans ce cas, un point $M(x; y)$ appartient à l'ellipse si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \delta(M; F) + \delta(M; F') = 2a \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{FM}\| + \|\overrightarrow{F'M}\| = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

En élevant au carré les deux membres de la dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \\ &\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \end{aligned}$$

En élevant encore une fois au carré les deux membres de l'équation, on trouve

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'équation par $a^2(a^2 - c^2)$, on obtient

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Comme $a > c$, on peut poser que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ou $b^2 = a^2 - c^2$. Avec cette substitution, on trouve l'**équation cartésienne** de l'ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox :

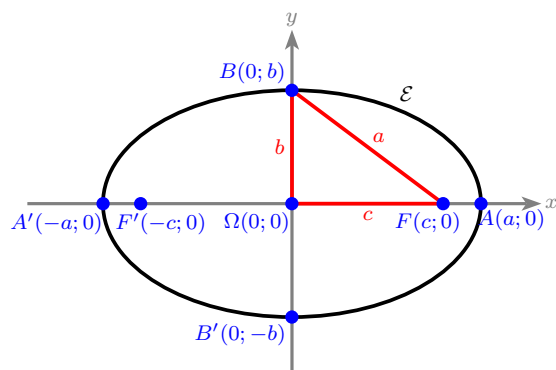
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

On peut maintenant calculer les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses en posant $y = 0$ dans cette équation cartésienne. On obtient alors $\frac{x^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 = a^2$. Par conséquent, les coordonnées des sommets correspondants de l'ellipse sont $A(a; 0)$ et $A'(-a; 0)$. Le segment $[OA]$ est parfois appelé **demi-grand axe** et a comme longueur a . Pour les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des ordonnées, on pose $x = 0$ et on obtient les sommets $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$. Le segment $[OB]$ est parfois appelé **demi-petit axe** et a comme longueur b . Le demi-grand axe est toujours plus long que le demi-petit axe, car $a > b$.

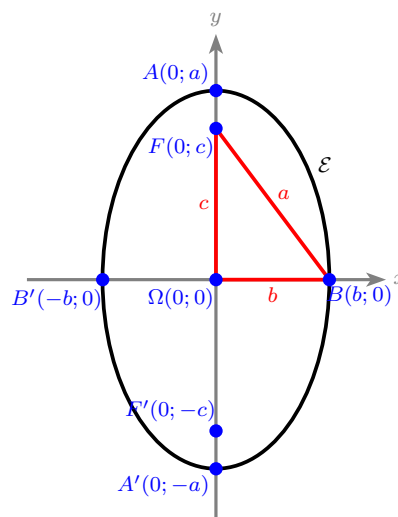
On peut également vérifier facilement, à l'aide de l'équation cartésienne, que l'ellipse est bien symétrique par rapport à l'origine, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

En réalisant une démarche similaire, on peut montrer que l'**équation cartésienne** d'une ellipse centrée à l'origine O et dont les foyers appartiennent à l'axe Oy est

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$



Ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox



Ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Oy

11.2.3 Ellipse centrée en Ω et d'axe focal parallèle à Ox ou à Oy

On considère maintenant une ellipse \mathcal{E}' centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et dont l'axe focal est parallèle à l'axe des abscisses. Au lieu de considérer le repère orthonormé (O, I, J) , on peut considérer l'ellipse dans le repère orthonormé $(\Omega; I'; J')$ où I' se situe sur le grand axe et J' sur le petit axe.

L'ensemble des points M de coordonnées $(x'; y')$, considérées par rapport au repère $(\Omega; I'; J')$, appartenant à l'ellipse vérifient l'équation cartésienne

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

déterminée dans le paragraphe précédent. Or, le point M peut aussi être considéré dans le repère $(O; I; J)$. Dans ce cas, ses coordonnées sont $(x; y)$ et sont liées aux coordonnées précédentes de M par

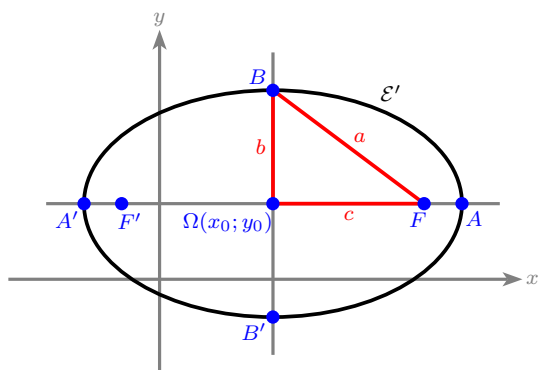
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

A l'aide de ces relations, on obtient facilement l'équation cartésienne de l'ellipse \mathcal{E}' dans le repère $(O; I; J)$:

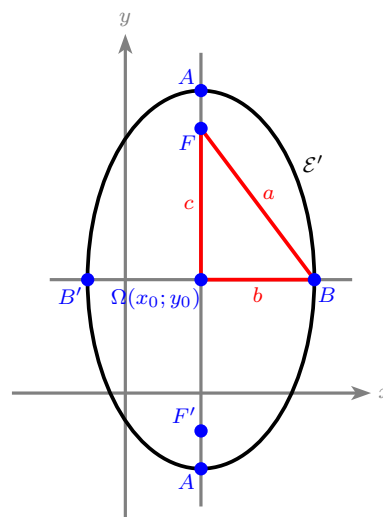
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Si l'ellipse est centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et que son axe focal est parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation cartésienne précédente devient :

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1}$$



Ellipse centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à Ox



Ellipse centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à Oy

En développant et en simplifiant cette équation cartésienne ou l'équation cartésienne précédente, on obtient une équation de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

où les coefficients sont des nombres réels et A et C sont tous deux positifs. Réciproquement, si on commence avec une équation de ce type, alors, en complétant les carrés, on peut obtenir une forme qui permet de trouver le centre de l'ellipse et les longueurs du demi-grand axe et du demi-petit axe.

Exemple

Soit l'ellipse \mathcal{E}' donnée par l'équation : $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$. Nous allons déterminer le centre Ω et les longueurs du demi-grand axe, a , et du demi-petit axe, b .

L'idée est de transformer cette équation pour pouvoir lire directement le centre et les longueurs cherchées. On commence par regrouper les termes en x et y , puis on "complète les carrés".

$$\begin{aligned} 16x^2 + 64x + 9y^2 - 18y &= 71 \\ 16 \cdot \underbrace{(x^2 + 4x)}_{(x+2)^2 - 4} + 9 \cdot \underbrace{(y^2 - 2y)}_{(y-1)^2 - 1} &= 71 \\ 16 \cdot (x+2)^2 + 9 \cdot (y-1)^2 &= 71 + 16 \cdot 4 + 9 \cdot 1 \\ 16 \cdot (x+2)^2 + 9 \cdot (y-1)^2 &= 144 \\ \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est donc une ellipse de centre $\Omega(-2; 1)$ dont l'axe focal est la droite verticale d'équation $x = -2$, car $9 < 16$. Le demi-grand axe mesure donc $a = \sqrt{16} = 4$ et le demi-petit axe $b = \sqrt{9} = 3$.

11.3 Hyperboles

11.3.1 Définition

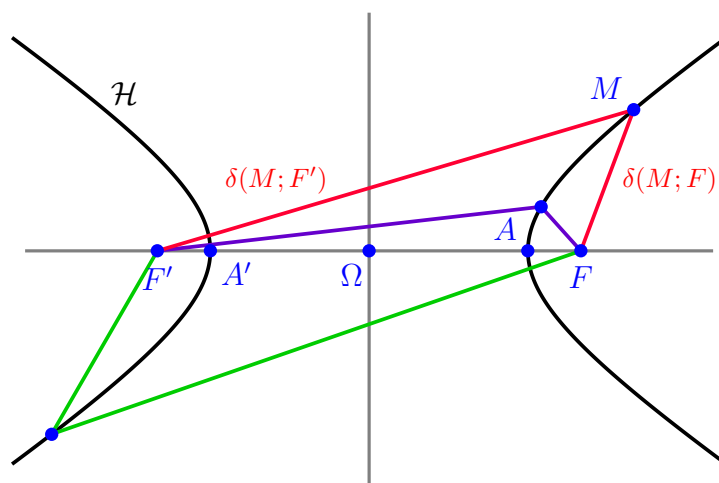
On considère à nouveau deux points F et F' du plan et un nombre réel a tel que $\delta(F; F') > 2a$. La définition d'une hyperbole est semblable à celle d'une ellipse. La seule différence est qu'au lieu d'utiliser la *somme* des distances aux deux points F et F' , on utilise la *différence*.

Définition 11.2

L'ensemble \mathcal{H} des points M du plan dont la valeur absolue de la différence des distances aux points F et F' est égale à $2a$ est appelé **hyperbole**.

$$\mathcal{H} = \{M \mid |\delta(M; F) - \delta(M; F')| = 2a\}$$

Les points F et F' sont appelés **foyers** de l'hyperbole.



L'hyperbole admet un centre de symétrie appelé **centre** de l'hyperbole. Il correspond au milieu de segment $[FF']$ et est généralement noté Ω .

L'hyperbole possède deux axes de symétrie orthogonaux. L'un d'eux passe par les foyers et est appelé **axe focal** ou **axe transverse**. L'autre axe est appelé **axe non transverse**. On nomme **sommets** de l'hyperbole les points d'intersection A et A' de la courbe avec l'axe focal.

On désigne encore par $2c$ la distance (appelée distance focale) entre les deux foyers F et F' : $\delta(F; F') = 2c$.

11.3.2 Hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Ox ou Oy

On considère tout d'abord une hyperbole \mathcal{H} dont le centre est l'origine O du repère et dont les deux foyers appartiennent à l'axe Ox . Pour que la distance focale soit égale à $2c$, les coordonnées des foyers sont $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$. Dans ce cas, un point $M(x; y)$ appartient à l'hyperbole si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow |\delta(M; F) - \delta(M; F')| = 2a \\ &\Leftrightarrow \left| \|\overrightarrow{FM}\| - \|\overrightarrow{F'M}\| \right| = 2a \\ &\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a \end{aligned}$$

En appliquant un raisonnement similaire à celui réalisé pour l'ellipse, on peut écrire l'équivalence :

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Comme $c > a$, on peut poser que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ou $b^2 = c^2 - a^2$. Avec cette substitution, on trouve l'équation cartésienne de l'hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Ox :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On peut maintenant calculer les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses en posant $y = 0$ dans cette équation cartésienne. On obtient alors $\frac{x^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 = a^2$. Par conséquent, les coordonnées des sommets de l'hyperbole sont $A(a; 0)$ et $A'(-a; 0)$. La représentation graphique n'a pas d'intersection avec l'axe des ordonnées, car l'équation $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ a la solution complexe $y = \pm bi$.

On peut également vérifier facilement, à l'aide de l'équation cartésienne, que l'ellipse est bien symétrique par rapport à l'origine, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

La résolution de l'équation cartésienne de l'hyperbole par rapport à y permet d'obtenir les équations :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Si $x^2 - a^2 < 0$ ou, de manière équivalente, $-a < x < a$, il n'y a aucun point $(x; y)$ sur la courbe. Des points $M(x; y)$ sont sur la courbe si $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Proposition 11.1

L'hyperbole admet deux asymptotes d'équations :

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Démonstration. On commence par déterminer la pente, si elle existe, des asymptotes obliques en calculant la limite (en raison de la symétrie centrale, le comportement est identique en $-\infty$ et en $+\infty$) :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{x} = \pm \frac{b}{a}$$

L'ordonnée à l'origine est donnée par :

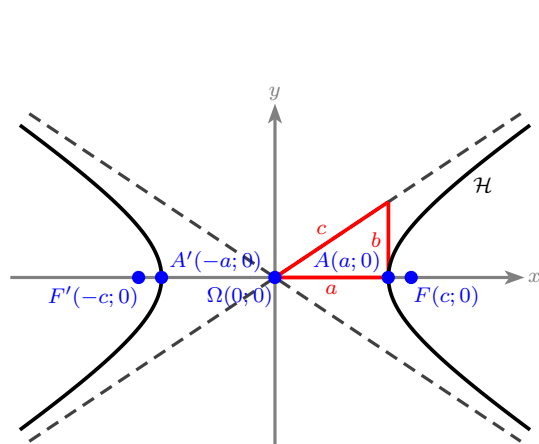
$$\begin{aligned} h &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \left(\pm \frac{b}{a} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2} x^2}{\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \left(\pm \frac{b}{a} x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-b^2}{\pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + \left(\pm \frac{b}{a} x \right)} = 0 \end{aligned}$$

L'hyperbole admet donc deux asymptotes d'équations $y = \pm \frac{b}{a}x$. □

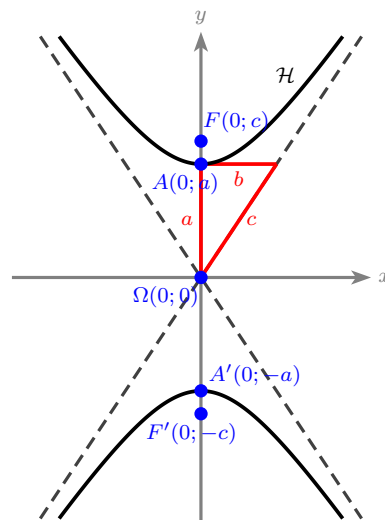
On peut aussi montrer que l'équation cartésienne d'une hyperbole centrée à l'origine et dont les foyers appartiennent à l'axe Oy est

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Cette hyperbole admet les deux droites d'équations $y = \pm \frac{a}{b}x$ comme asymptotes.



Hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Ox



Hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Oy

11.3.3 Hyperbole centrée en Ω et d'axe focal parallèle à Ox ou à Oy

On considère maintenant une hyperbole \mathcal{H}' centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et dont l'axe focal est parallèle à l'axe des abscisses.

En réalisant une démarche similaire à celle réalisée pour les ellipses, on peut montrer que l'hyperbole \mathcal{H}' admet comme équation cartésienne :

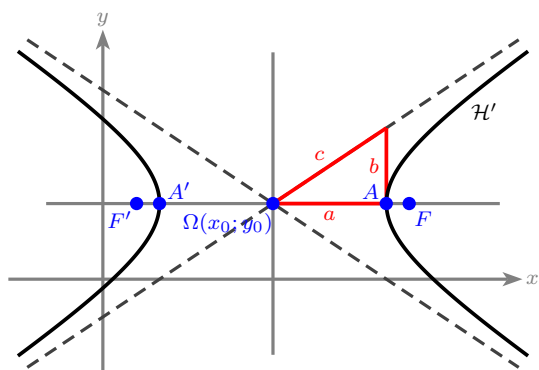
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Cette hyperbole admet deux asymptotes de pentes $\pm \frac{b}{a}$ passant par le centre Ω .

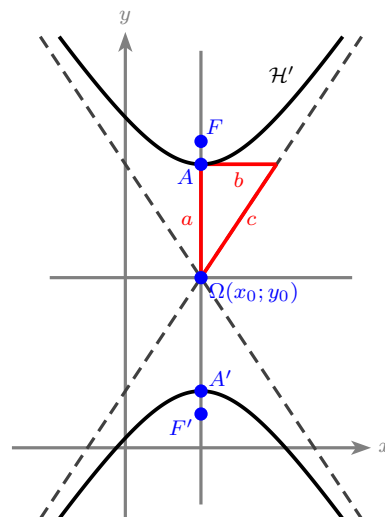
Si l'hyperbole est centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et que son axe focal est parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation cartésienne précédente devient :

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1}$$

Cette hyperbole admet deux asymptotes de pentes $\pm \frac{a}{b}$ passant par le centre Ω .



Hyperbole centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à Ox



Hyperbole centrée en $\Omega(x_0; y_0)$ et d'axe focal parallèle à Oy

En développant et en simplifiant cette équation cartésienne ou l'équation cartésienne précédente, on obtient une équation de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

où les coefficients sont des nombres réels et A et C sont de signes différents. Réciproquement, si on commence avec une équation de ce type, alors, en complétant les carrés, on peut obtenir une forme qui permet de trouver le centre de l'hyperbole et la valeur des coefficients a et b .

Exemple

Soit l'hyperbole \mathcal{H}' donnée par l'équation : $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$. En regroupant les termes en x et en y , puis en "complétant les carrés", on obtient :

$$\begin{aligned} 9x^2 - 54x - 4y^2 - 16y &= -29 \\ 9 \cdot \underbrace{(x^2 - 6x)}_{(x-3)^2-9} - 4 \cdot \underbrace{(y^2 + 4y)}_{(y+2)^2-4} &= -29 \\ 9 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot (y + 2)^2 &= -29 + 9 \cdot 9 - 4 \cdot 4 \\ 9 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot (y + 2)^2 &= 36 \\ \frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est donc une hyperbole de centre $\Omega(3; -2)$ dont l'axe focal est la droite horizontale d'équation $y = -2$. Les valeurs des coefficients a et b sont $a = 2$ et $b = 3$.

Les équations des asymptotes sont

$$y - (-2) = \pm \frac{3}{2}(x - 3)$$

11.4 Paraboles

11.4.1 Définition

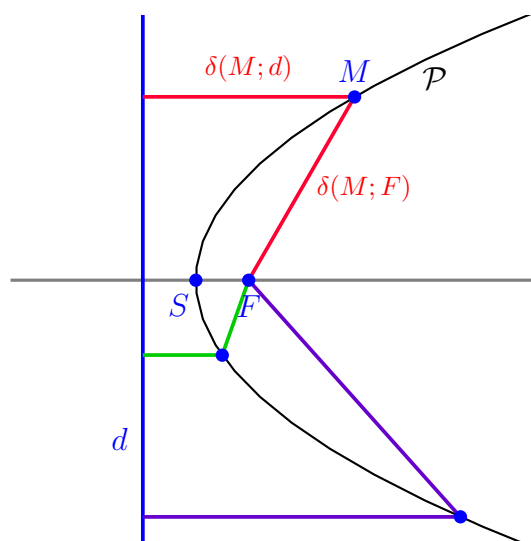
On considère une droite d du plan et un point F n'appartenant pas à cette droite.

Définition 11.3

L'ensemble \mathcal{P} des points M du plan dont la distance à la droite d est égale à la distance au point F est appelé **parabole**.

$$\mathcal{P} = \{M \mid \delta(M; F) = \delta(M; d)\}$$

La droite d est appelée la **directrice** et le point F le **foyer** de la parabole.



La parabole possède un axe de symétrie, passant par son foyer et perpendiculaire à la directrice, appelé **axe** ou **axe focal**. On nomme **sommet** le point d'intersection S de la courbe avec son axe.

11.4.2 Parabole de sommet l'origine et d'axe Ox ou Oy

Pour obtenir une équation élémentaire d'une parabole \mathcal{P} , on peut placer le sommet S à l'origine O du repère et décider que son axe est confondu avec l'axe des ordonnées. Dans ce cas, le foyer F a pour coordonnées $F(0; p)$, avec p un nombre réel différent de 0, et l'équation de la directrice est $y = -p$ (la figure de gauche ci-dessous montre le cas où $p > 0$). Dans ce cas, un point $M(x; y)$ appartient à la parabole si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \delta(M; F) = \delta(M; d) \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{FM}\| = \frac{|y + p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = |y + p| \end{aligned}$$

En élevant au carré les deux membres de la dernière équation, on obtient

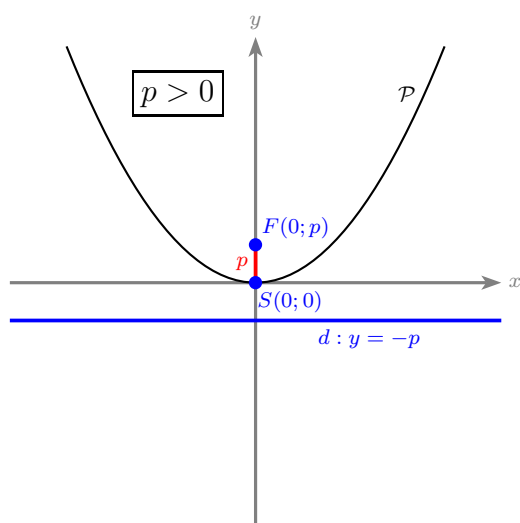
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \end{aligned}$$

En isolant x^2 , on trouve l'**équation cartésienne** de la parabole de sommet l'origine et d'axe l'axe des ordonnées :

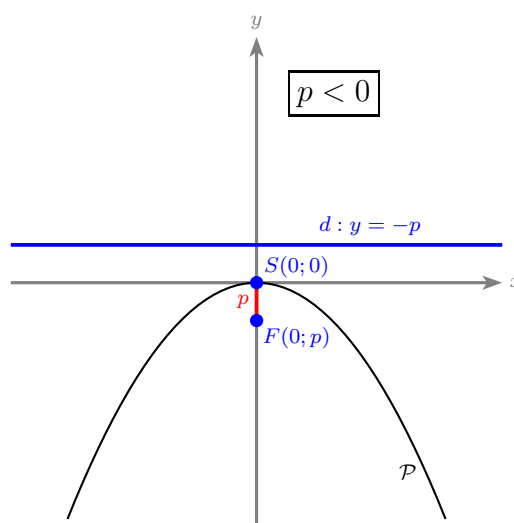
$$x^2 = 4py$$

En divisant par $4p$ les deux membres de cette équation, on obtient $y = \frac{1}{4p}x^2$. Cette dernière équation correspond bien à ce qu'on a appelé parabole dans les chapitres précédents de ce cours.

Si $p > 0$, la parabole est ouverte vers le haut et, si $p < 0$, la parabole est ouverte vers le bas. La représentation graphique de la parabole est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, car le remplacement de x par $-x$ ne modifie pas l'équation $x^2 = 4py$.



Parabole centrée à l'origine et d'axe focal Oy , avec $p > 0$

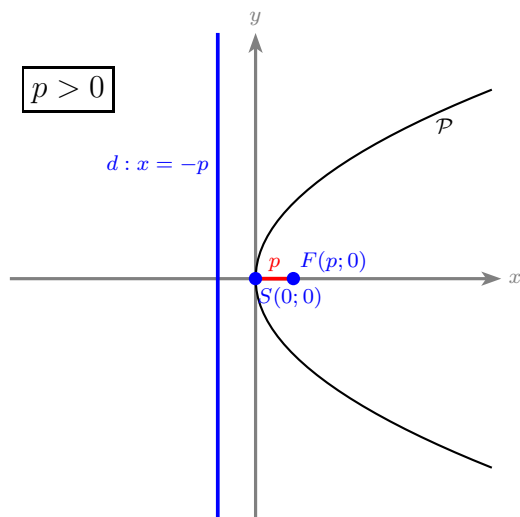


Parabole centrée à l'origine et d'axe focal Oy , avec $p < 0$

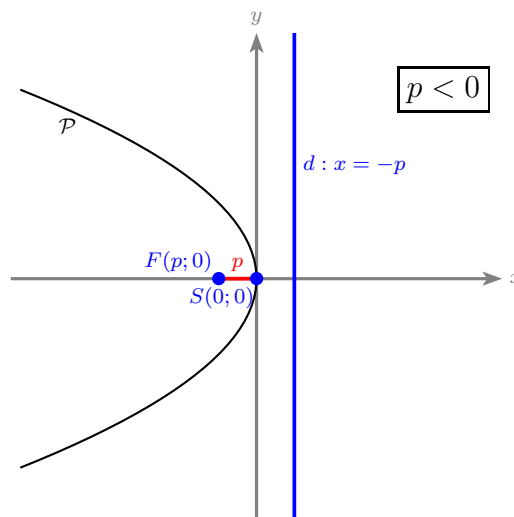
En échangeant les rôles de x et y , on obtient :

$$y^2 = 4px$$

Cette équation est l'**équation cartésienne** d'une parabole dont le sommet est l'origine et d'axe l'axe des abscisses. Dans ce cas, le foyer a pour coordonnées $F(p; 0)$ et l'équation de la directrice est $x = -p$. Si $p > 0$, la parabole est ouverte vers la droite et, si $p < 0$, la parabole est ouverte vers la gauche.



Parabole centrée à l'origine et d'axe focal Ox , avec $p > 0$



Parabole centrée à l'origine et d'axe focal Ox , avec $p < 0$

11.4.3 Parabole de sommet S et d'axe parallèle à Ox ou à Oy

On considère maintenant une parabole \mathcal{P}' dont le sommet est le point $S(x_0; y_0)$ et dont l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées.

En réalisant à nouveau une démarche similaire à celle réalisée pour les ellipses, on obtient l'équation cartésienne de la parabole \mathcal{P}' :

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

En développant le membre de gauche de l'équation et en simplifiant, on obtient une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des nombres réels

Si la parabole admet comme sommet le point $S(x_0; y_0)$ et que son axe focal est parallèle à l'axe des abscisses, l'équation cartésienne de la parabole est alors :

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

On peut également écrire cette équation sous la forme $x = ay^2 + by + c$.

Exemple

Soit la parabole \mathcal{P}' donnée par l'équation : $2x = y^2 + 8y + 22$. On peut réécrire cette équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y^2 + 8y &= 2x - 22 \\ (y + 4)^2 - 16 &= 2x - 22 \\ (y + 4)^2 &= 2x - 6 \\ (y + 4)^2 &= 2(x - 3) \end{aligned}$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est donc une parabole de centre $S(3; -4)$. Cette parabole est ouverte vers la droite et la valeur de p est $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

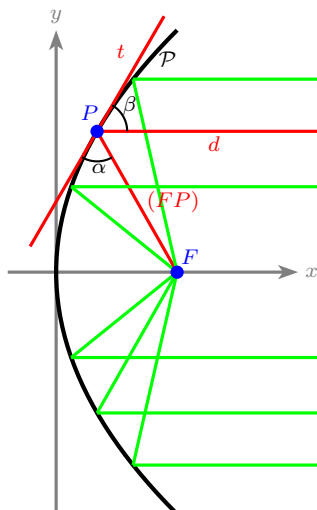
Ainsi, les coordonnées du foyer sont $F = \left(3 + \frac{1}{2}; -4\right) = \left(\frac{7}{2}; -4\right)$ et la directrice a pour équation $x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

11.4.4 Propriété optique des paraboles

On présente dans ce paragraphe une propriété importante associée à une droite tangente à la parabole.

Proposition 11.2

La droite joignant un point quelconque d'une parabole à son foyer et la droite passant par ce point et parallèle à l'axe de cette parabole forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à la parabole en ce point.



Démonstration. On choisit un repère orthonormé du plan de telle manière que la parabole \mathcal{P} soit décrite par l'équation

$$y^2 = 4px$$

avec $p > 0$ et admette comme foyer le point $F(p; 0)$.

On considère un point $P(x_P; y_P)$ de cette parabole, avec $x_P \geq 0$ et $y_P \geq 0$. Dans ce cas, le point P vérifie l'équation $y = 2\sqrt{px}$.

Si $x_P \neq p$ et $y_P \neq 0$: on obtient l'équation de la tangente en commençant par dériver l'équation ci-dessus : $y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{px}} \cdot p = \frac{p}{\sqrt{px}}$. L'équation de la tangente t en P est alors donnée par :

$$y - y_P = \frac{p}{\sqrt{px_P}}(x - x_P)$$

La pente de cette tangente est $m_t = \frac{p}{\sqrt{px_P}} = \frac{2p}{y_P}$. La pente de la droite (FP) vaut

$$m_{(FP)} = \frac{y_P - 0}{x_P - p}.$$

Si α désigne l'angle aigu formé par les droites t et (FP) , on a :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \left| \frac{m_t - m_{(FP)}}{1 + m_t \cdot m_{(FP)}} \right| = \left| \frac{\frac{2p}{y_P} - \frac{y_P}{x_P - p}}{1 + \frac{2p}{y_P} \cdot \frac{y_P}{x_P - p}} \right| = \left| \frac{\frac{2p(x_P - p) - y_P^2}{y_P(x_P - p)}}{\frac{y_P(x_P - p) + 2py_P}{y_P(x_P - p)}} \right| \\ &= \left| \frac{2px_P - 2p^2 - 4px_P}{y_P x_P - py_P + 2py_P} \right| = \left| \frac{-2p \cdot (p + x_P)}{y_P(x_P + p)} \right| = \left| \frac{2p}{y_P} \right| \end{aligned}$$

De même, si d est la droite parallèle à l'axe de la parabole passant par P ($m_d = 0$) et si β est l'angle aigu formé par les droites t et d , on a :

$$\tan(\beta) = \left| \frac{m_t - m_d}{1 + m_t \cdot m_d} \right| = \left| \frac{\frac{2p}{y_P} - 0}{1 + \frac{2p}{y_P} \cdot 0} \right| = \left| \frac{2p}{y_P} \right|$$

Ainsi, $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ et $\alpha = \beta$.

Si $y_P = 0$: le point P est le sommet de la parabole. Les droites (FP) et d sont donc confondues. Les angles avec la tangente sont donc bien les mêmes (ils valent 90°).

Si $x_p = p$: La valeur absolue de la pente de la tangente est égale à $|m_t| = \left| \frac{p}{\sqrt{p^2}} \right| = 1$.

Elle fait donc un angle de 45° avec l'horizontale et donc également avec la droite d parallèle à l'axe de la parabole. La droite (FP) est dans ce cas verticale et fait donc également un angle de 45° avec la tangente.

Si le point $P(x_p; y_p)$ de la parabole est telle que $x_p \geq 0$ et $y_p \leq 0$, les mêmes résultats s'obtiennent par symétrie. \square

Cette *propriété de réflexivité* (mêmes angles avec la tangente) a de nombreuses applications. Par exemple, la forme du miroir dans un projecteur est obtenue par la rotation d'une parabole autour de son axe. La surface tridimensionnelle résultante est dite *générée* par la parabole et est appelée un parabolôïde. Le foyer du parabolôïde est le même que le foyer de la parabole génératrice. Si une source lumineuse est placée dans le foyer, en vertu d'une loi de la physique (l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence), un rayon lumineux sera réfléchi le long d'une droite parallèle à l'axe. Le même principe est utilisé dans la construction des miroirs de télescope ou de four solaire : un rayon lumineux arrivant sur le miroir parabolique parallèlement à son axe sera réfléchi vers le foyer. Les antennes pour les systèmes radar et les radiotélescopes utilisent également ce principe.

11.5 Coniques en général

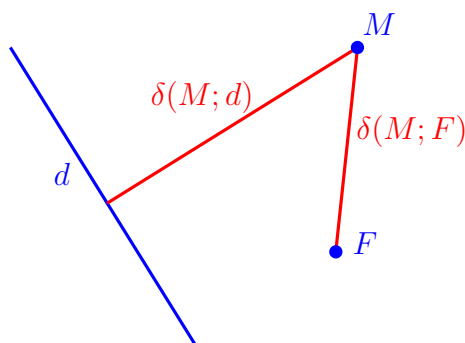
Le but de cette partie est de donner une manière semblable de définir une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Pour réaliser ceci, nous allons partir de la définition de la parabole en considérant une droite d du plan et un point F n'appartenant pas à cette droite.

Définition 11.4

Une **conique** \mathcal{C} est le lieu géométrique des points du plan dont le rapport des distances au point F et à la droite d est une constante positive, notée e ($e > 0$). Autrement dit, un point M appartient à \mathcal{C} si l'équation suivante est vérifiée :

$$\frac{\delta(M; F)}{\delta(M; d)} = e \quad (11.1)$$

Le point F est appelé **foyer** et la droite d la **directrice** de la conique \mathcal{C} . La constante e est appelée **excentricité**.



On peut remarquer que si $e = 1$, on retrouve bien la définition de la parabole.

Dans le cas où les coordonnées du point F sont $F(x_F; y_F)$ et l'équation de la directrice d est $mx + ny + h = 0$, un point $M(x; y)$ appartient à la conique \mathcal{C} si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \frac{\delta(M; F)}{\delta(M; d)} = e \\ &\Leftrightarrow \delta(M; F) = e \cdot \delta(M; d) \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{FM}\| = e \cdot \frac{|mx + ny + h|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = e \cdot \frac{|mx + ny + h|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{aligned}$$

En élevant les deux membres de l'équation au carré, on obtient :

$$\Leftrightarrow (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = \frac{e^2}{m^2 + n^2} \cdot (mx + ny + h)^2$$

En développant et en simplifiant cette équation, on obtient une égalité de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

où les coefficients sont des nombres réels et où A , B et C ne peuvent être tous les trois nuls.

On considère maintenant un cas particulier d'une conique \mathcal{C} où le foyer a comme coordonnées $F(c; 0)$ et la directrice est une droite verticale d'équation $x = k$. Un point $M(x; y)$ appartient à \mathcal{C} si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = \frac{e^2}{1^2} \cdot (x - k)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2 \cdot (x^2 - 2kx + k^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2cx - 2e^2kx - c^2 + e^2k^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = 2x(c - e^2k) + e^2k^2 - c^2 \end{aligned}$$

Nous allons considérer un cas encore un peu plus particulier où le nombre k est tel que $c - e^2k = 0$ (ou $k = \frac{c}{e^2}$). Dans ce cas, le terme en x disparaît et il n'y a plus que des termes en x^2 et y^2 . On est donc très proche de l'équation cartésienne d'une ellipse ou d'une hyperbole centrée à l'origine. En poursuivant le développement, on obtient

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = e^2 \frac{c^2}{e^4} - c^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 = \frac{c^2}{e^2} \cdot (1 - e^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2} \cdot (1 - e^2)} = 1 \end{aligned}$$

On retrouve donc bien une forme d'équation qu'on a déjà rencontrée pour l'ellipse ou pour l'hyperbole.

Si la constante e est plus petite que 1, $0 < e < 1$, le nombre $1 - e^2$ est positif et inférieur à 1. Ainsi, on peut poser que $a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ et $b^2 = \frac{c^2}{e^2} \cdot (1 - e^2)$ et obtenir l'équation cartésienne

d'une ellipse d'axe focale Ox et centrée à l'origine : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dans ce cas, l'excentricité est égale à $e = \frac{c}{a}$ et la directrice d a comme équation $x = \frac{a^2}{c}$.

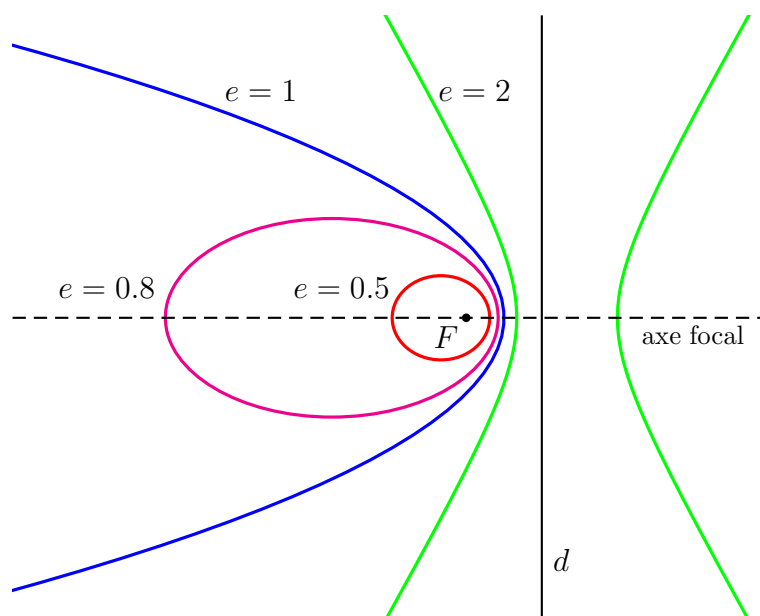
Si la constante e est plus grande que 1, $e > 1$, le nombre $1 - e^2$ est négatif. Ainsi, on peut poser que $a^2 = \frac{c^2}{e^2}$ et $b^2 = -\frac{c^2}{e^2} \cdot (1 - e^2)$ et obtenir l'équation cartésienne d'une hyperbole d'axe focal Ox et centrée à l'origine : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dans ce cas, l'excentricité est aussi égale à $e = \frac{c}{a}$ et la directrice d a aussi comme équation $x = \frac{a^2}{c}$.

Proposition 11.3

La valeur de l'excentricité permet de caractériser le type de conique décrite par une équation du type 11.1 :

- si $0 < e < 1$: la conique est une ellipse ;
- si $e = 1$: la conique est une parabole ;
- si $e > 1$: la conique est une hyperbole.

Les coniques représentées ci-dessous sont construites à partir du même foyer F , de la même directrice d et des excentricités $e = 0.5$ (ellipse), $e = 0.8$ (ellipse), $e = 1$ (parabole) et $e = 2$ (hyperbole).



11.6 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J)$ de π .

- 1) On donne les deux foyers et un point quelconque d'une ellipse.
Construire d'autres points et les sommets de cette ellipse, puis esquisser cette dernière.
- 2) On donne un point F et une droite d ne passant pas par F .
Construire l'ensemble des points M tels que $\delta(M; F) = \frac{1}{2}\delta(M; d)$.
- 3) Déterminer les sommets, les foyers, l'excentricité et la directrice des ellipses d'équation

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$	b) $4x^2 + 49y^2 = 225$
c) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$	d) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 92 = 0$
- 4) Déterminer l'équation de l'ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox , sachant qu'elle passe par les points $M(1; 4)$ et $N(-6; 1)$.
- 5) Déterminer l'équation de l'ellipse de centre $\Omega(1; 2)$, de foyer $F(6; 2)$ et passant par le point $P(4; 6)$.
- 6) Déterminer l'équation de l'ellipse d'axe focal horizontal dont on donne le centre $\Omega(5; -2)$, un sommet $B(5; 6)$ et l'excentricité $e = \frac{3}{5}$.
- 7) Une échelle de longueur 6 mètres est appuyée contre un mur vertical. Un homme est situé au tiers de l'échelle lorsque celle-ci se met à glisser sur le sol.
Quelle est la trajectoire décrite par les pieds de l'homme?
- 8) On donne les deux foyers et un point quelconque d'une hyperbole.
Construire d'autre points, les sommets et les asymptotes de cette hyperbole, puis esquisser cette dernière.
- 9) On donne un point F et une droite d ne passant pas par F .
Construire l'ensemble des points M tels que $\delta(M; F) = 2\delta(M; d)$.
- 10) Déterminer les sommets, les foyers, les asymptotes, l'excentricité et la directrice des hyperboles d'équation

a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$	b) $9x^2 - 8y^2 - 18x - 80y - 209 = 0$
c) $8x^2 - 6y^2 + 16x - 32 = 0$	d) $4y^2 - x^2 - 2y - 8y = 0$
- 11) Déterminer l'équation de l'hyperbole dont on donne le centre $\Omega(3; 2)$, un sommet $S(7; 2)$ et une directrice d d'équation $x = \frac{31}{5}$.

- 12) Déterminer l'équation de l'hyperbole de foyer $F(5; 3)$ et $F'(-1; 3)$, sachant que les asymptotes ont pour pente 2 et -2 .
- 13) Soit l'hyperbole centrée à l'origine, d'axe focal horizontal et passant par les points $A(2; 1)$ et $B(3; -2)$. Calculer son excentricité.
- 14) On considère les droites $d : 4x - 3y + 11 = 0$ et $g : 4x + 3y + 5 = 0$.
Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que le produit des distances de M aux deux droites d et g est constant et vaut $\frac{144}{25}$.
- 15) On donne le foyer et des points quelconques d'une parabole.
Construire d'autres points et le sommet de la parabole, puis esquisser cette dernière. Y a-t-il plusieurs solutions?
- 16) On donne un point F et une droite d ne passant pas par F .
Construire l'ensemble des points M tels que $\delta(M, F) = \delta(M; d)$.
- 17) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice des paraboles d'équation
- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| a) $y^2 + 2x = 0$ | b) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$ |
| c) $x^2 = 6x + 5y - 4$ | d) $y^2 + 4y + 6x = 26$ |
| e) $y = 3x^2 + 4x + 5$ | f) $y = ax^2 + bx + c$ |
- 18) Déterminer l'équation de la parabole de foyer F et de directrice d
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $F(7; 2)$ $d : x = 5$ | b) $F(4; 3)$ $d : y = -1$ |
|--------------------------|---------------------------|
- 19) Déterminer l'équation de la parabole qui passe par les points $A(13; 1)$ et $B(1; 7)$ et qui a pour axe focal la droite d'équation $x = 5$.
- 20) Déterminer l'équation de la parabole d'axe focal parallèle à Oy passant par les points $A(2; 3)$, $B(-1; 9)$ et $C(1; -5)$.

11.7 Solutions des exercices

- 3) a) $S_1(5; 0), S_2(-5; 0), S_3(0; 4), S_4(0; -4), F(3; 0), F'(-3; 0), e = \frac{3}{5}, d : x = \frac{25}{3}$
 b) $S_1(\frac{15}{2}; 0), S_2(-\frac{15}{2}; 0), S_3(0; \frac{15}{7}), S_4(0; -\frac{15}{7}), F(\frac{45\sqrt{5}}{14}; 0), F'(-\frac{45\sqrt{5}}{14}; 0), e = \frac{3\sqrt{5}}{7}, d : x = \frac{7\sqrt{5}}{3}$
 c) $S_1(6; -1), S_2(0; -1), S_3(3; -1 + \sqrt{5}), S_4(3; -1 - \sqrt{5}), F(5; -1), F'(1; -1), e = \frac{2}{3}, d : x = \frac{15}{2}$
 d) $S_1(1; 2), S_2(1; -6), S_3(4; -2), S_4(-2; -2), F(1; -2 + \sqrt{5}), F'(1; -2 - \sqrt{5}), e = \frac{\sqrt{5}}{4}, d : y = \frac{16\sqrt{5}-10}{5}$
- 4) $\frac{3x^2}{115} + \frac{7y^2}{115} = 1$
- 5) $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
- 6) $\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{(y+2)^2}{64} = 1$
- 7) Ellipse d'axe horizontal centrée au pied du mur, de demi-grand axe égal à 4 mètres et de demi-petit axe égal à 2 mètres
- 10) a) $S_1(12; 0), S_2(-12; 0), F(13; 0), F'(-13; 0), y = \pm \frac{5}{12}x, e = \frac{13}{12}, d : x = \frac{144}{13}$
 b) $S_1(1 + \sqrt{2}; -5), S_2(1 - \sqrt{2}; -5), F(1 + \frac{\sqrt{17}}{2}; -5), F'(1 - \frac{\sqrt{17}}{2}; -5), y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}+20}{4}, y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}-20}{4}, e = \frac{\sqrt{34}}{4}, d : x = 1 + \frac{4\sqrt{17}}{17}$
 c) $S_1(-1 + \sqrt{5}; 0), S_2(-1 - \sqrt{5}; 0), F(-1 + \frac{\sqrt{105}}{3}; 0), F'(-1 - \frac{\sqrt{105}}{3}; 0), y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1), e = \frac{\sqrt{21}}{3}, d : x = -1 + \frac{\sqrt{105}}{7}$
 d) $S_1(-1; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}), S_2(-1; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}), F(-1; 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}), F'(-1; 1 - \frac{\sqrt{15}}{2}), y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, e = \sqrt{5}, d : y = 1 + \frac{\sqrt{15}}{10}$
- 11) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
- 12) $\frac{5(x-2)^2}{9} - \frac{5(y-3)^2}{36} = 1$
- 13) $e = \sqrt{\frac{8}{5}}$
- 14) Les hyperboles d'équations $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ et $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$
- 17) a) $S(0; 0), F(-\frac{1}{2}; 0), d : x = \frac{1}{2}$
 b) $S(1; -3), F(3; -3), d : x = -1$
 c) $S(3; -1), F(3; \frac{1}{4}), d : y = -\frac{9}{4}$
 d) $S(5; -2), F(\frac{7}{2}; -2), d : x = \frac{13}{2}$
 e) $S(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}), F(-\frac{2}{3}; \frac{15}{4}), d : y = \frac{43}{12}$
 f) $S(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}), F(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac-1}{4a}), d : y = -\frac{b^2-4ac+1}{4a}$

18) a) $(y - 2)^2 = 4(x - 6)$

b) $(x - 4)^2 = 8(y - 1)$

19) $(x - 5)^2 = -8(y - 9)$

20) $y = 5x^2 - 7x - 3$

Quatrième partie

**Géométrie vectorielle et analytique
de l'espace**

Chapitre 12

Vecteurs dans l'espace

12.1 Définitions

La présentation de la notion de vecteurs dans l'espace est analogue à celle des vecteurs du plan. Nous nous bornerons à rappeler les principaux termes utilisés, sans redonner toutes les propriétés des éléments et des opérations considérés.

On désigne par ε l'ensemble des points de l'espace.

Définition 12.1

On appelle **bipoint** (ou **flèche**) de l'espace tout couple $(A; B)$ de points de l'espace. A est l'**origine** et B l'**extrémité** de ce bipoint. Si A et B sont distincts, la droite (AB) est le **support** du bipoint $(A; B)$. La longueur du bipoint $(A; B)$ est la distance $\delta(A; B)$.

Deux bipoints ont la **même direction** si leurs supports sont parallèles ou confondus. Deux bipoints de même direction sont soit de **même sens** soit de **sens contraire**.

Deux bipoints $(A; B)$ et $(A'; B')$ sont **équipollents** si les segments $[AB']$ et $[A'B]$ ont le même milieu. Dans ce cas on note : $(A; B) \sim (A'; B')$.

De manière équivalente, deux bipoints sont équipollents s'ils sont de :

- même direction,
- même sens,
- même longueur.

Propriété

La relation d'**équipollence** définie dans $\varepsilon \times \varepsilon$ est une relation d'équivalence.

Définition 12.2

Soit $(A; B)$ un bipoint de l'espace. L'ensemble des bipoints $(M; N)$ équipollents au bipoint $(A; B)$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$, appelée **vecteur** et notée \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = \{(M; N) \mid (M; N) \sim (A; B)\}$$

Le bipoint $(A; B)$, ou tout autre bipoint de \overrightarrow{AB} , est un **représentant** du vecteur \overrightarrow{AB} . En d'autres termes, le bipoint $(A; B)$ définit le vecteur \overrightarrow{AB} .

$$(A; B) \sim (C; D) \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Un vecteur, sans référence à un représentant, se note \vec{u} , \vec{v} , ...

L'ensemble des vecteurs de l'espace se note \mathbf{V}_3 .

12.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

De la même façon que dans \mathbf{V}_2 , on définit dans \mathbf{V}_3 la **somme** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , notée $\vec{u} + \vec{v}$, et le **produit d'un vecteur \vec{u} par un réel λ** , noté $\lambda \cdot \vec{u}$.

Dans \mathbf{V}_3 , l'addition et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel jouissent des mêmes propriétés que les opérations correspondantes de \mathbf{V}_2 .

Comme le plan vectoriel \mathbf{V}_2 , l'espace \mathbf{V}_3 muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, a une structure d'**espace vectoriel réel**.

12.3 Combinaison linéaire

Dans ce qui suit, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel \mathbf{V}_3 et $\lambda, \beta, \gamma, \dots$ des nombres réels.

Définition 12.3

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{m}$, de coefficients respectifs $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, le vecteur

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \dots + \mu \cdot \vec{m}$$

Définition 12.4

Des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{m}$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \dots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0}$$

Ceci signifie que l'un des vecteurs au moins peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{m}$, sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \dots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = \dots = \mu = 0$$

Ceci signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 12.5

Deux vecteurs \vec{u} ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Remarques

1. Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
2. Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'il sont colinéaires.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition 12.6

Trois vecteurs de l'espace vectoriel \mathbf{V}_3 sont **coplanaires** si l'un au moins est combinaison linéaire des deux autres.

Remarques

1. Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et \vec{w} un vecteur quelconque. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement s'il existe deux nombres λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.
2. Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.
3. Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires.
4. Quatre points O, A, B et C de l'espace ε appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} sont coplanaires.

12.4 Base de V_3 et composantes scalaires

Définition 12.7

On appelle **base** de l'espace vectoriel V_3 tout sous-ensemble \mathcal{B} de V_3 tel que **chaque vecteur** \vec{u} de V_3 peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} .

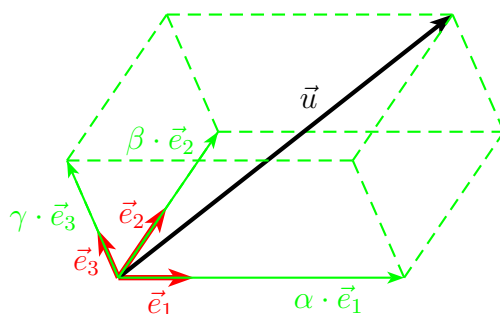
Proposition 12.1

Une base de V_3 est constituée d'un triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs linéairement indépendants ou, de manière équivalente, d'un triplet de vecteurs non coplanaires. V_3 est donc un espace vectoriel réel de dimension 3.

Propriétés

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de V_3 , alors tout vecteur \vec{u} de V_3 peut s'écrire comme une combinaison linéaire *unique* de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . Il existe un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de nombres réels, et un seul, tel que

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3$$



α , β et γ sont les **composantes scalaires** de \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note alors

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Opérations sur les composantes

Soit une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbf{V}_3 , un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires relativement à la base \mathcal{B} . On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \\ \lambda \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Test du déterminant

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbf{V}_3 , soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires.

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont linéairement indépendants} \iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Remarque

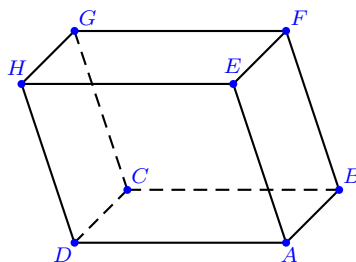
Le déterminant de trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} de \mathbf{V}_3 , $\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, est égal au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

12.5 Exercices

1) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

- a) $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{FG}$ b) $\vec{b} = \vec{AG} + \vec{CD}$
 c) $\vec{c} = \vec{EB} + \vec{CA}$ d) $\vec{d} = \vec{EH} + \vec{DC} + \vec{GA}$
 e) $\vec{e} = \vec{AH} + \vec{EB}$ f) $\vec{f} = \vec{AB} + \vec{CC} + \vec{BH} + \vec{GF}$



2) Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.

On pose $\vec{u} = \vec{SA}$, $\vec{v} = \vec{SB}$, $\vec{w} = \vec{SC}$.

Exprimer chacun des vecteurs \vec{SD} , \vec{AC} , \vec{BD} , \vec{AB} , \vec{BC} et \vec{AD} comme combinaison linéaire de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

3) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté à l'exercice 1.

Déterminer si les trois vecteurs donnés constituent une base de \mathbf{V}_3 .

- a) $(\vec{GH}, \vec{AE}, \vec{DG})$ b) $(\vec{DB}, \vec{EG}, \vec{AB})$
 c) $(\vec{GF}, \vec{EB}, \vec{CD})$ d) $(\vec{DF}, \vec{EC}, \vec{GH})$

4) Déterminer, dans les cas suivants, si les trois vecteurs donnés relativement à une base \mathcal{B} de \mathbf{V}_3 sont coplanaires.

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -10 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

5) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ et on note

K l'intersection des diagonales de ce parallélépipède

T l'intersection des diagonales de la face $ABFE$

S l'intersection des diagonales de la face $BCGF$

R le milieu de l'arête BC

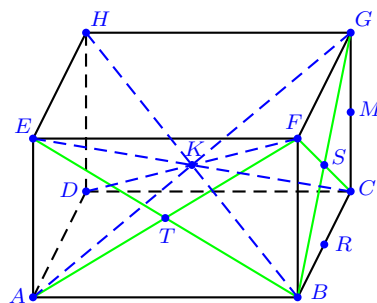
M le milieu de l'arête CG

- a) Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Construire les vecteurs \vec{a} et \vec{b} .

- b) Soit la base $\mathcal{B}' = (\vec{CM}, \vec{CD}, \vec{BR})$.

Dans la base \mathcal{B}' déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}, \vec{EB}, \vec{BH}, \vec{HA}, \vec{AM}, \vec{HS}, \vec{RA}, \vec{EK}, \vec{TH}$.



6) Relativement à une base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbf{V}_3 , on considère les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- a) Dans la base \mathcal{B} calculer les composantes du vecteur $\vec{w} = 4 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$.
- b) Prouver que le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ constitue une base de \mathbf{V}_3 . On note cette base \mathcal{B}' .
- c) Exprimer le vecteur \vec{b} dans la base \mathcal{B}' .
- d) Exprimer le vecteur \vec{v} dans la base \mathcal{B}' .

12.6 Solutions des exercices

- 1) a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{HA}$
 d) $\vec{d} = \overrightarrow{EA}$ e) $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ f) $\vec{f} = \overrightarrow{AE}$
- 2) a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$ c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$
 d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$ e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$ f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

- 3) a) non b) non
 c) oui d) non

- 4) a) oui b) non
 c) non d) oui

5) b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{HA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{RA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

- 6) a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} -32 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$
 c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}'
 d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}'

Chapitre 13

Espace affine

13.1 Repère de l'espace ε

Soit ε l'ensemble des points de l'espace.

Définition 13.1

On appelle **repère** de l'espace affine ε tout quadruplet $(O; E_1; E_2; E_3)$ de points non coplanaires.

Si $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2; E_3)$ est un repère de ε , les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ déterminent une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel \mathbf{V}_3 , appelée **base associée** au repère \mathcal{R} . Le point O est appelé **origine**, les vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 **vecteurs de base** du repère \mathcal{R} .

On note également ce repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Coordonnées d'un point relativement à un repère

Soit $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2; E_3)$ un repère du plan ε .

Les **coordonnées** x , y et z relativement à \mathcal{R} d'un point M de ε sont les composantes du vecteur \overrightarrow{OM} relativement à la base associée $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3})$. On note $M(x; y; z)$.

$$M(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OE_1} + y \cdot \overrightarrow{OE_2} + z \cdot \overrightarrow{OE_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

x , la première coordonnée du point M , est appelée **abscisse** de M .

y , la deuxième coordonnée du point M , est appelée **ordonnée** de M .

z , la troisième coordonnée du point M , est appelée **cote** de M .

Remarque

On peut associer un système d'axes de coordonnées à un repère de l'espace affine ε .

Le premier vecteur de la base associée, \vec{e}_1 , donne la direction et le sens du premier axe de coordonnées ou axe des x , noté Ox . L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de \vec{e}_1 .

Le deuxième vecteur de la base associée, \vec{e}_2 , donne la direction et le sens du deuxième axe de coordonnées ou axe des y , noté Oy . L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de \vec{e}_2 .

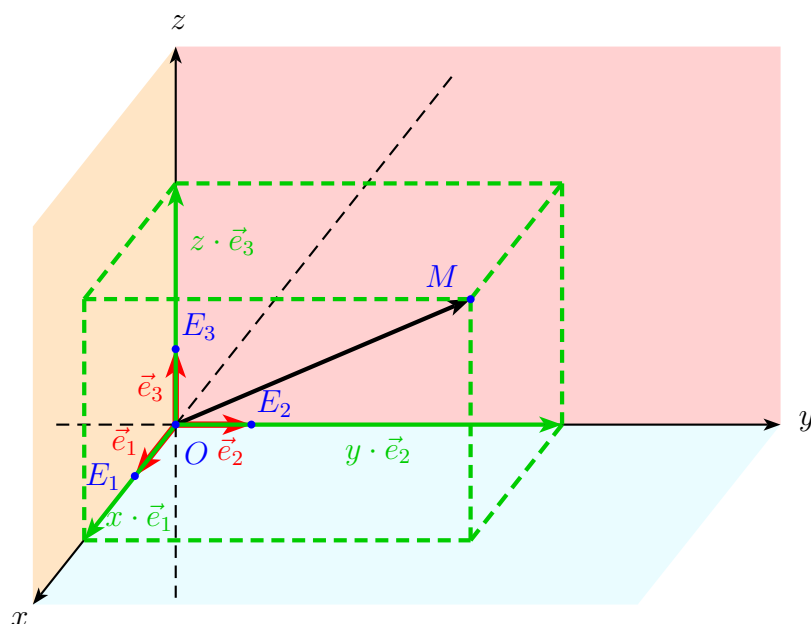
Le troisième vecteur de la base associée, \vec{e}_3 , donne la direction et le sens du troisième axe de coordonnées ou axe des z , noté Oz . L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de \vec{e}_3 .

Les axes de coordonnées définissent trois plans dans l'espace, appelés **plans de référence**.

Le premier plan de référence, ou plan Oxy , est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid z = 0\}$. Il contient l'axe Ox et l'axe Oy . Il est représenté en bleu ci-dessous.

Le deuxième plan de référence, ou plan Oxz , est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid y = 0\}$. Il contient l'axe Ox et l'axe Oz . Il est représenté en orange ci-dessous.

Le troisième plan de référence, ou plan Oyz , est l'ensemble de points : $\{(x; y; z) \mid x = 0\}$. Il contient l'axe Oy et l'axe Oz . Il est représenté en rouge ci-dessous.



13.2 Calculs avec les coordonnées

Dans un repère $(O; E_1; E_2; E_3)$ de l'espace affine ε , on donne les points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$.

13.2.1 Composantes d'un vecteur

Comme on a vu que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

13.2.2 Milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$, noté $M_{[AB]}$, sont :

$$M_{[AB]} \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Les coordonnées du milieu du segment sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des extrémités du segment.

Démonstration. Soit $M_{[AB]}$, ou plus simplement M pour cette démonstration, le milieu du segment $[AB]$. Dans ce cas, les deux égalités suivantes sont vraies :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

13.2.3 Centre de gravité d'un triangle

Les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC , noté G , sont :

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

Les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des sommets du triangle.

Démonstration. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Dans ce cas, l'égalité suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

où A' est le milieu du segment $[BC]$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

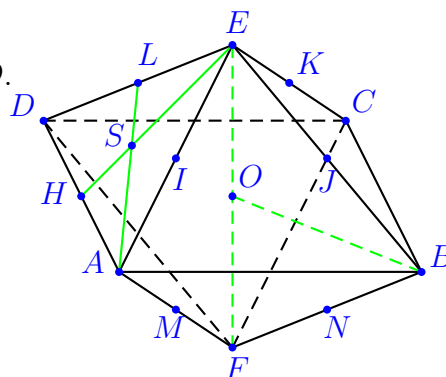
□

13.3 Exercices

- 1) Soit $ABCDEF$ un octaèdre régulier de centre O .

Les points H, I, J, K, L, M, N sont des milieux d'arêtes.

Dans le repère $(B; A; O; E)$, déterminer les coordonnées des points $A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, O$ et S .



- 2) Dans un repère $(O; E_1; E_2; E_3)$, on donne les points $A(2; 0; 3)$, $B(5; 4; 1)$, $C(1; -2; 4)$ et $D(-3; 6; -1)$.

Construire ces points.

- 3) On donne les points $A(5; 2; -3)$, $B(8; 0; 5)$, $C(-2; -4; 1)$ et $D(4; -6; 3)$.

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

- a) \overrightarrow{AB} b) \overrightarrow{DC} c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
 d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ e) $4 \cdot \overrightarrow{CD} - 3 \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

- 4) On donne les points $A(-4; 1; 3)$, $B(4; 3; 6)$ et $C(4; -6; 3)$.

- a) Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
 b) Calculer les coordonnées du milieu E de la diagonale $[AC]$.
 c) Calculer les coordonnées des centres de gravité G_1 et G_2 des triangles ABC et ACD .
 d) Calculer les coordonnées du milieu F du segment $[G_1G_2]$. *Constatation.*

- 5) On donne deux sommets $A(3; -2; 5)$ et $B(7; 5; 10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5; 4; 6)$ de ses diagonales.

Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D .

- 6) On donne les points $M(0; 8; -2)$, $N(4; 2; 4)$ et $H(2; -3; 5)$.

Calculer les coordonnées des images M' et N' de M et N par l'homothétie de centre H et de rapport -2 .

Comparer les vecteurs \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{M'N'}$.

- 7) On donne les points $A(12; -11; 18)$ et $B(-8; 7; -6)$.

Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en trois parties égales.

- 8) Prouver que les quatre points A, B, C , et D sont coplanaires.

- a) $A(0; 2; 4)$ $B(1; -1; 3)$ $C(-8; 2; 1)$ $D(-6; -4; -1)$
 b) $A(5; 2; 1)$ $B(-6; 3; -2)$ $C(2; 5; 2)$ $D(0; 0; -2)$

13.4 Solutions des exercices

- 1) a) $A(1; 0; 0)$ b) $B(0; 0; 0)$ c) $C(-1; 2; 0)$
 d) $D(0; 2; 0)$ e) $E(0; 0; 1)$ f) $F(0; 2; -1)$
 g) $H(\frac{1}{2}; 1; 0)$ h) $I(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ i) $J(0; 0; \frac{1}{2})$
 j) $K(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$ k) $L(0; 1; \frac{1}{2})$ l) $M(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2})$
 m) $N(0; 1; -\frac{1}{2})$ n) $O(0; 1; 0)$ o) $S(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$
- 3) a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 33 \\ -14 \\ 32 \end{pmatrix}$
- 4) a) $D(-4; -8; 0)$
 b) $E(0; -\frac{5}{2}; 3)$
 c) $G_1(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 4), G_2(-\frac{4}{3}; -\frac{13}{3}; 2)$
 d) $F(0, -\frac{5}{2}; 3)$
- 5) $C(7; 10; 7), D(3; 3; 2)$
- 6) $\overrightarrow{M'N'} = -2\overrightarrow{MN}, M'(6; -25; 19)$ et $N'(-2; -13; 7)$
- 7) $I_1(\frac{16}{3}; -5; 10), I_2(-\frac{4}{3}; 1; 2)$

Chapitre 14

La droite

14.1 Définitions

Définition 14.1

Trois points A , B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Droite déterminée par deux points

Soit deux points distincts A et B .

Définition 14.2

La **droite** (AB) est l'ensemble des points M de l'espace ε alignés avec A et B :

$$(AB) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur \overrightarrow{AB} est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB) .

Droite déterminée par un point et une direction

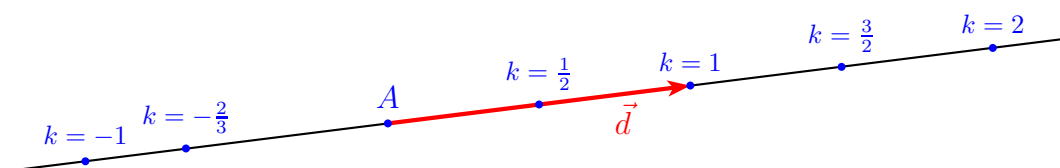
Soit un point A et un vecteur \vec{d} non nul.

Définition 14.3

La droite passant par A (appelé **point d'ancrage**) et de direction \vec{d} , notée $d(A; \vec{d})$, est l'ensemble des points M de l'espace ε tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{d} sont colinéaires :

$$d(A, \vec{d}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d}, k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur \vec{d} est un **vecteur directeur** de la droite $d(A, \vec{d})$.



Remarque

A chaque valeur du nombre réel k correspond un unique point de la droite.

A chaque point de la droite correspond un unique nombre réel k .

14.2 Equations paramétriques d'une droite

L'espace ε est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Soit la droite d passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

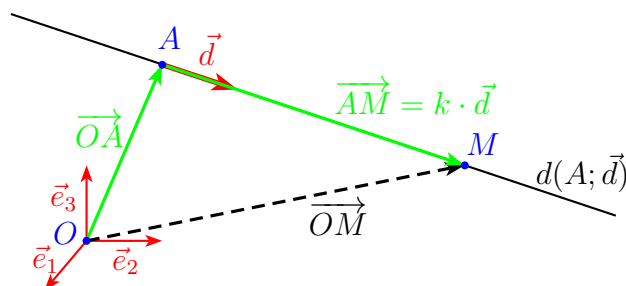
Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite d si et seulement s'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AM} = k \cdot \vec{d}$. Ainsi, pour tout point M de la droite d , on a :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + k \cdot \vec{d} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{R}$. Cette équation est une **représentation paramétrique** de la droite d . Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de d :

$$d : \begin{cases} x = x_A + k \cdot d_1 \\ y = y_A + k \cdot d_2 \\ z = z_A + k \cdot d_3 \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.



Remarque

Dans l'espace, une droite n'a pas d'équation cartésienne.

Exemple

Soit les points $A(-3; 2; 1)$ et $B(-1; 3; -2)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques de la droite (AB) .

1. Un vecteur directeur de la droite (AB) :

$$\vec{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Les équations paramétriques de (AB) sont (une représentation possible parmi l'infinité des représentations possibles de la droite (AB)) :

$$(AB) : \begin{cases} x = -3 + k \cdot 2 \\ y = 2 + k \cdot 1 \\ z = 1 + k \cdot (-3) \end{cases}$$

On peut maintenant donner des points appartenant à la droite (AB) en choisissant une valeur de k . Par exemple, pour $k = 5$, on obtient le point

$$C : \begin{cases} x = -3 + 5 \cdot 2 = 7 \\ y = 2 + 5 \cdot 1 = 7 \\ z = 1 + 5 \cdot (-3) = -14 \end{cases} \Rightarrow C(7; 7; -14)$$

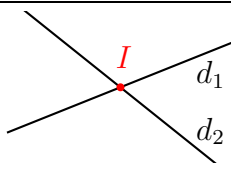
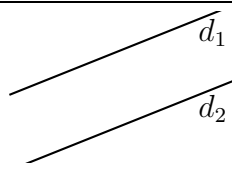
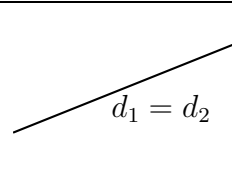
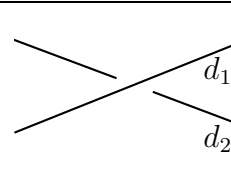
De plus, on peut déterminer si un point appartient ou non à la droite (AB) en déterminant s'il existe une valeur unique de k tel que les équations paramétriques sont vérifiées pour les coordonnées du point. Par exemple, pour le point $D(-9; 8; 10)$, on a

$$D : \begin{cases} -9 = -3 + k \cdot 2 & \Rightarrow k = -3 \\ 8 = 2 + k \cdot 1 & \Rightarrow k = 6 \\ 10 = 1 + k \cdot (-3) & \Rightarrow k = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

14.3 Position relative de deux droites dans l'espace

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux droites d_1 et d_2 .

Sécantes	Parallèles		Gauches
	distinctes	confondues	
			
Un unique point I d'intersection	Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (droites)	Aucun point d'intersection
Droites coplanaires			

Calcul du point d'intersection de deux droites sécantes

On donne ici une méthode pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Ecrire les équations paramétriques des deux droites en désignant leurs paramètres par des lettres différentes.

En posant l'égalité des coordonnées de même rang, on obtient un système de trois équations à deux inconnues (les paramètres).

On résout le système formé par deux équations choisies parmi ces trois équations, puis on vérifie si l'éventuelle solution obtenue satisfait l'équation restante.

Si oui, les droites sont sécantes et on obtient le point d'intersection en injectant la valeur obtenue d'un des paramètres dans les équations de la droite correspondante.

Exemple

Nous allons déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection des droites

$$d : \begin{cases} x = -3 + k \cdot 2 \\ y = 2 + k \cdot 1 \\ z = 1 + k \cdot (-3) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} x = 6 + s \cdot 1 \\ y = -1 + s \cdot (-1) \\ z = 0 + s \cdot 1 \end{cases}$$

On pose le système suivant d'équations

$$\begin{cases} -3 + 2k = 6 + s \\ 2 + k = -1 - s \\ 1 - 3k = s \end{cases}$$

On commence par résoudre le système formé par les deux premières équations. On peut sommer ces deux équations et trouver

$$-1 + 3k = 5 \quad \rightarrow \quad 3k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 2$$

On obtient alors $s = -9 + 2 \cdot 2 = -5$. On vérifie la solution $(2; -5)$ dans la troisième équation :

$$1 - 3 \cdot 2 \stackrel{?}{=} -5$$

Comme cette égalité est vraie, les deux droites s'intersectent en un point unique I . Pour le trouver, on utilise les équations paramétriques d'une des deux droites et la valeur du paramètre associé.

$$I : \begin{cases} x = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \\ y = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ z = 1 + 2 \cdot (-3) = -5 \end{cases} \Rightarrow I(1; 4; -5)$$

14.4 Traces d'une droite

Définition 14.4

On appelle **traces** d'une droite les points d'intersection de cette droite avec les plans de référence Oxy , Oxz et Oyz .

14.5 Exercices

1) Les points M , N et P suivants sont-ils alignés ?

a) $M(3; 1; -1)$ $N(2; 0; 4)$ $P(-3; 2; 5)$

b) $M(2; -1; 0)$ $N(1; 1; -2)$ $P(4; -5; -11)$

c) $M(3; 1; \frac{1}{2})$ $N(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $P(9; 4; \frac{1}{2})$

2) Soit la droite d passant par les points $A(1; -2; 5)$ et $B(-3; 6; 1)$.

a) Déterminer deux autres points de la droite d .

b) Déterminer deux vecteurs directeurs de la droite d .

3) Une droite d est définie par un point $A(2; 4; 5)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite d .

b) Vérifier que le point $P(7; -1; 3)$ appartient à la droite d .

4) Soit le point $A(2; 0; -3)$.

Ecrire une représentation paramétrique des droites suivantes :

a) d_1 passant par les points A et $B(1; 4; 5)$.

b) d_2 passant par le point A et parallèle à la droite $g : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$.

c) d_3 passant par le point A et parallèle à l'axe des y .

5) Soit la droite $d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$.

Donner deux autres représentations paramétriques de la droite d .

6) Soit la droite $d : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + 3t \end{cases}$.

Déterminer le point de d :

a) qui a une abscisse égale à 12.

b) qui a une ordonnée égale à 5.

c) qui a une cote égale à -2 .

d) dont l'abscisse et la cote sont égales.

e) dont la cote est égale au double de l'ordonnée.

7) Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, étudier les positions relatives des droites :

a) $d : A(6; 3; 0) \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad g : B(0; 0; 4) \quad \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

b) $d : A(-3; -1; 2) \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad g : B(4; -1; 0) \quad \vec{w} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

c) $d : A(7; 4; 4) \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k} \quad \text{et} \quad g : B(5; -1; 0) \quad \vec{w} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

d) $d : A(2; -1; -3) \quad \vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{et} \quad g : B(4; 0; -4) \quad \vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

8) Calculer le point d'intersection des deux droites sécantes suivantes :

$d = (AB)$ avec $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 3; -1)$ et $g = (CD)$ avec $C(0; -1; 6)$, $D(2; -3; 8)$.

9) On donne un quadrilatère plan $ABCD$ avec $A(1; 3; 2)$, $B(4; -1; 3)$, $C(4; 9; -7)$ et $D(1; 8; -3)$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection des diagonales.

10) Soit la droite d passant par les points $A(6; 2; 1)$ et $B(-3; 8; -2)$

a) Déterminer les traces de la droites d sur les trois plans de référence.

b) Dessiner la droite d avec la partie visible en trait plein (les plans de référence étant supposés opaques).

c) Dessiner les projections de d sur les trois plans de référence.

11) Dessiner la droite g passant par les points $A(-4; -5; 1)$ et $B(2; 10; 4)$ avec la partie visible en trait plein.

12) a) Déterminer une droite d dont la projection sur le plan Oxy est un point.

b) Déterminer une droite g non parallèle à l'axe Oy et dont la projection sur le plan Oyz est parallèle à Oy .

14.6 Solutions des exercices

1) a) non

b) non

c) oui

2) a) $M(-7; 14; -3)$, $N(9; -18; 13)$ par exemple

b) $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$ par exemple

3) a) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

4) a) $d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + 4t \\ z = -3 + 8t \end{cases}$

b) $d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$

c) $d_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 + t \\ z = -3 \end{cases}$

5) $d : \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$, $d : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 12 + 3t \\ z = -18 - 5t \end{cases}$ par exemple

6) a) $(12; -3; -6)$

b) $(-28; 5; 18)$

c) $(\frac{16}{3}; -\frac{5}{3}; -2)$

d) $(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$

e) $(12; -3; -6)$

7) a) Les deux droites sont gauches.

b) Les deux droites sont strictement parallèles.

c) Les deux droites sont sécantes en $(3; 4; 2)$.

d) Les deux droites sont confondues.

8) $I(-5; 4; 1)$

9) $I(2; 5; -1)$

10) a) Sur le plan Oxy : $T_1(3; 4; 0)$, sur le plan Oxz : $T_2(9; 0; 2)$, sur le plan Oyz : $T_3(0; 6; -1)$

12) a) $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$ par exemple

b) $g : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ par exemple

Chapitre 15

Le plan

15.1 Définitions

Définition 15.1

Quatre points distincts A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont coplanaires. Il existe alors trois nombres réels α, β et γ non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} + \gamma \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Plan déterminé par trois points

Soit trois points distincts A, B et C non alignés.

Définition 15.2

Le (ABC) est l'ensemble des points M de ε coplanaires aux points A, B et C :

$$(ABC) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC}, k, n \in \mathbb{R}\}$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux **vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

Plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs

Soit un point A et deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} .

Définition 15.3

Le plan passant par le point A (appelé **point d'ancrage**) et de **vecteurs directeurs** \vec{u} et \vec{v} , noté $p(A; \vec{u}; \vec{v})$, est l'ensemble des points M de l'espace ε tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires :

$$p(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}, k, n \in \mathbb{R}\}$$

Remarques

1. A chaque couple de nombres $(k; n)$ correspond un unique point du plan.
A chaque point du plan correspond un unique couple de nombres $(k; n)$.
2. Un plan peut également être déterminé par :
 - une droite et un point ne lui appartenant pas

- deux droites sécantes
- deux droites parallèles distinctes

15.2 Equations paramétriques d'un plan

L'espace ε est muni d'un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Soit le plan p passant par le point d'ancrage $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant comme vecteurs

directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

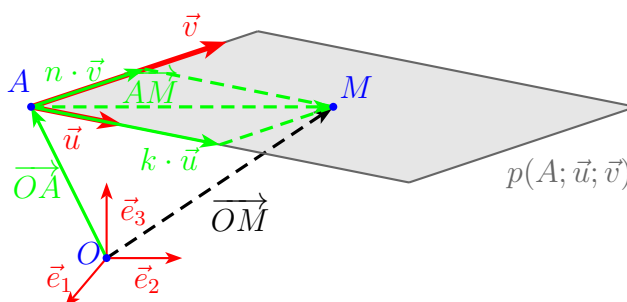
Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan p si et seulement s'il existe un couple de nombres $(k; n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$. Ainsi, pour tout point M de plan p , on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

où $(k; n) \in \mathbb{R}^2$. Cette équation est une **représentation paramétrique** du plan p . Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de p :

$$p : \begin{cases} x = x_A + k \cdot u_1 + n \cdot v_1 \\ y = y_A + k \cdot u_2 + n \cdot v_2 \\ z = z_A + k \cdot u_3 + n \cdot v_3 \end{cases}$$

où $(k; n) \in \mathbb{R}^2$.



Exemple

Soit les points $A(-3; 2; 1)$, $B(-1; 3; -2)$ et $C(-3; -2; -2)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques du plan (ABC) .

1. Deux vecteurs directeurs du plan (ABC) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Les équations paramétriques de (ABC) sont (une représentation possible parmi l'infinité des représentations possibles du plan (ABC)) :

$$(ABC) : \begin{cases} x = -3 + k \cdot 2 & + n \cdot 0 \\ y = 2 + k \cdot 1 & + n \cdot (-4) \\ z = 1 + k \cdot (-3) & + n \cdot (-3) \end{cases}$$

On peut maintenant donner des points appartenant au plan (ABC) en choisissant un couple de nombres $(k; n)$. Par exemple, pour $(k; n) = (5; -2)$, on obtient le points

$$D : \begin{cases} x = -3 + 5 \cdot 2 & + (-2) \cdot 0 & = 7 \\ y = 2 + 5 \cdot 1 & + (-2) \cdot (-4) & = 15 \\ z = 1 + 5 \cdot (-3) & + (-2) \cdot (-3) & = -8 \end{cases} \Rightarrow C(7; 15; -8)$$

15.3 Equation cartésienne d'un plan

Soit le plan p passant par le point d'ancrage $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant comme vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan p si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires. Or, ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si $Det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$ ou :

$$Det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient une équation du type

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

où a , b , c et d sont quatre nombres réels. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de p .

Exemple

Soit le plan (ABC) de l'exemple précédent passant par les points $A(-3; 2; 1)$, $B(-1; 3; -2)$ et $C(-3; -2; -2)$. Nous allons déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC) .

On pose et on développe le déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x + 3 & 2 & 0 \\ y - 2 & 1 & -4 \\ z - 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} &= (-3) \cdot (x + 3) - 8 \cdot (z - 1) - 12(x + 3) + 6(y - 2) \\ &= -15(x + 3) + 6(y - 2) - 8(z - 1) = -15x + 6y - 8z - 49 \end{aligned}$$

Finalement, on posant que la valeur de ce déterminant doit être égale à zéro, on obtient l'équation cartésienne de (ABC) :

$$-15x + 6y - 8z - 49 = 0$$

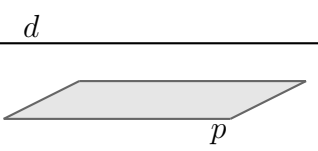
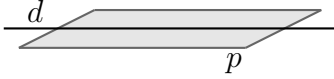
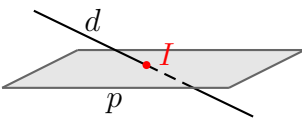
On peut maintenant déterminer si un point appartient ou non au plan (ABC) en déterminant si l'équation cartésienne est vérifiée pour les coordonnées du point. Par exemple, pour le point $E(-4; 2; 7)$, on a

$$\underbrace{(-15) \cdot (-4) + 6 \cdot 2 - 8 \cdot 7 - 49}_{=-33} \stackrel{?}{=} 0$$

Ainsi $E \notin (ABC)$.

15.4 Positions relatives d'une droite et d'un plan

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'un plan p .

d parallèle à p		d et p sécants
strictement	$d \subset p$	
		
Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (d)	Un unique point I d'intersection

Calcul de l'intersection d'une droite et d'un plan

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan p .

Substituer les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne du plan p .

On obtient alors une équation de degré 1 à une inconnue (le paramètre), qu'on résout.

- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point I . On obtient ce point en injectant la valeur obtenue du paramètre dans les équations de la droite d .
- Si cette équation a une infinité de solutions, alors l'intersection est la droite d .
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soit le plan $p : x - 2y - 3z + 6 = 0$ et la droite $d : \begin{cases} x = 1 + k \cdot 2 \\ y = 2 + k \\ z = -2 - k \end{cases}$. Nous

allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

On substitue tout d'abord les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne du plan p :

$$1 \cdot (1 + 2k) - 2 \cdot (2 + k) - 3 \cdot (-2 - k) + 6 = 0$$

On résout l'équation obtenue :

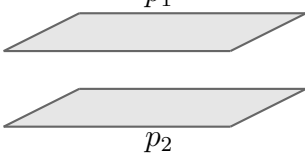
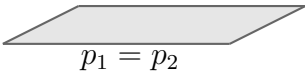
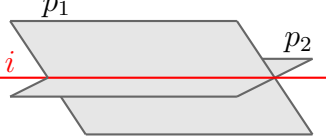
$$3k + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 3k = -9 \quad \rightarrow \quad k = -3$$

La droite d et le plan p s'intersectent en un point I . Pour l'obtenir, on injecte la valeur $k = -3$ dans les équations paramétriques de la droite :

$$I : \begin{cases} x = 1 + (-3) \cdot 2 = -5 \\ y = 2 + (-3) = -1 \\ z = -2 - (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-5; -1; 1)$$

15.5 Positions relatives de deux plans

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux plans p_1 et p_2 .

p_1 et p_2 parallèles		p_1 et p_2 sécants
distincts	confondus	
		
Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (plans)	Une unique droite i d'intersection

Equations cartésiennes de deux plans parallèles

Théorème 15.1

Soient les plans, donnés par leurs équations cartésiennes, $p_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (avec $a_1, b_1, c_1 \neq 0$) et $p_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ (avec $a_2, b_2, c_2 \neq 0$).

Les plan p_1 et p_2 sont **parallèles** si et seulement si les coefficients a , b et c sont proportionnels :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}} \begin{cases} \neq \frac{d_1}{d_2} & \text{pour } p_1 \text{ et } p_2 \text{ parallèles distincts} \\ = \frac{d_1}{d_2} & \text{pour } p_1 \text{ et } p_2 \text{ parallèles confondus} \end{cases}$$

Calcul de l'intersection de deux plans sécants

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection de deux plans p_1 et p_2 sécants.

Poser le système formé par les équations cartésiennes des deux plans. Ce système contient deux équations à trois inconnues.

On se ramène à un système de deux équations à deux inconnues en considérant provisoirement une des inconnues comme constante. On nomme alors cette "inconnue" k .

On résout ce système et on obtient, pour chaque inconnue, une relation la liant à la constante k .

Ces trois équations constituent les équations paramétriques de la droite i d'intersection et le nombre k est le paramètre.

Exemple

Soit les plans sécants $p_1 : 5x + 3y - 2z - 4 = 0$ et $p_2 : 5x + 3y + 2z - 6 = 0$. Nous allons déterminer leur droite d'intersection.

On pose le système de deux équations à trois inconnues (x , y , et z) :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z = 4 \\ 5x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

On pose alors, par exemple, $x = k$ et on résout le système de deux équations à deux inconnues (y et z) :

$$\begin{cases} 5k + 3y - 2z = 4 & \textcircled{1} \\ 5k + 3y + 2z = 6 & \textcircled{2} \end{cases}$$

On obtient :

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 10k + 6y = 10 \rightarrow y = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}k$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : -4z = -2 \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Finalement, les équations paramétriques de la droite d'intersection i sont :

$$i : \begin{cases} x = 0 + k \\ y = \frac{5}{3} - k \cdot \frac{5}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

15.6 Traces d'un plan

Définition 15.4

On appelle **traces** d'un plan les droites d'intersection de ce plan avec les plans de référence Oxy , Oxz , Oyz .

15.7 Exercices

- 1) Vérifier que les points $A(-4; 0; 3)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 1)$ et $D(2; 1; 2)$ sont situés dans un même plan.

- 2) On donne les équations paramétriques du plan p :
$$\begin{cases} x = 3 - 2k + t \\ y = 1 + 1k - 4t \\ z = 5 + 3k + 3t \end{cases}$$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan p ?

- a) $A(-2; 7; 8)$ b) $B(4; 4; 3)$ c) $C(\frac{11}{6}; -\frac{29}{6}; 15)$

- 3) Déterminer les équations paramétriques des plans suivants :

a) p_1 passant par $A(6; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

b) p_2 passant par $A(2; 3; 5)$, $B(1; 0; 5)$, $C(6; -2; 5)$.

c) p_3 contenant le point $A(1; 2; 5)$ et la droite définie par $B(6; 0; 0)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) p_4 contenant les droites $d : A(2; 0; 3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $g : B(4; 0; 0)$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e) p_5 contenant les droites $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 9 - t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$.

- 4) On donne l'équation cartésienne du plan $p : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan p ?

- a) $A(0; 2; 2)$ b) $B(4; \frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ c) $C(\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{7}{5})$

- 5) On donne les équations paramétriques d'un plan p . Déterminer l'équation cartésienne de p .

$$p : \begin{cases} x = 2 + k - 3t \\ y = 5 - k + 2t \\ z = 1 + k - t \end{cases}$$

- 6) Déterminer les équations cartésiennes des plans de l'exercice 3.

- 7) Trouver les équations paramétriques des plans d'équations cartésiennes :

- a) $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ b) $2x - y + z - 4 = 0$

- 8) On donne le plan $p : 2x - y + 3z - 6 = 0$

Déterminer la position de p relativement aux droites :

a) $d : A(2; 1; -2)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $g : B(2; 1; -1)$, $C(3; 0; -2)$

c) $h : D(1; 2; 2)$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 9) On donne le plan $p : 3x - 2y + z - 6 = 0$.
Déterminer les intersections de p avec les axes de référence.
- 10) On donne les points $A(1; 2; 6)$, $B(5; 7; 4)$, $C(2; 3; 5)$, $D(4; 6; 1)$ et $E(3; 4; 2)$.
Calculer le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan (CDE) .
- 11) On donne le plan $p : 2x - 5y + z - 3 = 0$. Ecrire l'équation cartésienne d'un plan :
a) parallèle au plan p et passant par l'origine.
b) parallèle au plan p et passant par $A(2; -1; 4)$.
- 12) On donne les équations cartésiennes de deux plans p et q .
Déterminer si ces deux plans sont sécants, parallèles ou confondus.
a) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 3x + 2y + 5z = 4$
b) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : 6x - 4y + 10z = 4$
c) $p : 3x - 2y + 5z = 4$ et $q : -15x + 10y - 25z = -20$
- 13) Soit le plan $p : 3x - 4y - 2z + 12 = 0$.
Déterminer les traces de p sur les plans de référence.
Dessiner p et hachurer sa partie visible, les plans de référence étant supposés opaques.
- 14) On donne deux plans $p : 3x - 5y + z + 4 = 0$ et $q : x + y - 2z + 3 = 0$
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de ces deux plans.
- 15) Existe-t-il un point appartenant aux trois plans p , q et r ?
 $p : x + 2y - 3z = -6$ $q : 2x + 4y - z = 18$ $r : 3x - 2y + z = 2$
- 16) Déterminer une droite d passant par $A(3; -2; -4)$, coupant la droite g définie par $B(2; -4; 1)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan $p : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$.
- 17) Trouver les équations paramétriques d'une droite d passant par $A(2; 3; 5)$ et parallèle aux deux plans $p : 3x - y + z = 0$ et $q : x - y + z = 0$.
- 18) Déterminer les équations paramétriques de la droite d qui passe par le point $A(4; -7; 5)$ et qui rencontre les deux droites suivantes :

$$g : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 + 2k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad h : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

- 19) On donne une droite d par deux de ses projections :

$$d' : \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad d'' : \begin{cases} y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Déterminer les équations paramétriques de la droite d .

15.8 Solutions des exercices

- 2) a) oui b) non c) oui

3) a) $p_1 : \begin{cases} x = 6 - 3k - 2t \\ y = 0 + 2k \\ z = 0 + \quad + t \end{cases}$ b) $p_2 : \begin{cases} x = 2 - k + 4t \\ y = 3 - 3k - 5t \\ z = 5 \end{cases}$

c) $p_3 : \begin{cases} x = 1 + 5k - t \\ y = 2 - 2k + 3t \\ z = 5 - 5k + t \end{cases}$ d) $p_4 : \begin{cases} x = 2 + k + 2t \\ y = 0 - k \\ z = 3 + k - 3t \end{cases}$

e) $p_5 : \begin{cases} x = 1 + 3k - 3t \\ y = 3 - 4k - t \\ z = 2 + k + 4t \end{cases}$

- 4) a) non b) oui c) non

5) $p : x + 2y + z - 13 = 0$

6) a) $p_1 : 2x + 3y + 4z + 12 = 0$

b) $p_2 : z - 5 = 0$

c) $p_3 : x + z - 6 = 0$

d) $p_4 : 3x + 5y + 2z - 12 = 0$

e) $p_5 : x + y + z - 6 = 0$

7) a) $p_1 : \begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = -1 \quad + 4t \\ z = -2 - k + 3t \end{cases}$ b) $p_2 : \begin{cases} x = 0 + k \\ y = 0 \quad + t \\ z = 4 - 2k + t \end{cases}$

8) 1) La droite intersecte le plan dans le point $(-1; -5; 1)$

2) La droite est parallèle au plan.

3) La droite est contenue dans le plan.

9) Axe des $x : (2; 0; 0)$, axe des $y : (0; -3; 0)$, axe des $z : (0; 0; 6)$

10) $I(2; \frac{13}{4}; \frac{11}{2})$

11) a) $2x - 5y + z = 0$

b) $2x - 5y + z - 13 = 0$

12) a) Les deux plans sont sécants.

b) Les deux plans sont strictement parallèles.

c) Les deux plans sont confondus.

13) Trace sur le plan $Oxy : t_1 : \begin{cases} x = k \\ y = 3 + \frac{3}{4}k \\ z = 0 \end{cases}$

Trace sur le plan $Oxz : t_2 : \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 6 + \frac{3}{2}k \end{cases}$

Trace sur le plan $Oyz : t_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$

$$14) i : \begin{cases} x = 1 + 9k \\ y = 2 + 7k \\ z = 3 + 8k \end{cases}$$

$$15) I(2; 5; 6)$$

$$16) d : \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = -2 - 6k \\ z = -4 + 9k \end{cases}$$

$$17) d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + k \\ z = 5 + k \end{cases}$$

$$18) d : \begin{cases} x = 4 - 9k \\ y = -7 + 22k \\ z = 5 - 11k \end{cases}$$

$$19) d : \begin{cases} x = 8 - 2k \\ y = -4 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

Chapitre 16

Produit scalaire

16.1 Définitions produit scalaire et norme

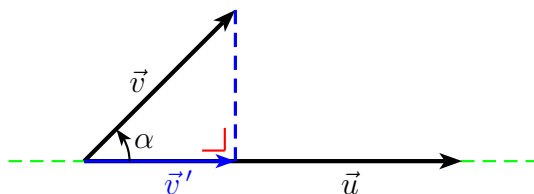
Les propriétés et les formules du produit scalaire dans l'espace sont analogues à celle établies dans le plan, comme deux vecteurs de l'espace sont toujours "coplanaires".

Définition 16.1

On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} le produit de la mesure algébrique (avec signe) \bar{u} de \vec{u} et de la mesure algébrique \bar{v}' de la projection orthogonale, \vec{v}' , de \vec{v} sur une droite de direction \vec{u} .

On note le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}'}$$



Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et le nombre réel λ , on a :

1. Commutativité :
2. Bilinearité :
3. Produit par un nombre réel :
4. Positivité :
5. Vecteur nul :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &\geq 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

Définition 16.2

On appelle **norme** d'un vecteur \vec{u} , la racine carrée du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$. La norme de \vec{u} se note $\|\vec{u}\|$.

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

Remarque

La **norme** d'un vecteur est synonyme de sa **longueur**.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et le nombre réel λ , on a :

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. Positivité : | $\ \vec{u}\ \geq 0$ |
| 2. Vecteur nul : | $\ \vec{u}\ = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ |
| 3. Produit par un nombre réel : | $\ \lambda \cdot \vec{u}\ = \lambda \cdot \ \vec{u}\ $ |
| 4. Inégalité triangulaire : | $\ \vec{u} + \vec{v}\ \leq \ \vec{u}\ + \ \vec{v}\ $ |

Proposition 16.1

Si A , B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\widehat{BAC} = \alpha$ (α est l'angle entre le vecteur \vec{u} et le vecteur \vec{v}), on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

On appelle cette égalité l'**expression géométrique** du produit scalaire.

Définition 16.3

On appelle vecteur **unitaire** un vecteur de norme 1.

$$\vec{u} \text{ est un vecteur unitaire } \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$$

Proposition 16.2

Si $\vec{v} \neq 0$, les vecteurs unitaires de même direction que \vec{v} sont

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

16.2 Orthogonalité

16.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 16.4

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarques

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs \vec{v} , car $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul, sans que l'un des vecteurs soit nul.

Théorème 16.3

Si le vecteur \vec{u} est orthogonal aux vecteurs \vec{v} et \vec{w} , alors \vec{u} est orthogonal à toute combinaison linéaire de \vec{v} et \vec{w} .

Démonstration. Soient \vec{u} orthogonal à \vec{v} et \vec{w} et $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$, combinaison linéaire de \vec{v} et \vec{w} .

On a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{a} &= \vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) \stackrel{\text{bil.}}{=} \vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v}) + \vec{u} \cdot (\beta \cdot \vec{w}) \\ &\stackrel{\text{prod.}}{=} \alpha \cdot \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{=0} + \beta \cdot \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{w})}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Ainsi, \vec{u} et \vec{a} sont orthogonaux. □

Conséquence

Si un vecteur \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires \vec{v} et \vec{w} qui sont des vecteurs directeurs d'un plan p , alors le vecteur \vec{u} est orthogonal à chaque vecteur défini par deux points A et M du plan p : $\vec{u} \perp \overrightarrow{AM}$.

En effet, comme, par définition de p , les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires, \overrightarrow{AM} peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de \vec{v} et \vec{w} .

Définition 16.5

On appelle **vecteur normal** à un plan p tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs de ce plan.

16.2.2 Droites orthogonales

Définition 16.6

Les droites d et g de vecteurs directeurs respectifs \vec{d} et \vec{g} sont **orthogonales** si les vecteurs \vec{d} et \vec{g} sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{d} \cdot \vec{g} = 0$.

Remarques

1. Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.
2. Deux droites orthogonales et sécantes sont dites **perpendiculaires**.

16.2.3 Droite et plan perpendiculaires

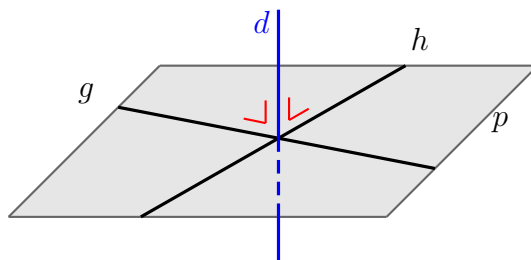
Définition 16.7

Une droite d et un plan p sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur \vec{d} de la droite et un vecteur normal \vec{n} au plan sont colinéaires, c'est-à-dire si $\vec{n} = \alpha \cdot \vec{d}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une droite orthogonale à un plan est aussi appelée **normale** de ce plan.

Théorème 16.4

Si une droite d est orthogonale à deux droites g et h sécantes d'un plan p , alors la droite d est orthogonale au plan p .



Démonstration. Soit une droite d orthogonale à deux droites g et h sécantes d'un plan p . Comme g et h sont sécantes, leurs vecteurs directeurs \vec{g} et \vec{h} sont des vecteurs directeurs de p .

Ainsi, le vecteur directeur \vec{d} de d est un vecteur normal de p comme il est orthogonal à deux vecteurs directeurs de p . \vec{d} est donc colinéaire aux autres vecteurs normaux de p . \square

Remarques

1. Une droite d est orthogonale à un plan p si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de p .
2. Si une droite d est orthogonale à une droite d'un plan p , on ne peut pas en déduire que la droite d est orthogonale au plan p .
3. Etant donné une droite d et un point A , il existe un seul plan passant par A et orthogonal à d .
4. Etant donné un plan p et un point A , il existe une seule droite passant par A et normale à p .

16.2.4 Plans perpendiculaires

Définition 16.8

Deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Théorème 16.5

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre.

16.3 Repère orthonormé

16.3.1 Définitions

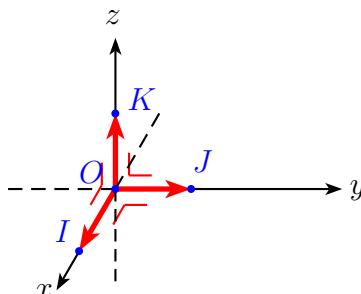
Définition 16.9

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbf{V}_3 est dite **orthonormée** si

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Un repère $(O; I; J; K)$ de ε est dit **orthonormé** si

$$\begin{cases} \|\vec{OI}\| = \|\vec{OJ}\| = \|\vec{OK}\| = 1 \\ \vec{OI} \cdot \vec{OJ} = \vec{OI} \cdot \vec{OK} = \vec{OJ} \cdot \vec{OK} = 0 \end{cases}$$



Remarques

1. Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs de cette base sont orthogonaux deux à deux et unitaires (de longueur 1).
2. Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases de \mathbf{V}_3 comme étant orthonormées et les repères de ε comme étant également orthonormés.

16.3.2 Expression analytique du produit scalaire

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 16.6

Le **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Démonstration. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on calcule le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} (en utilisant les propriétés du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) \cdot (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}) \\ &= u_1 v_1 \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{=1} + u_2 v_2 \cdot \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{=1} + u_3 v_3 \cdot \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{=1} \\ &\quad + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0} + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \cdot \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}_{=0} + (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cdot \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}_{=0} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

□

16.3.3 Expression analytique de la norme

On considère le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ donné en composantes dans une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 16.7

La **norme** du vecteur \vec{u} est le nombre réel :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

16.3.4 Vecteur normal à un plan

Proposition 16.8

Le plan d'équation cartésienne $p : ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

comme **vecteur normal**.

Démonstration. Soient deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ d'un plan d'équation cartésienne $p : ax + by + cz + d = 0$. Nous allons montrer que les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = a \cdot (x_B - x_A) + b \cdot (y_B - y_A) + c \cdot (z_B - z_A) \\ &= \underbrace{(ax_B + by_B + cz_B)}_{=-d, \text{ car } B \in p} - \underbrace{(ax_A + by_A + cz_A)}_{=-d, \text{ car } A \in p} = 0 \end{aligned}$$

Comme \vec{n} est orthogonal à tous les vecteurs formés à partir de deux points du plan p , \vec{n} est normal à p . \square

Remarque

Un plan peut être déterminé par **un point et un vecteur normal**.

Exemple

Nous allons déterminer l'équation cartésienne du plan p passant par le point $A(3; -1; 7)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(3; -4; 6)$ et $C(2; 4; 9)$.

1. Un vecteur normal du plan p est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de p est $-x + 8y + 3z + d = 0$

2. Comme $A \in p$, on peut déterminer d en résolvant l'équation

$$(-1) \cdot 3 + 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -10$$

L'équation cartésienne de p est : $-x + 8y + 3z - 10 = 0$

16.4 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer : $\vec{u} \bullet \vec{v}$; $\vec{u} \bullet \vec{u}$; $\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v})$

b) Calculer : $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|(-2) \cdot \vec{u}\|$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

2) Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur \vec{a} .

b) Déterminer les vecteurs de norme 9 colinéaires au vecteur \vec{a} .

3) Déterminer deux vecteurs \vec{w} orthogonaux au vecteur \vec{u} de l'exercice 1.

4) Déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à

chacun des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

5) Soit la droite $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 0 + t \\ z = -4 - t \end{cases}$.

Déterminer une droite g perpendiculaire à d .

6) Déterminer la droite d passant par le point $A(2; 3; 5)$ et perpendiculaire au plan p d'équation cartésienne $3x - 2y + z + 5 = 0$.

7) Ecrire une équation cartésienne du plan p passant par le point $A(3; 1; 1)$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B(1; 0; 5)$ et $C(3; -3; 8)$.

8) Ecrire une équation cartésienne du plan p passant par l'origine et par le point $A(1; 1; 1)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x - y + z + 2 = 0$.

9) Déterminer l'équation cartésienne du plan p perpendiculaire au plan Oxy et contenant

la droite $d : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$.

- 10) Déterminer la droite d passant par le point $A(2; 3; 5)$ et coupant perpendiculairement la droite (BC) avec $B(1; 1; 1)$ et $C(2; 0; 3)$.
- 11) On donne les points $A(2; -1; 4)$ et $B(1; 3; 2)$.
Etablir l'équation du plan perpendiculaire au segment $[AB]$ et passant par le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer une propriété caractéristique des points M de ce plan.
- 12) On donne le plan $p : 2x + y - z + 4 = 0$ et les points $A(-8; 5; -4)$, $B(3; 2; 4)$ et $C(-2; 1; 0)$.
- Déterminer le symétrique du point A par rapport au point B .
 - Déterminer le symétrique du point A par rapport au plan p .
 - Déterminer le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) .

16.5 Solutions des exercices

$$1) \text{ a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \qquad \text{b) } \vec{u} \cdot \vec{u} = 14 \qquad \text{c) } \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 10$$

$$\text{b) a) } \|\vec{u}\| = \sqrt{14} \qquad \text{b) } \|\vec{v}\| = \sqrt{5} \qquad \text{c) } \|-2\vec{u}\| = 2 \cdot \sqrt{14}$$

$$\text{d) } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{11}$$

$$2) \text{ a) } \pm \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \pm \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3) \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ par exemple}$$

$$4) a = 4, b = -5$$

$$5) g : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \text{ par exemple}$$

$$6) d : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 3 - 2k \\ z = 5 + k \end{cases}$$

$$7) p : 2x - 3y + 3z - 6 = 0$$

$$8) p : x - z = 0$$

$$9) p : x + 2y - 3 = 0$$

$$10) d : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 - 19k \\ z = 5 - 10k \end{cases}$$

$$11) p : -2x + 8y - 4z + 7 = 0$$

Tous les points M du plan p sont équidistants de A et B .

$$12) \text{ a) } A'(14; -1; 12)$$

$$\text{b) } A''(-6; 6; -5)$$

$$\text{c) } A'''(-6; -5; -4)$$

Chapitre 17

Distances

17.1 Distance de deux points

Définition 17.1

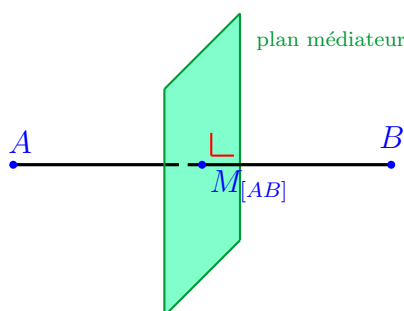
On appelle **distance** de deux points A et B la norme du vecteur \overrightarrow{AB} . La distance de A à B se note $\delta(A; B)$.

$$\delta(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Equidistance

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B est un plan appelé **plan médiateur** de $[AB]$

La plan médiateur de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et admet comme vecteur normal le vecteur \overrightarrow{AB} .



Exemple

Nous allons établir l'équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(-2; -1; 4)$ et $B(-1; 3; -2)$

1. Un vecteur normal du plan médiateur m est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne partielle de m est $x + 4y - 6z + d = 0$.

2. Comme m passe par le point milieu de $[AB]$, $M_{[AB]} = (-\frac{3}{2}; 1; 1)$, on peut déterminer d en résolvant l'équation :

$$-\frac{3}{2} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{7}{2}$$

L'équation cartésienne de m est : $x + 4y - 6z + \frac{7}{2} = 0$

17.2 Distance d'un point à un plan

Définition 17.2

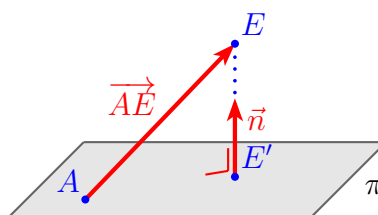
La distance $\delta(E; \pi)$ d'un point E à un plan π est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur π .

Formule vectorielle

Soit π le plan passant par un point A et de vecteur normal \vec{n} .

La distance du point E au plan π est :

$$\delta(E; \pi) = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Formule analytique

Soit π le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

La distance de point $E(x_0; y_0; z_0)$ au plan π est :

$$\delta(E; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

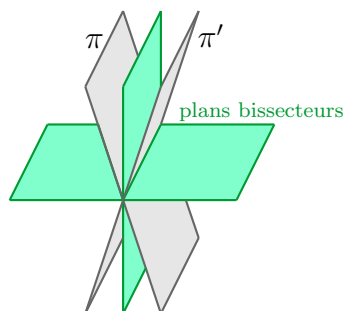
Equidistance

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux plans sécants π et π' est constitué de deux plans appelés **plans bissecteurs** de π et π' .

Les plans sécants d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ont pour plans bissecteurs les deux plans d'équations

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

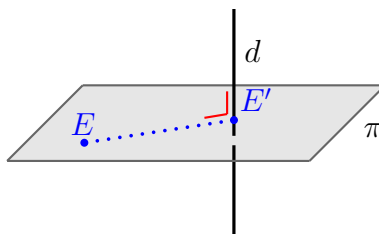
Ces deux plans sont perpendiculaires.



17.3 Distance d'un point à une droite

Définition 17.3

La distance d'un point E à une droite d est la distance du point E à sa projection orthogonale E' sur la droite d .



Formule

Dans le chapitre "Produit vectoriel", nous établirons une formule donnant la distance d'un point à une droite.

Equidistance

L'ensemble des points de l'espace dont la distance à une droite fixe d est une constante r est le **cylindre** de révolution d'axe d et de rayon r .

17.4 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

- 1) Calculer la distance des deux points $A(1; -5; 4, 3)$ et $B(0, 4; 1; -9, 1)$.
- 2) Etablir l'équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(2; -1; 4)$ et $B(1; 3; 2)$.
- 3) On donne la droite d passant par les points $A(2; 3; 5)$ et $B(1; 2; 8)$.
Déterminer le point de la droite d situé à égale distance de $C(5; 4; 8)$ et $D(9; -2; 6)$.
- 4) Calculer la distance du point $E(15; -2; 5)$ au plan p d'équation $3x - 2y + z = 12$.
- 5) Soit le tétraèdre de sommets $A(2; 4; 6)$, $B(-4; -4; 4)$, $C(5; 0; 3)$ et $D(-1; 7; 5)$.
Calculer la longueur de la hauteur, issue de A , de ce tétraèdre.
- 6) Vérifier que les deux plans d'équations $3x + 12y - 4z - 18 = 0$ et $3x + 12y - 4z + 73 = 0$ sont parallèles et calculer leur distance.
- 7) Déterminer les équations cartésiennes des plans situés à la distance 6 du plan p d'équation $9x + 2y - 6z - 8 = 0$.
- 8) On donne les plans $p : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $q : 2x - y + 2z + 1 = 0$.
Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs de p et q .
- 9) Déterminer les coordonnées des points situés sur la droite $d : \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 13 + 7k \\ z = 7 + 5k \end{cases}$ et équidistants des plans $p : 6x - y - 2z + 3 = 0$ et $q : 3x + 4y - 4z - 9 = 0$.
- 10) Soient les points $A(1, 5; 3)$, $B(5; 3; 7)$ et $C(9; 1; 2)$.
Déterminer les équations paramétriques de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .
- 11) Calculer la distance du point $E(5; -2; 1)$ à la droite $d : \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 8 + 6k \\ z = 16 + 2k \end{cases}$

17.5 Solutions des exercices

1) $\delta(A, B) \cong 14, 7$

2) $p : -2x + 8y - 4z + 7 = 0$

3) $M(9; 10; -16)$

4) $\delta(E; p) = 3\sqrt{14}$

5) $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

6) $\delta = 7$

7) $p_1 : 9x + 2y - 6z - 74 = 0$ et $p_2 : 9x + 2y - 6z + 58 = 0$

8) $p_1 : -x + 3y - 4z - 2 = 0$ et $p_2 : 3x + y = 0$

9) $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$ et $(-1; -1; -3)$

10) $b : \begin{cases} x = 1 + 14k \\ y = 5 - 7k \\ z = 3 + 5k \end{cases}$

11) $\delta(E; d) = 15$

Chapitre 18

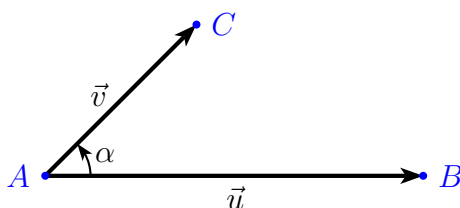
Angles

18.1 Angle de deux vecteurs

Définition 18.1

Soient A , B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

L'**angle** α entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est égal à l'angle \widehat{BAC} .



Formule

On peut déterminer l'angle α en se basant sur l'expression trigonométrique du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

18.2 Angle de deux droites

Définition 18.2

On appelle **angle de deux droites** d et g (gauches ou coplanaires) tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs directeurs \vec{d} et \vec{g} .

Formule

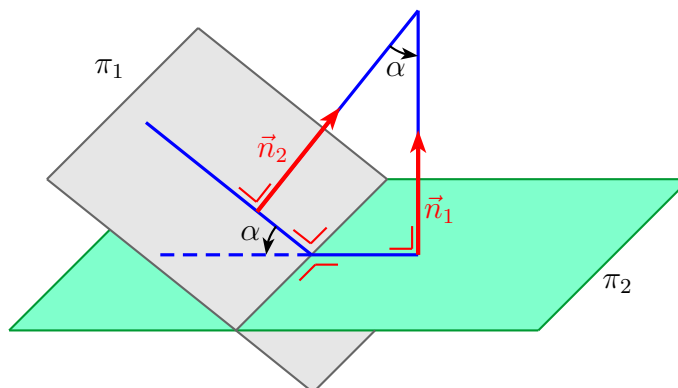
L'angle aigu α de deux droites d et g est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{g}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{g}\|}$$

18.3 Angle de deux plans

Définition 18.3

On appelle **angle de deux plans** π_1 et π_2 tout angle formé par deux quelconques de leurs vecteurs normaux \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .



Formule

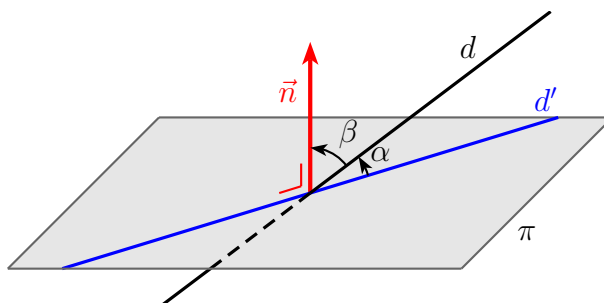
L'angle aigu α de deux plans π_1 et π_2 est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

18.4 Angle d'une droite et d'un plan sécants

Définition 18.4

On appelle **angle** (aigu ou obtus) d'une droite d et d'un plan π sécants l'angle que forme d avec sa projection orthogonale d' sur π .



Méthode de calcul

1. Calculer l'angle *aigu* β formé par un vecteur directeur de la droite d avec un vecteur normal du plan p .
2. L'angle *aigu* α formé par d et π vaut : $\alpha = 90^\circ - \beta$.

18.5 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

1) On donne les deux droites $d : \begin{cases} x = -30 + k \\ y = 8 + 3k \\ z = 16 + k \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 0 - k \\ z = -4 + k \end{cases}$.

- Vérifier que ces deux droites sont sécantes.
- Calculer l'angle aigu d'intersection de ces deux droites.

2) Soit le triangle de sommets $A(4; 1; 7)$, $B(2; 4; 3)$ et $C(3; 9; 5)$.

Calculer les trois angles de ce triangle.

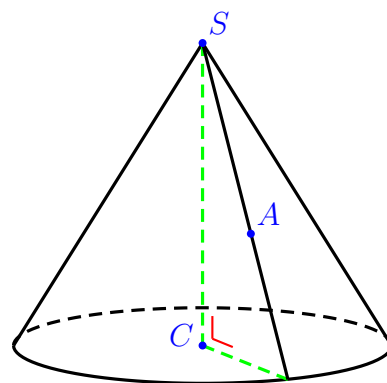
3) Calculer l'angle aigu formé par les plans $p : x + 2y - 2z = 0$ et $q : 2x - 3y + 4z = 8$.

4) Soient la droite d passant par $A(1; 2; 3)$ et $B(2; 1; 5)$ et le plan $p : 3x + 2y - 5z = 0$.

Calculer l'angle formé par la droite d et le plan p .

5) Soit le cône de révolution donné par son sommet $S(9; 1; -1)$, par le point $A(4; 3; 2)$ et par l'équation du plan contenant le cercle de base, $p : 2x + y - 2z + 6 = 0$.

- Calculer les coordonnées du centre C du cercle de base.
- Calculer la hauteur du cône.
- Calculer le demi-angle d'ouverture du cône.
- Calculer les coordonnées d'un autre point du cône.
- Calculer les coordonnées de deux points du cercle de base du cône.
- Calculer le rayon du cercle de base.



6) Déterminer les équations cartésiennes des plans passant par les points $A(4; 2; 1)$ et $B(2; 1; -1)$ et qui forment un angle de 45° avec le plan d'équation $x - 4y + z - 8 = 0$.

18.6 Solutions des exercices

1) $\alpha \cong 63^\circ$

2) $\alpha \cong 40,5^\circ, \quad \beta \cong 99,8^\circ, \quad \gamma \cong 39,7^\circ$

3) $\alpha \cong 42,0^\circ$

4) $\alpha \cong 36,6^\circ$

5) a) $C(3; -2; 5)$

b) $h = 9$

c) $\alpha \cong 40,8^\circ$

d) $B(\frac{13}{2}; 2; \frac{1}{2})$ par exemple

e) $D(-\frac{9}{14}; \frac{68}{14}; \frac{67}{14})$ et $E(\frac{93}{14}; -\frac{124}{14}; \frac{73}{14})$

f) $r \cong 7,76$

6) $2x - 2y - z - 3 = 0, \quad x + 2y - 2z - 6 = 0$

Chapitre 19

Produit vectoriel

19.1 Définitions et propriétés

Dans le chapitre 16, nous avons défini le produit scalaire de deux vecteurs dont le résultat est un nombre réel.

Dans ce chapitre, nous allons définir le produit vectoriel de deux vecteurs dont le résultat est un vecteur.

Définition 19.1

Soit deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} formant un angle φ .

Par définition, le **produit vectoriel** de \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (lire \vec{u} "cross" \vec{v}) tel que :

1. la **direction** de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale aux directions des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ;

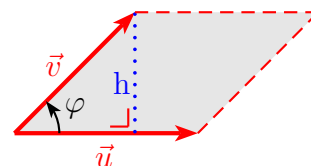
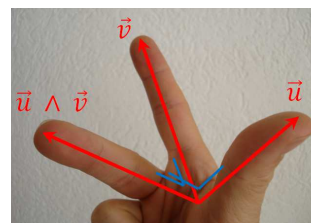
2. le **sens** de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne au triplet $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ une *orientation directe* :

cette orientation est donnée par la "règle du tire-bouchon" ou par la "règle des trois doigts de la main droite" (pouce, index, majeur), illustrée ci-contre ;

3. la **norme** est égale à l'aire du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\varphi)|$$

(base : $\|\vec{u}\|$, hauteur : $h = \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\varphi)|$).



Remarques

1. On utilise aussi la notation $\vec{u} \times \vec{v}$ au lieu de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Par convention, la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite **directe** si le vecteur \vec{k} s'obtient à partir des vecteurs \vec{i} et \vec{j} , pris dans cet ordre, à l'aide de la règle des trois doigts de la main droite. On dit aussi que cette base est **orientée positivement**.

Dans le cas contraire, on dit que la base orthonormée est rétrograde ou orientée négativement.

3. Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases comme orthonormées et directes.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et le nombre réel λ , on a :

1. Anticommutativité :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

2. Bilinearité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

3. Produit par un nombre réel :

$$(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

4. Identité de Lagrange :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

5. Colinéarité :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

19.1.1 Expression analytique du produit vectoriel

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 19.1

Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour le calcul de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut utiliser (par abus de notation) le pseudo-déterminant suivant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe. On peut calculer leur produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 - 20 \\ -10 - 3 \\ 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou en utilisant le pseudo-déterminant

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & -2 \\ \vec{j} & -3 & 4 \\ \vec{k} & 5 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 4\vec{k} - 10\vec{j} - 6\vec{k} - 20\vec{i} - 3\vec{j} = -29\vec{i} - 13\vec{j} - 2\vec{k}$$

19.2 Applications du produit vectoriel

19.2.1 Détermination du vecteur normal à un plan

Soit trois points distincts A , B et C non alignés et le plan (ABC) .

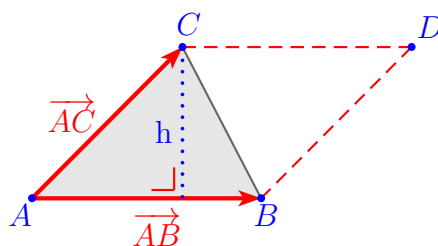
Un vecteur normal au plan (ABC) est :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

19.2.2 Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle (ABC) vaut la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

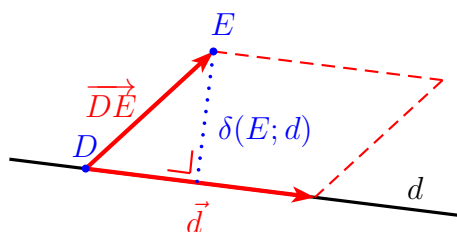
$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$



19.2.3 Distance d'un point à une droite

La distance d'un point E à une droite $d(D; \vec{d})$ est donnée par :

$$\delta(E; d) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$



Démonstration. Par définition du produit vectoriel, l'aire du parallélogramme sur \overrightarrow{DE} et \vec{d} vaut $\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|$. Or, cette aire est également donnée par le produit entre la base, $\|\vec{d}\|$, et la hauteur, $\delta(E; d)$.

$$S = \|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\| = \|\vec{d}\| \cdot \delta(E; d) \quad \Rightarrow \quad \delta(E; d) = \frac{\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

□

19.2.4 Perpendiculaire commune à deux droites gauches

Soit deux droites gauches $d(D; \vec{d})$ et $g(G; \vec{g})$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{d} \wedge \vec{g}$.

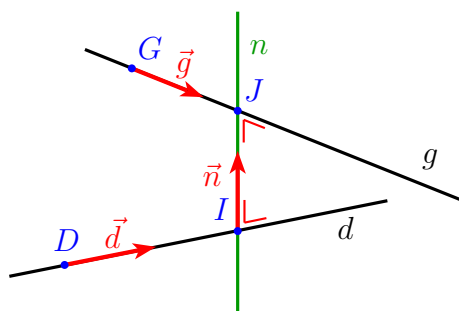
La perpendiculaire commune n aux deux droites d et g est contenue dans le plan $p(D; \vec{d}; \vec{n})$, passe par le point d'intersection de la droite g et du plan p et a pour vecteur directeur \vec{n} .

19.2.5 Distance de deux droites gauches

Définition 19.2

Soit deux droites gauches $d(D; \vec{d})$ et $g(G; \vec{g})$.

La distance $\delta(d; g)$ est la distance de I à J , où I et J sont les points d'intersection de la perpendiculaire commune n à d et g .



Propriété

La distance entre les deux droites gauches d et g est donnée par :

$$\delta(d; g) = \frac{|\overrightarrow{DG} \cdot (\vec{d} \wedge \vec{g})|}{\|\vec{d} \wedge \vec{g}\|}$$

Remarques

1. Nous démontrerons cette formule de $\delta(d; g)$ en exercice.
2. Le numérateur de la formule $\delta(d; g)$ comprend un produit scalaire et un produit vectoriel : le résultat de cette double opération est appelé **produit mixte**.

19.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Calculer et comparer :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (2 \cdot \vec{v})$, $(2 \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v}$ et $2 \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$ et $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$

2) Est-ce que $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}$ implique $\vec{b} = \vec{c}$?

3) Démontrer le formule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$ (identité de Lagrange).

4) Calculer $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ lorsque $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 5$ et l'angle formé par \vec{a} et \vec{b} vaut $\frac{\pi}{6}$.

5) Soit le plan (ABC) avec $A(-6; 3; -2)$, $B(5; 2; 1)$ et $C(2; 5; 2)$.

Ecrire les équations paramétriques de la droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (ABC) .

6) On donne les plans $p : 3x - 2y + 5z = 3$ et $q : x - y - z = -2$.

Trouver une équation cartésienne du plan r passant par l'origine et perpendiculaire aux deux plans p et q .

7) On donne les points $A(2; 1; -2)$, $B(2; 3; 0)$, $C(6; 6; 5)$ et $D(6; 4; 3)$.

Vérifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire.

8) Calculer l'aire du triangle de sommets $A(1; 4; -3)$, $B(1; 6; -1)$ et $C(5; 9; 2)$.

9) Soit la droite $d : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = -1 + k \end{cases}$.

Calculer la distance du point $A(-5; 4; -2)$ à la droite d .

10) Soient les points $A(2; 1; 3)$, $B(1; 2; 1)$, $C(-1; -2; -2)$ et $D(1; -4; 0)$.

- Vérifier que les deux droites (AB) et (CD) sont gauches.
- Déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites.
- Calculer la distance entre ces deux droites.

19.4 Solutions des exercices

$$1) \text{ a) } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{u} \wedge (2\vec{v}) = (2\vec{u}) \wedge \vec{v} = 2(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} -56 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -98$$

2) Non

$$4) \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = 15$$

$$5) d : \begin{cases} x = 5 + k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 - 3k \end{cases}$$

$$6) r : 7x + 8y - z = 0$$

$$7) A = 12$$

$$8) A = 5, 65$$

$$9) \delta(A; d) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$10) \text{ b) Perpendiculaire commune : } \begin{cases} x = -6 + k \\ y = 3 + k \\ z = -7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \delta((AB); (CD)) = 3\sqrt{2}$$

Chapitre 20

Produit mixte

20.1 Définitions et propriétés

Définition 20.1

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , pris dans cet ordre, le **nombre réel** noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ et défini par la formule :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{u}' , \vec{v} , \vec{w} et le nombre réel λ , on a :

1. Le produit mixte est invariant dans une permutation circulaire de ses vecteurs :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$$

2. Le produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

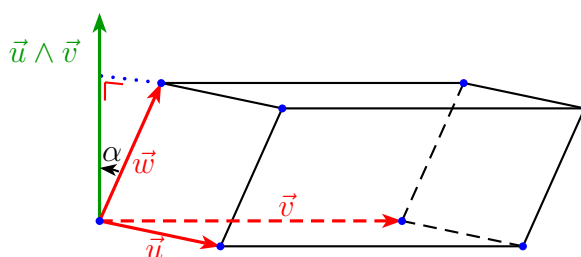
3. Produit par un nombre réel et somme :

$$\begin{aligned} [\lambda \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \lambda \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

4. Pseudo - associativité :

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$$

5. Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .



Démonstration. On considère le parallélépipède construit sur les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} représenté ci-dessus. On a :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \underbrace{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}_{\text{hauteur}} = \text{volume para.}$$

□

20.1.1 Expression analytique du produit mixte

On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ donnés en composantes dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proposition 20.1

Le produit mixte des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} est le nombre :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Démonstration. Soient les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} dans la base \mathcal{B} . On a :

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \\ &= u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

Exemple

Le produit mixte des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est égal à :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 0 - 24 - 3 - 0 = -11$$

20.2 Applications du produit mixte

20.2.1 Indépendance linéaire

Le produit mixte permet de déterminer si trois vecteurs (ou quatre points) sont coplanaires :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont coplanaires}$$

20.2.2 Equation cartésienne d'un plan

Soient trois points distincts A , B et C non alignés et le plan (ABC) .

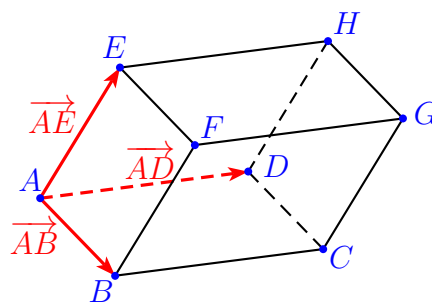
Le produit mixte permet de déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC) en posant :

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$

20.2.3 Volume d'un parallélépipède

Le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$ est donné par :

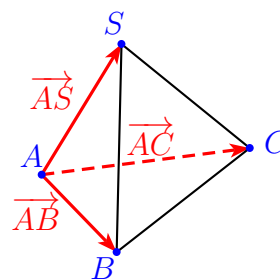
$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]|$$



20.2.4 Volume d'un tétraèdre

Le volume du tétraèdre $SABC$ est donné par :

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}]|$$



20.2.5 Distance de deux droites gauches

Soient deux droites gauches $d(D; \vec{d})$ et $g(G; \vec{g})$.

La distance entre les deux droites gauches d et g est donnée par :

$$\delta(d; g) = \frac{|[\overrightarrow{DG}, \vec{d}, \vec{g}]|}{\|\vec{d} \wedge \vec{g}\|}$$

20.3 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

1) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits mixtes suivants : $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$.

2) Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur \vec{c} tel que $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Constatation.

3) Soient \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} trois vecteurs orthogonaux deux à deux, tels que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ et $\|\vec{c}\| = 5$.

Calculer le produit mixte $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

4) On donne les points $A(7; 1; -3)$, $B(8; 2; -2)$, $C(4; 4; 4)$ et $D(10; 1; -5)$.

Ces quatre points sont-ils coplanaires ?

5) Soient les points $A(-1; -1; 7)$, $B(-2; 1; 6)$, $C(0; 1; 6)$, $D(1; -1; 7)$, $E(2; -2; 3)$, $F(1; 0; 2)$, $G(3; 0; 2)$ et $H(4; -2; 3)$.

Vérifier que le polyèdre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume.

6) Soient les points $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ et $S(4; 1; 3)$.

Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.

20.4 Solutions des exercices

1) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 70$, $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -70$, $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = 70$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = 0$

2) Les vecteurs \vec{c} , \vec{a} et \vec{b} sont linéairement dépendants. Par exemple $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 30$

4) Oui

5) $V = 18$

6) $V = 3$

Chapitre 21

La sphère

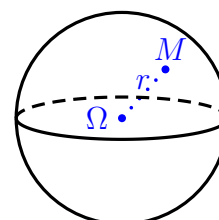
21.1 Définition

Définition 21.1

On appelle **sphère** Σ de **centre** Ω et de **rayon** r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance r du centre Ω .

On a donc :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \delta(\Omega; M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r$$



On note cette sphère : $\Sigma(\Omega; r)$.

21.2 Equation cartésienne d'une sphère

Soit la sphère Σ de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r .

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère Σ si et seulement si $\delta(\Omega; M) = r$. On a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r &\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\| = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2} \end{aligned}$$

Cette dernière relation est appelée **équation cartésienne** (canonique) de la sphère Σ .

En développant la formule ci-dessus, on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$$

avec $a \neq 0$, appelée **équation générale** d'une sphère.

Exemple

Soit la sphère Σ donnée par l'équation générale : $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y + 6z + 22 = 0$.
Nous allons déterminer le centre Ω et le rayon r de cette sphère.

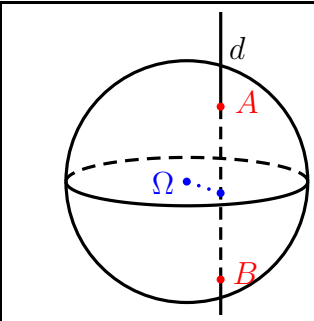
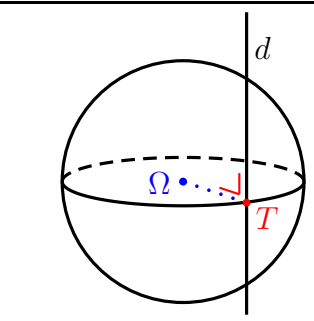
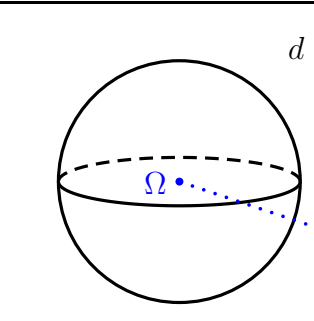
L'idée est de transformer l'équation générale en l'équation cartésienne canonique pour pouvoir lire directement Ω et r . On commence par regrouper les termes en x , y et z , puis on "complète les carrés".

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2 - 10x}_{(x-5)^2-25} + \underbrace{y^2 + 4y}_{(y+2)^2-4} + \underbrace{z^2 + 6z}_{(z+3)^2-9} + 22 &= 0 \\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 &= 25 + 4 + 9 - 22 \\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

La sphère Σ a pour centre $\Omega(5; -2; 3)$ et pour rayon $r = \sqrt{16} = 4$.

21.3 Positions relatives d'une droite et d'une sphère

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'une droite d et d'une sphère $\Sigma(\Omega; r)$.

		
$\delta(\Omega; d) < r$	$\delta(\Omega; d) = r$	$\delta(\Omega; d) > r$
Deux points A et B d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Définition 21.2

Une **droite tangente** à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ est une droite située à la distance r de Ω .

Calcul de l'intersection d'une droite et d'une sphère

On donne ici une méthode pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'une sphère Σ .

Substituer les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne de la sphère Σ .

On obtient alors une équation de degré 2 à une inconnue (le paramètre), qu'on résout.

- Si cette équation admet deux solutions, alors l'intersection est constituée de deux points A et B . On obtient ces points en injectant les valeurs obtenues du paramètre dans les équations de la droite d .
- Si cette équation admet une seule solution, alors l'intersection est un point T . d est tangente à la sphère Σ en T .
- Si cette équation n'a pas de solution, alors l'intersection est vide.

Exemple

Soit la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + z - 3 = 0$ et la droite $d :$

$$\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = -3 + 2k \\ z = -4 + k \end{cases} .$$

Nous allons déterminer leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

On substitue tout d'abord les équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne de la sphère Σ :

$$(6 - 2k)^2 + (-3 + 2k)^2 + (-4 + k)^2 - (6 - 2k) - 2(-3 + 2k) + (-4 + k) - 3 = 0$$

On résout l'équation obtenue :

$$9k^2 - 45k + 54 = 0 \rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow (k - 2)(k - 3) = 0 \rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3$$

La droite d et la sphère Σ s'intersectent en deux points A et B . Pour les obtenir, on injecte les valeurs de k dans les équations paramétriques de la droite :

$$k = 2 \Rightarrow A : \begin{cases} x = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \\ y = -3 + 2 \cdot 2 = 1 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow A(2; 1; -2)$$

$$k = 3 \Rightarrow B : \begin{cases} x = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \\ y = -3 + 2 \cdot 3 = 3 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow B(0; 3; -1)$$

21.4 Positions relatives d'un plan et d'une sphère

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles d'un plan p et d'une sphère $\Sigma(\Omega; r)$.

$\delta(\Omega; p) < r$	$\delta(\Omega; p) = r$	$\delta(\Omega; p) > r$
Un cercle c d'intersection	Un unique point T d'intersection	Aucun point d'intersection

Remarque

Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On définit un cercle de l'espace en donnant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Définition 21.3

Un **plan tangent** à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ est un plan situé à la distance r de Ω .

Propriété

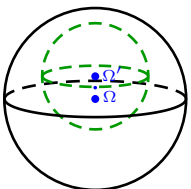
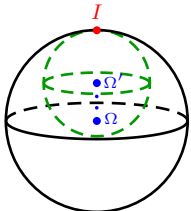
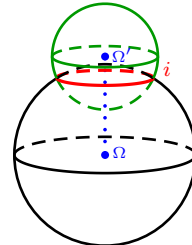
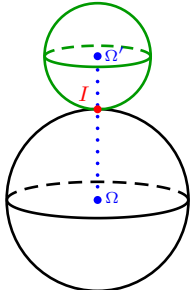
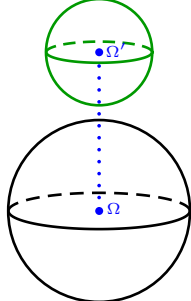
Le plan tangent à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ au point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega T}$.

Remarque

Le plan tangent en un point T à la sphère $\Sigma(\Omega; r)$ contient toutes les droites tangentes en T à cette sphère.

21.5 Position relatives de deux sphères

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux sphères $\Sigma(\Omega; R)$ et $\Sigma'(\Omega', r)$ avec $R > r$.

				
$\delta(\Omega; \Omega') < R - r$	$\delta(\Omega; \Omega') = R - r$	$\begin{cases} \delta(\Omega; \Omega') > R - r \\ \delta(\Omega; \Omega') < R + r \end{cases}$	$\delta(\Omega; \Omega') = R + r$	$\delta(\Omega; \Omega') > R + r$
$\cap : \emptyset$	$\cap : \text{un point } I$	$\cap : \text{un cercle } i$	$\cap : \text{un point } I$	$\cap : \emptyset$

21.6 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère orthonormé direct $(O; I; J; K)$ de ε et les composantes des vecteurs relatives à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ de \mathbf{V}_3 associée.

- 1) Ecrire l'équation cartésienne de
 - a) la sphère de centre $O(0; 0; 0)$ et passant par le point $A(3; 2; -1)$.
 - b) la sphère de centre $C(1; -2; 4)$ et passant par le point $A(3; 2; -1)$.

- 2) Ecrire l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 0; 5)$ et $B(7; 4; -7)$.

- 3) Les équation suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, déterminer le centre et le rayon.
 - a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$
 - c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$

- 4) Ecrire l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4; 2; -3)$, $B(-1; 3; 1)$ et ayant son centre sur la droite (CD) avec $C(2; 3; 7)$ et $D(1; 5; 9)$.

- 5) Ecrire l'équation de la sphère passant par les quatre points $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; 0)$, $C(-5; 12; 3)$ et $D(-3; -2; -1)$.

- 6) Soient la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ et la droite $d : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 6 - 2k \\ z = -4 + k \end{cases}$.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d .

- 7) Soient la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z - 9 = 0$ et la droite $d : \begin{cases} x = -2 - k \\ y = 4 + k \\ z = 4 + k \end{cases}$.
Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d .

- 8) Soient la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0$ et le point $A(-2; 2; 3)$.
 - a) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ .
 - b) Ecrire les équations paramétriques d'une droite d tangente en A à la sphère Σ .
 - c) Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère Σ au point A .
 - d) Ecrire les équations paramétriques de la droite g tangente en A à la sphère Σ et coupant l'axe des z .

- 9) Soient la sphère $\Sigma : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 289$ et le point $A(14; 4; -6)$.
 - a) Vérifier que le point A appartient à la sphère Σ .

- b) Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent à la sphère Σ au point A .
- 10) Ecrire l'équation de la sphère Σ de centre $\Omega(4; 1; -5)$ et tangente au plan p d'équation cartésienne $p : x + 2y + 2z = 4$.
- 11) Soient la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y = 159$ et le plan $p : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$. Déterminer les équations des plans parallèles au plan p et tangents à la sphère Σ .
- 12) On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et les deux points $A(3; 0; 6)$ et $B(3; 5; 1)$. Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ et contenant la droite (AB) .
- 13) Soit la sphère Σ de centre $\Omega(2; -3; 7)$ et passant par le point $A(5; 1; -5)$. Déterminer la droite t tangente à la sphère Σ en A et perpendiculaire à la droite (OA) , O étant l'origine.
- 14) Soient la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ et le plan $p : 2x - 2y - z + 9 = 0$.
- a) Prouver que le plan coupe la sphère Σ .
- b) L'intersection de p et Σ est un cercle c ; déterminer son centre et son rayon.
- 15) Soient les sphères $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 81$ et $\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$. Montrer que les deux sphères Σ et Σ' sont tangentes.
- 16) On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 2z - 57 = 0$ et la sphère $\Sigma' : x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 10y - 8z - 27 = 0$. Prouver que ces deux sphères se coupent, puis déterminer leur intersection.

21.7 Solutions des exercices

1) a) $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 14$

b) $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 24 = 0$

2) $\Sigma : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 56$

3) 1) Centre : $(-3; 5; 2)$, rayon : 4

2) Pas une sphère.

3) Centre : $(\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2})$, rayon : $\sqrt{48}$

4) $\Sigma : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 45$

5) $\Sigma : (x + 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 65$

6) $I_1(1; 2; -2)$ et $I_2(3; 0; -1)$

7) $I_1(1; 1; 1)$ et $I_2(3; -1; -1)$

8) b) $d : \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 3 \end{cases}$ par exemple.

c) $t : x - 2y + 2z = 0$

d) $g : \begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 2 + 2k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$

9) b) $t : 12x + 8y - 9z - 254 = 0$

10) $\Sigma : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = \frac{64}{9}$

11) $t_1 : 12x + 4y + 3z - 209 = 0$ et $t_2 : 12x + 4y + 3z + 129 = 0$

12) $t_1 : x - 2y - 2z + 9 = 0$ et $t_2 : x - 3 = 0$

13) $t : \begin{cases} x = 5 + 7k \\ y = 1 - 45k \\ z = -5 - 17k \end{cases}$

14) Centre : $(-1; 2; 3)$, rayon : 8

16) Cercle de centre $(3; 1; 2)$, de rayon $\sqrt{61}$ et contenu dans le plan $2x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Index

A

abscisse, 156
aire
 parallélogramme, 196
 triangle, 198
angle, 109, 192
 courbes, 41
 droite-plan, 193
 droites, 109, 192
 plans, 193
anticommutativité, 197
astroïde, 73
asymptote
 horizontale, 13, 63, 74, 78
 oblique, 13, 63, 74, 78
 verticale, 12, 63, 73, 78

B

base, 151
 associée, 156
 directe, 196
 orthonormée, 102, 181
bilinéarité, 99, 178, 197
bipoint, 149
 extrémité, 149
 origine, 149
bissectrice, 112

C

centre
 de gravité, 158
cercle, 71, 117
 centre, 117
 équation cartésienne, 117
 équation générale, 117
 intersection, 118, 120
 position relative, 118, 120
 rayon, 117
combinaison linéaire, 150
commutativité, 99, 178
composante scalaire, 151
conique, 125, 138

 directrice, 138
 excentricité, 138
 foyer, 138
continuité, 3
contrainte, 90, 93
coordonnée, 156
coplanaire, 168
cote, 156
courbe, 70
 équation paramétrique, 70
courbe de Lissajous, 73
cycloïde, 73
cylindre, 189

D

demi-plan, 87
dérivée, 21, 63, 75, 78
 d'ordre n , 25
 fonction réciproque, 32
 implicite, 33
 règles, 25, 27, 29
 seconde, 25, 63
dériver, 25
disque, 118
distance
 droite-droite, 199, 204
 point-droite, 111, 189, 198
 point-plan, 188
 point-point, 110, 187
domaine de définition, 62, 70, 78
domaine du plan, 87
droite, 71, 103, 161
 équation cartésienne résolue, 39
 équations paramétriques, 162
 frontière, 89
 gauche, 163
 intersection, 118, 163, 171, 208
 normale, 180
 orthogonale, 180
 parallèle, 163, 171
 pente, 104
 perpendiculaire, 101, 180, 199

position relative, 118, 163, 171, 208
 sécante, 163, 171
 tangente, 118, 208
 trace, 164

E

ellipse, 72, 126
 axe focal, 126
 centre, 126
 équation cartésienne, 127, 128
 foyer, 126
 sommet, 126
 équipollent, 149
 espace
 affine, 156
 vectoriel, 150
 étude de fonctions, 62

F

flèche, 149
 folium de Descartes, 73
 fonction
 composée, 6
 concave, 53, 63
 constante, 47
 continue, 3, 4, 22, 62
 convexe, 53, 63
 croissante, 47, 63, 75, 76, 78
 décroissante, 47, 63, 75, 76, 78
 dérivable, 21–23
 dérivée, 23
 discontinue, 3
 impaire, 62
 objectif, 90, 93
 paire, 62
 paramétrée, 70
 périodique, 62
 zéro, 62

H

hyperbole, 72, 130
 axe focal, 130
 centre, 130
 équation cartésienne, 131, 132, 136
 foyer, 130
 sommet, 130

I

inéquation
 linéaire, 87

M

maximum, 49, 91, 93
 médiatrice, 110
 milieu d'un segment, 158
 minimum, 49, 93

N

nombre
 dérivé, 21
 dérivé à droite, 22
 dérivé à gauche, 22

O

ordonnée, 156
 origine, 156

P

parabole, 134
 axe, 134
 directrice, 134
 équation cartésienne, 136
 foyer, 134
 sommet, 134
 paramètre, 70
 plan, 168
 bissecteur, 188
 de référence, 157
 équation cartésienne, 170, 204
 équations paramétriques, 169
 intersection, 171, 209
 médiateur, 187
 parallèle, 171, 172
 perpendiculaire, 180, 181
 position relative, 171, 172, 209
 sécant, 171, 172
 tangent, 209
 trace, 173
 point
 anguleux, 23
 critique, 50, 63, 78
 d'ancrage, 161, 168
 d'inflexion, 54, 63
 de rebroussement, 23
 singulier, 76
 test, 88, 89
 produit
 mixte, 199, 202, 203
 scalaire, 99, 100, 102, 109, 178, 179, 182
 vectoriel, 196, 197
 programmation linéaire, 89

- propriétés
 fonction continue, 5
 produit mixte, 202
 produit scalaire, 99, 178
 produit vectoriel, 197
- R**
- règle
 de l'Hospital, 45
- relation
 d'équivalence, 149
- repère, 156
 orthonormée, 102, 182
- représentation graphique, 63, 78
- S**
- saut, 4
- solution
 optimale, 93
- sphère, 207
 centre, 207
 équation cartésienne, 207
 équation générale, 207
 intersection, 208–210
 position relative, 208–210
 rayon, 207
- T**
- tangente, 20, 21, 39, 40
 horizontale, 76
 pente, 21, 76
 verticale, 23, 76
- taux
 de variation, 21
 instantané de variation, 21
- test
 de la dérivée première, 51
 du déterminant, 152
- théorème
 de Bolzano, 7
 de Bolzano-Weierstrass, 8
 de Cauchy, 44
 de Fermat, 50
 de la valeur intermédiaire, 8
 de Rolle, 42
 des accroissements finis, 43
- trou, 4
- V**
- variable
 de décision, 90, 93
- vecteur, 149
 coplanaire, 150, 203
 de base, 156
 directeur, 161, 168
 direction, 149, 196
 linéairement dépendant, 150
 linéairement indépendant, 150
 longueur, 100, 179
 normal, 101, 103, 180, 183, 198
 norme, 99, 103, 178, 183, 196
 orthogonal, 179
 produit par un nombre réel, 150
 représentant, 149
 sens, 149, 196
 somme, 150
 unitaire, 101, 179
- vitesse
 instantannée, 20
 moyenne, 19
- volume
 parallélépipède, 202, 204
 tétraèdre, 204