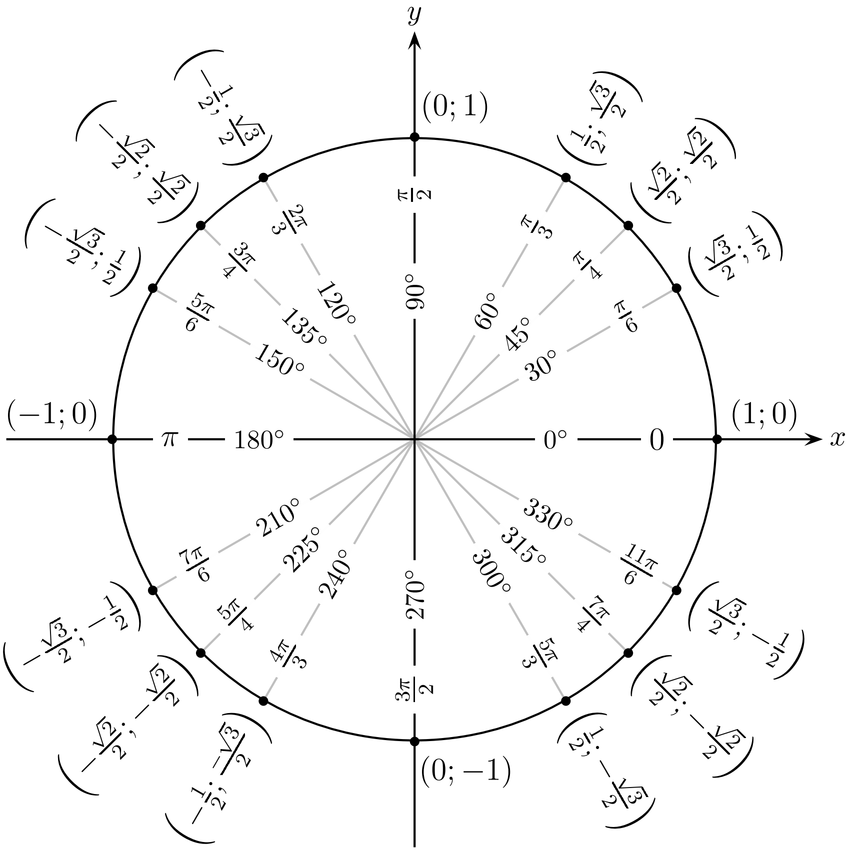
Porrentruy

Cours de mathématiques



Discipline fondamentale

1 ère année

Cours MAP

Damien Dobler

Juillet 2017

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Notions fondamentales

1.1 Ensembles et sous-ensembles

Définition 1.1
Une collection d'objets est un **ensemble** lorsqu'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection. Ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.

N'importe quel objet (mathématique ou non) peut être considéré comme un élément d'un ensemble (y compris un ensemble !).

Notation

1. On représente généralement un ensemble par une lettre latine majuscule : E.
2. Les éléments d'un ensemble sont notés entre accolades et séparés par des points-virgules.
3. Si l'élément x **appartient** à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.
4. Si l'élément x **n'appartient pas** à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

Exemples

– *L'ensemble des nombre de 0 à 6 y compris :* $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Ici, on a :

$$0 \in E, \qquad 4 \in E, \qquad 10 \notin E.$$

– *L'ensemble des élèves d'une classe :* $F = \{\text{Aline}; \text{Bernard}; \ldots\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières différentes :

1. en énumérant ses éléments, $G = \{5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$.

2. en donnant une condition d'appartenance. La notation est alors légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\text{"}\underbrace{\text{H est}}_{H=}\ \underbrace{\text{l'ensemble}}_{\{...\}}\text{ des }\underbrace{\text{éléments de }E}_{\substack{n\in E\\ \text{on donne un nom}\\ \text{général aux éléments}\\ \text{de l'ensemble}}}\ \underbrace{\text{tels que}}_{|}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 15}}_{\substack{n^2\geqslant 15\\ \text{on écrit la condition à l'aide d'une formule}\\ \text{grâce au fait qu'on a donné un nom aux éléments}}}\text{"}$$

par

$$H = \{n \in E \mid n^2 \geqslant 15\}$$

Cas particulier

Si un ensemble E ne contient aucun élément, on l'appelle **ensemble vide** et on le note $\{\}$ ou $\varnothing$.

Définition 1.2
Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B.

Exemple

$A = \{1; 2; 3; 4\},\ B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *et* $C = \{3; 4; 5; 6\}$

L'ensemble A est un sous-ensemble de B, mais A n'est pas un sous-ensemble de C.

Définition 1.3
Soit A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. On dit que

1. A est **inclus dans** B si tout élément de A appartient à B. On note $A \subset B$. Dans ce cas, A est un sous-ensemble de B.
2. A **contient** B, lorsque tout élément de B appartient à A. On note $A \supset B$. Dans ce cas, B est un sous-ensemble de A.
3. A est **égal** à B, lorsque tout élément de A appartient à B et que tout élément de B appartient à A. On note $A = B$.

Syntaxe

Nous venons de rencontrer deux signes mathématiques qu'il s'agit de ne pas confondre :

Nom	Terme de gauche	Symbole	Terme de droite
Appartenir à	Elément	$\in$	Ensemble
Etre inclus dans	Ensemble	$\subset$	Ensemble
Etre égal à	Elément	$=$	Elément
Etre égal à	Ensemble	$=$	Ensemble
Contenir	Ensemble	$\ni$	Elément
Contenir	Ensemble	$\supset$	Ensemble

On a l'équivalence suivante lorsque A est un ensemble.

$$\boxed{x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A}$$

Remarques

1. $A \not\subset B$ signifie qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B.
2. Soit un ensemble $E = \{a; b; c\}$.
   $a \in E$ et $\{a\} \subset E$ sont des notations correctes, $a \subset E$ ne l'est pas.

1.2 Les ensembles de nombres

Les mathématiciens ont classé les nombres dans des ensembles, appelés **ensembles de nombres**. Ces derniers sont désignés par des symboles universellement adoptés :

1. $\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 \ldots\}}$: l'ensemble des **nombres naturels**.

   C'est cet ensemble de nombres que nous utilisons la plupart du temps pour compter (des objets, de l'argent, etc.). Historiquement, le zéro n'est pas apparu en même temps que les autres nombres. On le rencontre pour la première fois en Inde. Les Hindous (sanscrit) l'ont désigné par le mot "sunya" qui signifie : vide ou nul. Les Arabes l'ont repris en le transformant quelque peu pour donner "sifr". Le zéro n'a été importé en Europe qu'au début du XIII^{e} siècle par Fibonacci. Les Européens (en latin) ont transformé "sifr" en "zephirum" qui donnera zéro et en "cifra" qui donnera chiffre.

2. $\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \ldots\}}$: l'ensemble des **nombres entiers** (relatifs).

   Ensuite, les nombres négatifs sont apparus et, mis ensemble avec les nombres naturels, ont formé l'ensemble des nombres entiers. Moins utilisés que les nombres naturels dans la vie de tous les jours, on les trouve notamment dans l'expression de la température. Leur présence permet à la soustraction d'exister quels que soient les nombres que l'on soustrait : sans eux, $2 - 3$ n'existerait pas.

3. $\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}}$: l'ensemble des **nombres rationnels** (fractions).

   Tous les nombres pouvant se mettre sous forme de fraction sont des nombres rationnels. On en utilise tous les jours lorsqu'on parle de centimètres, de décilitres, de centièmes de seconde, de moitié, de tiers, etc.

   Exemples

   - *Les nombres entiers ($x = \frac{x}{1}$).*
   - *Les nombres à virgules ayant un développement décimal limité ou périodique ($1.25 = \frac{5}{4}$, $1.\overline{3} = \frac{4}{3}$).*

   En termes mathématiques, p est le **numérateur** (vient du mot numéro ou nombre, car il compte) et q est le **dénominateur** (vient de dénommer, car il correspond à un nom comme demi, tiers, dixième, etc.).

4. $\boxed{\mathbb{R}}$: l'ensemble des **nombres réels**.

   Finalement, il y a des nombres qui ne sont pas des fractions. Ils sont appelés les **nombres irrationnels** (les nombres à virgule ayant un développement décimal illimité non périodique). Ils ont été découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence). Ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle, le périmètre d'un cercle, etc.

   L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

On a les inclusions

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Proposition 1.1
Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre réel irrationnel (il n'est pas un nombre rationnel).

Démonstration. Nous allons effectuer une démonstration par l'absurde. Principe d'un telle démonstration : supposer le contraire de ce que l'on désire démontrer et montrer que cette supposition est impossible (en exhibant une contradiction).

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\Rightarrow$ il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et a, b premiers entre eux (c'est-à-dire $\frac{a}{b}$ irréductible) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

$\Rightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc $a^2 = 2b^2$. On en conclut que a^2 un nombre pair.

$\Rightarrow$ a est pair. En effet, élever au carré conserve la parité :

- si m est pair, $m = 2n$, $m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$, m^2 est pair.
- si m est impair, $m = 2n + 1$, $m^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, m^2 est impair.

$\Rightarrow$ il existe a' tel que $a = 2a'$. On obtient que $a^2 = 4(a')^2 = 2b^2$ et donc que $b^2 = 2(a')^2$.

$\Rightarrow$ b^2 est pair. Par la même réflexion que ci-dessus, il existe b' tel que $b = 2b'$.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2a'}{2b'} = \frac{a'}{b'}$

$\Rightarrow$ La fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. Ceci est en totale contradiction avec notre supposition de départ.

Il découle de cette remarque que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. $\square$

Conventions complémentaires

On introduit encore les conventions d'écriture suivantes :

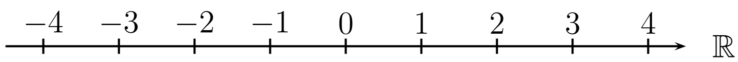
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$

Les combinaisons de ces conventions sont possibles : $\mathbb{R}_+^*, \ldots$

Ces combinaisons s'appliquent par analogie aux autres ensembles de nombres (naturels,...).

1.2.1 La droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la **droite réelle**.



1.2.2 Ecriture décimale

L'**écriture décimale** permet de représenter TOUS les nombres réels d'une façon agréable, mais qui n'est en général PAS EXACTE. Cette écriture permet de placer avec une précision relative n'importe quel nombre réel sur la droite réelle.

Voici quelques nombres écrits sous forme décimale.

$$2 = 2.0 \qquad \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \frac{1}{8} = 0.125 \qquad \frac{2}{3} = 0.\overline{6} \qquad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \qquad \sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous forme de nombres décimaux limités (comme $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{8}$) ou périodiques (comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{13}$), contrairement aux nombres irrationnels dont le développement décimal est TOUJOURS infini et non-périodique (comme $\sqrt{2}$ et $\pi = 3.14159265\ldots$).

1.2.3 Notation scientifique

La **notation scientifique** permet d'écrire des nombres "très grands" ou "très petits".

Si on se donne un nombre $a \in \mathbb{R}$, on l'écrira de la manière suivante en notation scientifique

$$a = \pm x \cdot 10^n$$

avec $1 \leqslant x < 10$ ($x \in \mathbb{R}$) et $n \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, on écrit le premier chiffre non nul du nombre suivi d'une virgule et des chiffres suivants. On multiplie ensuite par la puissance de 10 adéquate pour retrouver le nombre de départ (on doit avoir une *égalité* !). Le nombre de chiffres écrits est appelé **le nombre de chiffres significatifs**. Il est en général fixé par le contexte. Afin de raccourcir l'écriture la plupart des calculatrices écrivent :

$$\pm x\,\mathtt{E}\,n \quad \text{au lieu de} \quad \pm\, x \cdot 10^n$$

Exemples

nombre exact	nombre décimal arrondi	notation scientifique	nb de chiffres significatifs
2	2	$2 \cdot 10^0$	1
$\frac{1}{2}$	0.5	$5 \cdot 10^{-1}$	1
$\frac{1}{2}$	0.50	$5.0 \cdot 10^{-1}$	2
$\frac{13}{10}$	1.3	$1.3 \cdot 10^0$	2
$-\frac{1}{3}$	-0.333	$-3.33 \cdot 10^{-1}$	3
$\sqrt{119}$	10.9087	$1.09087 \cdot 10^1$	6
2^{20}	1048576	$1.048576 \cdot 10^6$	7
$(-2)^{49}$	$-5629499534\cdots?$	$-5.629 \cdot 10^{15}$	4
3^{100}	$5153775207\cdots?$	$5.1537752 \cdot 10^{47}$	8
$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$	$0.0000000\cdots?$	$1.9403 \cdot 10^{-48}$	5

La notation scientifique permet de se donner un ordre de grandeur du nombre en question. Plutôt superflue dans les premiers exemples, elle est ESSENTIELLE dans les deux derniers exemples !

1.2.4 PPMC, PGDC et nombres premiers

Définition 1.4 (Rappel)
Soit a et b deux nombres naturels non nuls ($a, b \in \mathbb{N}^*$), alors :

1. a est un **multiple** de b s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.
2. b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.

Exemples

1. *32 est un multiple de 8, car* $32 = 4 \cdot 8$.
2. *7 est un diviseur de 21, car* $21 = 7 \cdot 3$.

Définition 1.5 (Rappel)

1. Un **multiple commun** de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est multiple de chacun d'eux. Le **plus petit multiple commun** de plusieurs nombres est appelé le **ppmc** de ces nombres.
2. Un **diviseur commun** de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est diviseur de chacun d'eux. Le **plus grand diviseur commun** de plusieurs nombres est appelé le **pgdc** de ces nombres.

Exemples

1. *36 est le ppmc de 3, 9 et 12.*
2. *8 est le pgdc de 16, 24 et 40.*

Définition 1.6
Un nombre entier naturel p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Propriétés

1. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
2. Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Nous allons démontrer la seconde propriété. On doit cette preuve à Euclide.

Supposons que cet ensemble soit fini. Il contient n nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Posons $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. N n'est pas premier par hypothèse. N admet donc au moins un diviseur premier p_i qui doit être p_1, p_2, … ou p_n : $N = q \cdot p_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &= N - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q \cdot p_i - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \\ 1 &= p_i(q - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n) \end{aligned}$$

De $1 = p_i(q - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n)$, on tire que p_i divise 1, ce qui est impossible. □

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'arithmétique)
Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

On appelle cette décomposition la **décomposition en facteurs premiers** du nombre.

Exemples

- *La décomposition de* 720 *en facteurs premiers est :* $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.
- *La décomposition de* 4200 *en facteurs premiers est :* $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

1.3 Calcul littéral

Le calcul arithmétique consiste à prendre des nombres "connues" et à exécuter sur ces derniers des opérations : addition, soustraction, multiplication et division.

Le calcul littéral (ou algébrique), quant à lui, consiste à manipuler des expressions littérales (c'est-dire avec des nombres et des lettres qui représentent des nombres). Par rapport au calcul arithmétique, une partie des nombres "connus" est remplacée par des lettres désignant des nombres "inconnus". Il y a plusieurs raisons pour lesquelles le calcul algébrique est essentiel.

La première est pour éviter de faire le même calcul un nombre important de fois en raison du fait qu'une ou plusieurs données du problème peuvent varier, tel que le prix de l'essence, par exemple. Le calcul algébrique permet d'arriver à une réponse simplifiée dépendant des (ou de la) données qui varient.

La deuxième est que, parfois, les valeurs de certaines données d'un problème ne seront connues que plus tard, mais que cela ne devrait pas nous empêcher d'avancer dans la résolution du problème.

La règle d'or est la suivante :

La présence de lettres dans un calcul ne change rien à la façon de calculer. Une lettre ne fait que représenter un nombre quelconque !

1.3.1 Propriétés des opérations

Propriétés de l'addition

1)	L'addition est **commutative** :	$a + b = b + a$	$(3 + 4 = 7 = 4 + 3)$
2)	L'addition est **associative** :	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$(2+(3+4) = (2+3)+4)$
3)	0 est l'**élément neutre** :	$a + 0 = a$	$(2 + 0 = 2)$
4)	$-a$ est l'**élément opposé** de a :	$a + (-a) = 0$	$(3 + (-3) = 0)$

Propriétés de la multiplication

1)	La multiplication est **commutative** :	$a \cdot b = b \cdot a$	$(3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3)$
2)	La multiplication est **associative** :	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$(2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4)$
3)	1 est l'**élément neutre** :	$1 \cdot a = a$	$(1 \cdot 2 = 2)$
4)	Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ est l'**élément inverse** de a :	$a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$	$(3 \cdot \frac{1}{3} = 1)$

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition

$$\boxed{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c} \tag{1.1}$$

Pour réaliser le produit de deux sommes, on utilise plusieurs fois la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples

1) *Distributivité :* $2 \cdot (3+4) = 14 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
2) *Produit de deux sommes :* $(2+3) \cdot (4+5) = 2 \cdot (4+5) + 3 \cdot (4+5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 45$

Définition 1.7
Deux termes techniques sont liés à la distributivité.

Développer : C'est l'opération qui consiste à passer du membre de gauche de l'égalité (1.1) au membre de droite de la même égalité. Elle consiste donc à **transformer un produit en une somme** en "effectuant" la multiplication selon la règle de distributivité.

Mettre en évidence : C'est l'opération qui consiste à passer du membre de droite de l'égalité (1.1) au membre de gauche de la même égalité. Elle consiste donc à repérer dans une somme de termes le facteur qui est commun à tous les termes de la somme et à **transformer cette somme en le produit du terme commun et de la somme (entre parenthèses) des termes restant** selon la règle de distributivité.

Exemples

1) *Pour développer l'expression* $2 \cdot (5+8)$ *on effectue la multiplication pour obtenir :*

$$2 \cdot (5+8) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$$

2) *Dans la somme* $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$*, on peut mettre le facteur* 2 *en évidence car il est commun aux deux termes de la somme :*

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 2 \cdot (5+8)$$

On réalise donc l'opération inverse de celle effectuée en 1.

Il est possible de montrer que ces propriétés impliquent :

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

C'est une relation nous utiliserons très fréquemment.

Propriétés des nombres opposés

1) $-(-a) = a$ $\quad (-(-4) = 4)$
2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ $\quad ((-4) \cdot 5 = -(20) = 4 \cdot (-5))$
3) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $\quad ((-3) \cdot (-4) = 12)$
4) $(-1) \cdot a = -a$ $\quad ((-1) \cdot 4 = -4)$

Propriétés des fractions

Rappel

Une **fraction** représente le quotient ($\equiv$ division) de deux nombres a et b. Elle est un nombre qu'on note

$$\frac{a}{b}$$

où a est le **numérateur** (ou dividende), b le **dénominateur** (ou diviseur) et — la **barre de fraction**.

Exemple : $\dfrac{2}{5}$ *est un fraction qui correspond au nombre* $0,4$. *Elle se lit "deux cinquième".*

Plusieurs fractions peuvent représenter le même nombre (penser à $3 = \frac{6}{2} = \frac{-15}{-5} = \frac{9}{3} = \ldots$).

On peut utiliser le produit en croix pour vérifier si deux fractions sont égales.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ , si } \; a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple : $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ *car* $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Les opérations sur les fractions suivent les règles ci-dessous :

1) Addition : $\quad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \qquad \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right)$

2) Multiplication : $\quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 3}\right)$

3) Division : $\quad \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} \qquad \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)$

4) Opposé : $\quad -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} \qquad \left(-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}\right)$

On transforme une fraction en une autre fraction équivalente par la suite d'opérations :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

En lisant de gauche à droite, on **amplifie** la fraction. En lisant de droite à gauche, on **simplifie** la fraction. On dit qu'une fraction est **irréductible** si on ne peut pas la simplifier (comme pour $\frac{2}{3}$).

Nous reviendrons plus en détails sur ces concepts au paragraphe (1.5).

Priorité des opérations

L'ordre de priorité des opérations s'établit ainsi (plus le numéro est élevé, plus la priorité est grande) :

Priorité 4 - les parenthèses ()

Priorité 3 - l'exponentiation y^x et les fonctions (sinus, cosinus, etc.)

Priorité 2 - la multiplication et la division

Priorité 1 - l'addition et la soustraction

La règle de priorité est la suivante :

1. en lisant de gauche à droite, quand un nombre se trouve entre deux signes opératoires, c'est l'opération prioritaire qui est effectuée en premier.
2. si les deux opérations ont le même niveau de priorité, elles sont effectuées dans l'ordre d'écriture.

Règle des signes

Lorsqu'on a une multiplication ou une division entre deux nombres, la **règle des signes** s'applique.

nombre	multiplication ou division	nombre	nombre
$+$	$\cdot$ ou $\div$	$+$	$+$
$+$	$\cdot$ ou $\div$	$-$	$-$
$-$	$\cdot$ ou $\div$	$+$	$-$
$-$	$\cdot$ ou $\div$	$-$	$+$

On peut aussi utiliser des phrases mnémotechniques du style : les amis de mes amis sont mes amis ; les amis de mes ennemis sont mes ennemis ; les ennemis de mes amis sont mes ennemis ; les ennemis de mes ennemis sont mes amis.

1.3.2 Les puissances et les exposants

Définition 1.8

Un nombre a multiplié n fois par lui-même, $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}}$, est appelé **puissance n-ème** de a et est noté a^n. On dit également *"a élevé à la puissance n"* ou plus rapidement *"a puissance n"*. Dans l'écriture a^n, on appelle a la **base** et n l'**exposant**.

Exemple : $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \textit{ apparaît } 6 \textit{ fois}} = 3^6$

Propriétés

– Pour multiplier 2 puissances de même base, on additionne les exposants :

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Exemple : $2^5 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9$

Pour $n = 0$: $a^n \cdot a^0 = a^n \Rightarrow$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

De plus :

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

si $n \geqslant m$.

– Pour multiplier 2 puissances de même exposant, on multiplie les bases :

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Exemple : $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^3$

– Pour élever à des puissances successives, on multiplie les exposants :

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Exemple : $(3^2)^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$

Ces formules ne sont valables, pour l'instant, que pour a et b des nombres réels $(a, b \in \mathbb{R})$ et n et m des nombres naturels $(n, m \in \mathbb{N})$. On les généralisera dans la suite du cours.

1.3.3 Les racines

Définition 1.9
L'opération prendre la racine d'un nombre est l'inverse de l'élévation d'un nombre à une certaine puissance. On définit la **racine n-ème** ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un nombre a (avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \geqslant 0$), notée $\sqrt[n]{a}$, comme l'unique nombre réel $x \geqslant 0$ qui satisfait

$$x^n = a$$

Le symbole $\sqrt[n]{}$ est appelé **radical** , l'expression sous le radical est appelé **radicande** et n l'**indice**.

Si $n = 2$, on écrit simplement $\sqrt{a}$ et on lit **racine carrée** de a.

Exemples

1. $\sqrt{0} = 0$ *(car* $0^2 = 0$*)*
2. $\sqrt{4} = 2$ *(car 2 est l'unique nombre réel positif tel que* $2^2 = 4$*. Remarque :* $(-2)^2 = 4$ *également, mais* -2 *est un nombre réel négatif!)*
3. $\sqrt[3]{8} = 2$ *(car* $2^3 = 8$*)*

Si a et b sont des nombres réels strictement positifs $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$ et n, m, p des nombres naturels strictement positifs $(n, m, p \in \mathbb{N}^*)$, on a les propriétés suivantes :

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b$		
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Attention !

– $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, en effet : $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
– $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, en effet : $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

1.3.4 Identités remarquables

Les **identités remarquables** sont des formules qu'il est bon de reconnaître en toute circonstance. Elles vont revenir dans tous les chapitres. Pour la plupart ce n'est qu'un rappel.

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 = \dots &
\end{array}
$$

Ces égalités se lisent dans les DEUX sens (comme toute égalité). Il est facile de les retrouver en développant le terme de gauche. Par contre, il est important de les connaître afin de pouvoir les reconnaître lorsque seul le terme de droite est présent.

Reprenons la première de ces formules. On peut écrire : $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$. On appelle le "1" devant a^2 le **coefficient** de a^2 ; le coefficient de ab est 2, celui de b^2 est 1.

Dans les formules de la première colonne, la puissance à laquelle on a élevé $(a+b)$ est chaque fois augmentée de 1. Observez ce qui se passe :

- A chaque puissance correspond une suite de coefficients.
  Exemples : à la puissance 2 correspond : $(1;2;1)$*, à celle de 3 correspond :* $(1;3;3;1)$.
- En lisant de gauche à droite, les exposants de a sont décroissants par pas de 1, ceux de b croissants par le même pas.

Pour le cas général $(a+b)^n$, les coefficients sont donnés par le triangle de Pascal.

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
⋮	...						

Le triangle de Pascal

D'autre identités sont également très utiles

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\
(a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc
\end{aligned}
$$

Applications

1. $38 \cdot 42 = (40-2)\cdot(40+2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$
2. $21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2\cdot 20 + 1 = 400 + 40 + 1 = 441$
3. $35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2\cdot 150 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

Démonstration. Nous allons démontrer quelques-unes des identitées proposés ci-dessus. Les autres démonstrations sont laissées au lecteur.

1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{2}} = (a+b)\cdot(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \mathbf{a^2}+\mathbf{2ab}+\mathbf{b^2}$
2. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{\mathbf{2}} = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + b^2 = \mathbf{a^2} - \mathbf{2ab} + \mathbf{b^2}$
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2} - \mathbf{b^2}$
4. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a^2}-\mathbf{ab}+\mathbf{b^2}) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = \mathbf{a^3} + \mathbf{b^3}$
5. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a^2}+\mathbf{ab}+\mathbf{b^2}) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = \mathbf{a^3} - \mathbf{b^3}$

□

1.4 Polynômes

1.4.1 Monômes

Définition 1.10
On appelle **monôme** les nombres réels, les lettres, qui sont appelées **indéterminées** ou les expressions qui peuvent être obtenues par la multiplication à partir des nombres réels et des lettres.

Un **monôme en une indéterminée** est le produit d'un nombre réel, a, et d'une puissance d'une indéterminée, généralement noté x, :

$$\boxed{a \cdot x^n}$$

Le nombre réel a est le **coefficient** du monôme.
La puissance de l'indéterminée, x^n, est la **partie littérale** du monôme et son exposant, $n \in \mathbb{N}$, est le **degré** du monôme.
Deux monômes sont **semblables** si et seulement si leurs parties littérales sont égales.

Exemples

1) $4x^2y$, xy^2z, $-2x$, 5, 0 *sont des monômes.*

2) $x+x+x$ *est un monôme,* ***forme réduite*** *:* $3x$.
$1+3x$ *n'est pas un monôme car cette expression n'est pas le produit de nombres et/ou de lettres.*

3)

Monôme	$5x$	$-3x^2$	$\frac{7}{2}x^4$	x^2	$-\sqrt{2}x^3$	$7,8$
Coefficient	5	-3	$\frac{7}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$7,8$
Partie littérale	x	x^2	x^4	x^2	x^3	$x^0 = 1$
Degré	1	2	4	2	3	0

4) x^2 *et* $-3x^2$ *sont deux monômes semblables.*

Opérations sur les monômes

Somme : On obtient la somme de monômes semblables en conservant la partie littérale commune et en additionnant les coefficients. On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Produit : On obtient le produit de deux monômes en multipliant leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles (addition des puissances). On utilise la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Exemples

1) Somme : $5x^2 + 8x^2 \overset{dis.}{=} (5+8) \cdot x^2 = 13x^2$

2) Produit : $5x^2 \cdot 8x^3 \overset{com.}{=} 5 \cdot 8 \cdot x^2 \cdot x^3 \overset{ass.}{=} 40x^{2+3} = 40x^5$

1.4.2 Polynômes

Définition 1.11
On appelle **polynôme** tout monôme et toute somme de monômes.

Exemples

1) $7x^2y + 8xyz - 3y^3z^3$ *et* $-4x^2 + 5xy - x + 2y - 4$ *sont des polynômes.*

2) $\frac{1}{x} + 3x$, $\frac{x-5}{x^2+2}$ *et* $3x + 2\sqrt{x}$ *ne sont pas des polynômes.*

Pour la suite de ce cours nous considérerons uniquement des polynômes formés de monômes en une indéterminée, que nous noterons x.

On polynôme est **sous forme réduite** si ses monômes semblables sont regroupés en un seul terme. Pour obtenir un polynôme sous forme réduite, on somme ses monômes semblables en utilisant la règle d'addition ci-dessus.

Exemples

1) $2x^2 - 3x + 2$ *est un polynôme sous forme réduite. Il a trois termes.*

2) $7x^2 - 3x + 2x^2 - 4$ *n'est pas un polynôme sous forme réduite, puisqu'il contient les deux termes semblables* $7x^2$ *et* $2x^2$*. Forme réduite :* $9x^2 - 3x - 4$

Définition 1.12
Un **polynôme** (en une indéterminée), nommé $p(x)$, s'écrit de manière "générale"

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
La valeur de l'exposant le plus grand, n, est appelée le **degré** de $p(x)$, noté $\deg(p(x))$.
Le nombre a_i est appelé le **coefficient** de rang i de $p(x)$ et a_n le **coefficient dominant**.

On écrira généralement un polynôme de manière **ordonnée**, c'est-à-dire en écrivant ses termes dans l'ordres des degrés décroissants.

Exemples

Polynôme	*Degré*	*Coeff. dom.*	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$p(x) = 5x^5 + 2x^4 + 3x^2 + x$	5	5	5	2	0	3	1	0
$p(x) = -x^3 + x^2 + 5$	3	-1	$-$	$-$	-1	1	0	5
$p(x) = \frac{4}{3}x + 2$	1	$\frac{4}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\frac{4}{3}$	2
$p(x) = 6$	0	6	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	6

Evaluation d'un polynôme

On peut **évaluer** un polynôme $p(x)$ en n'importe quel nombre réel a en remplaçant l'indéterminée x par le nombre a et en évaluant la valeur de l'expression ainsi obtenue. On note cette valeur $p(a)$.

Exemple

Soit le polynôme $p(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 7$
Si $a = 2$: $p(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 7 = -8 + 8 - 2 - 7 = -9$
Si $a = -5$: $p(-5) = -(-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 - 1 \cdot (-5) - 7 = 125 + 50 + 5 - 7 = 173$

Opérations sur les polynômes

Egalité : Deux polynômes sont dit **égaux** s'ils sont de même degré et si tous leurs coefficients de rang i correspondants sont égaux.

Somme : On additionne deux polynômes en regroupant les termes semblables, même puissance de l'indéterminée, et en les additionnant (équivalent à réduire la somme des deux polynômes).

Opposé : On obtient l'opposé d'un polynôme en changeant le signe de chacun de ses termes. (Cela revient à le multiplier par -1.)

Différence : On soustrait un polynôme d'un autre polynôme en y additionnant son opposé.

Produit : On multiplie deux polynômes en multipliant chaque monôme du premier par chaque monôme du second et on réduit la somme de monômes obtenue. (On applique à plusieurs reprises la distributivité.)

Exemples

Soit les polynômes $p(x) = 2x^2 - 4x + 6$ *et* $q(x) = x^2 + 3x - 5$.

1) Egalité :
$p(x) = 2x^2 - 4x + 6 = 6 - 4x + 2x^2 = -4x + 6 + 2x^2 = 2(x^2 - 2x + 3) = \ldots$

2) Somme :

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) + (x^2 + 3x - 5) \\ &= (2x^2 + x^2) + (-4x + 3x) + (6 - 5) \\ &= 3x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

3) Opposé :

$-p(x) = -1 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = -2x^2 + 4x - 6$

4) Différence :

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) - (x^2 + 3x - 5) \\ &= (2x^2 - 4x + 6) + (-x^2 - 3x + 5) \\ &= (2x^2 - x^2) + (-4x - 3x) + (6 + 5) \\ &= x^2 - 7x + 11 \end{aligned}$$

5) Produit :

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) \cdot (x^2 + 3x - 5) \\ &= 2x^2 \cdot (x^2 + 3x - 5) + (-4x) \cdot (x^2 + 3x - 5) + 6 \cdot (x^2 + 3x - 5) \\ &= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-5) + \\ &\quad (-4x) \cdot x^2 + (-4x) \cdot 3x + (-4x) \cdot (-5) + \\ &\quad 6 \cdot x^2 + 6 \cdot 3x + 6 \cdot (-5) \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 4x^3 - 12x^2 + 20x + 6x^2 + 18x - 30 \\ &= 2x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 38x - 30 \end{aligned}$$

On peut remarquer que : $4 = deg(p(x) \cdot q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x)) = 2 + 2$.

Formule des degrés

Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes. On a la formule suivante :

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

Cette formule se démontre facilement en utilisant la définition du produit de deux polynômes.

1.4.3 Factorisation d'un polynôme

La **factorisation** ou **décomposition en facteurs** consiste à trouver, pour un polynôme $p(x)$ de degré supérieur ou égal à 2 donné, un produit de polynômes de degré supérieur à 0 qui lui soit égal et dont les facteurs ne peuvent plus être décomposés.

La factorisation est le processus inverse du *développement*. Ainsi, pour contrôler si une factorisation est correcte, il suffit de développer le produit obtenu et voir s'il correspond au polynôme de départ.

Exemple

Le polynôme $x^2 - 9$ *peut se décomposer ainsi :* $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

On donne ci-dessous quelques procédés permettant d'effectuer cette transformation très importante et parfois difficile. D'autres technique seront données dans la suite du cours.

Mise en évidence

On repère d'abord dans la somme de termes à décomposer le facteur qui est commun à tous les termes de la somme et on utilise ensuite la distributivité pour écrire un produit.

Exemples

1) $x^2 - 8x = x(x-8) \longrightarrow$ *On a mis x en évidence.*

2) $6ax + 6a = 6a(x+1) \longrightarrow$ *On a mis $6a$ en évidence (ne pas oublier le $+1$ dans la parenthèse).*

3) $a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y) \longrightarrow$ *Le facteur $x+y$ est commun aux deux termes de la somme.*

4) $-12x^3y + 24x^2y^2 + 6xy^3 = 6xy(-2x^2 + 4xy + y^2)$

Utilisation des identités remarquables

On peut utiliser les identités remarquables vues au paragraphe (1.3.4) pour factoriser un polynôme.

Exemples

1) $9x^2 - 25y^2 = (3x-5y)(3x+5y)$

2) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

3) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a-2b)^3$

Décomposition d'un trinôme du second degré

Essayons de déterminer α et β de manière à pouvoir écrire :

$$x^2 + 7x + 12 = (x+\alpha)(x+\beta)$$

La forme réduite du membre de droite de cette égalité est égale à

$$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

Pour que les deux membres soient égaux, il faut donc que

$$\alpha + \beta = 7 \qquad \alpha\beta = 12$$

Ces deux égalités sont vraies si $\alpha = 3$ et $\beta = 4$. On obtient ainsi la décomposition du trinôme du second degré donné en un produit de deux facteurs du premier degré :

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

La décomposition d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est 1 est ainsi ramenée à la recherche de deux nombres dont
– *la somme est égale au coefficient de rang* 1,
– *le produit est égal au coefficient de rang* 0.

Méthode des groupements

Elle consiste à former plusieurs groupes de termes (dans les exemples les plus courants 2 groupes), de telle manière que l'on puisse
– *soit utiliser une identité remarquable,*
– *soit mettre en évidence un facteur commun aux différents groupes.*

Exemples

$$\begin{array}{lll}
1)\ x^2-2xy+y^2-1 & = (x^2-2xy+y^2)-1 & \textit{ass. addition}\\
& = (x-y)^2-1 & \textit{identité remarquable}\\
& = [(x-y)+1][(x-y)-1] & \textit{identité remarquable}\\
& = (x-y+1)(x-y-1) & \textit{ass. addition}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2)\ ax+bx-ay-by & = (ax-ay)+(bx-by) & \textit{ass. et comm. addition}\\
& = a(x-y)+b(x-y) & \textit{mise en évidence}\\
& = (x-y)(a+b) & \textit{mise en évidence}
\end{array}$$

Méthode de factorisation

Pour décomposer un polynôme, il faut souvent appliquer plusieurs des méthodes décrites ci-dessus. On procède dans l'ordre suivant :

1. mise en évidence des facteurs communs à tous les termes,
2. utilisation d'une identité remarquable,
3. méthode de décomposition pour les trinômes du second degré,
4. méthode des groupements.

Exemples

$$\begin{array}{lll}
1)\ 36x^2-100 & = 4(9x^2-25) & \textit{mise en évidence}\\
& = 4(3x-5)(3x+5) & \textit{identité remarquable}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2)\ 5a^2-5b^2-5a^2c^2+5b^2c^2 & = 5[(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)]\\
& = 5(a^2-b^2)(1-c^2)\\
& = 5(a-b)(a+b)(1-c)(1+c)
\end{array}$$

1.5 Fractions rationnelles

Définition 1.13
On appelle **fraction rationnelle** le quotient de deux polynômes en une indéterminée, $p(x)$ et $q(x)$:

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

où $q(x)$ n'est pas le polynôme nul ($q(x) \neq 0$).
$p(x)$ est appelé le **numérateur** de la fraction et $q(x)$ le **dénominateur**.

Exemple

$\frac{2x}{5x+1}, \frac{8x^2-3x+2}{-3x+5}, \frac{1}{x^5-2x^3+2}$ *sont des fractions rationnelles.*

Pour travailler avec ces fractions rationnelles, il est nécessaires de définir des opérations entre ces fractions. Ces dernières devront être des prolongements des définitions des opérations sur les polynômes, et donc concorder avec celles-ci, car tout polynôme $p(x) \neq 0$ peut être vu comme la fraction rationnelle : $\frac{p(x)}{1}$. La même remarque est valable pour les nombres réels.

1.5.1 Opérations sur les fractions rationnelles

Convention d'écriture : Dans ce paragraphe, les lettres A, B, C et D représenteront des polynômes (en une indéterminée). En particulier, on pourrait voir ces lettres comme représentant des nombres réels (qui sont des polynômes de degré 0) et retrouver ainsi les opérations décrites au paragraphe (1.3.1).

Simplification d'une fraction rationnelle

On **simplifie** une fraction rationnelle en remplaçant dans le numérateur et le dénominateur un facteur (polynôme) qui leur est commun par 1 ($\equiv$ on divise le numérateur et le dénominateur par un même facteur).

$$\boxed{\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A\cdot 1}{B\cdot 1}=\frac{A}{B}}$$

Une fraction rationnelle simplifiée au maximum est dans sa forme **irréductible**.

Remarque

Pour simplifier une fraction rationnelle, on *factorise* d'abord son numérateur et son dénominateur, puis on simplifie par les facteurs communs.

Exemples

1) $\dfrac{21}{14}=\dfrac{3\cdot 7}{2\cdot 7}=\dfrac{3\cdot 1}{2\cdot 1}=\dfrac{3}{2}$

On a simplifié la fraction $\frac{21}{14}$ *par 7.*

2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{(x-2)\cdot 1}{(x+1)\cdot 1}=\dfrac{x-2}{x+1}$

On a simplifié la fraction par $x-1$*.*

3) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+x^2-6x}=\dfrac{(x+3)^2}{x(x^2+x-6)}=\dfrac{(x+3)^2}{x(x+3)(x-2)}=\dfrac{x+3}{x(x-2)}$

4) $\dfrac{3x^2-3}{12x+12}=\dfrac{3(x^2-1)}{12(x+1)}=\dfrac{1\cdot(x+1)(x-1)}{4(x+1)}=\dfrac{x-1}{4}$

Amplification d'une fraction rationnelle

On **amplifie** une fraction rationnelle en multipliant son numérateur **et** son dénominateur par un même polynôme (non nul).

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}}$$

C'est donc la transformation inverse de la simplification.

Deux fractions rationnelles sont alors **équivalentes** si on peut passer de l'une à l'autre par simplifications et/ou amplifications.

Exemples

1) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \dfrac{28}{35}$

On a amplifié $\frac{4}{5}$ *par* 7

2) $\dfrac{x-2}{x-5} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$

On a amplifié la fraction par $x-1$. *Il suffit de simplifier la fraction du milieu par* $x-1$ *pour obtenir l'égalité.*

Somme de deux fractions rationnelles

Pour additionner deux fractions rationnelles, on procède de la manière suivante :

1) déterminer un **multiple commun** aux dénominateurs des deux fractions $\longrightarrow$ un polynôme qu'on peut obtenir par multiplication à partir des dénominateurs des deux fractions,
2) amplifier les deux fractions pour obtenir aux dénominateurs le polynôme déterminé en 1 $\longrightarrow$ on dit qu'on met les fractions *au même dénominateur*,
3) additionner les numérateurs en conservant le dénominateur commun.

$$\boxed{\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}}$$

Cette méthode fonctionne aussi quand on veut additionner un polynôme et une fraction rationnelle. Il suffit d'écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme $\frac{p(x)}{1}$ et d'appliquer la méthode ci-dessus.

Remarque

Le dénominateur "préféré" (parce qu'il rend les calculs plus simples !) est le **multiple commun** des deux dénominateurs du *plus petit degré possible.*
On l'appelle le **ppmc** des deux dénominateurs.

Exemples

1) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} = \dfrac{9+10}{12} = \dfrac{19}{12}$

Dénominateur commun : $12 \longrightarrow$ *ppmc de* 4 *et* 6.

2) $\dfrac{a^2-a}{a+1} + \dfrac{a-2}{a+1} = \dfrac{a^2-a+a-2}{a+1} = \dfrac{a^2-2}{a+1}$

Addition directe car les deux fractions sont déjà au même dénominateur.

3) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{-7}{x+2} = \dfrac{2(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \dfrac{(-7)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{2x+4-7x+21}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{-5x+25}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{(-5)(x-5)}{(x-3)(x+2)}$

Dénominateur commun : $(x-3)(x+2) \longrightarrow$ *produit de* $x-3$ *et* $x+2$.

4) $\dfrac{2}{(x-3)(x+2)} + \dfrac{-7}{x+2} = \dfrac{2}{(x-3)(x+2)} + \dfrac{(-7)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{2-7x+21}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{-7x+23}{(x-3)(x+2)}$

Dénominateur commun : $(x-3)(x+2) \longrightarrow$ *ppmc de* $(x-3)(x+2)$ *et* $x+2$.

Opposé d'une fraction rationnelle

L'**opposé** d'une fraction rationnelle s'obtient en prenant l'opposé soit de son numérateur, soit de son dénominateur.

$$\boxed{-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}}$$

Exemples

1) $-\dfrac{3}{4} = \dfrac{-3}{4} = \dfrac{3}{-4}$

est l'opposé de $\frac{3}{4}$.

2) $-\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-1} = \dfrac{x^2-3x+2}{-x^2+1}$

est l'opposé de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Différence de deux fractions rationnelles

Pour **soustraire** une fraction rationnelle d'une première fraction rationnelle, on additionne à la première l'**opposé** de la seconde.

$$\boxed{\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} = \frac{A\cdot D}{B\cdot D} + \frac{B\cdot(-C)}{B\cdot D} = \frac{A\cdot D - B\cdot C}{B\cdot D}}$$

Exemples

1) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{-1}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{-2}{4} = \dfrac{3-2}{4} = \dfrac{1}{4}$

2) $\dfrac{a^2-a}{a+1} - \dfrac{a-2}{a+1} = \dfrac{a^2-a}{a+1} + \dfrac{(-1)(a-2)}{a+1} = \dfrac{a^2-a-a+2}{a+1} = \dfrac{a^2-2a+2}{a+1}$

Produit de deux fractions rationnelles

Pour **multiplier** deux fractions rationnelles, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Pour multiplier un polynôme par une fraction rationnelle, il suffit, comme pour l'addition, d'écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme $\frac{p(x)}{1}$ et d'appliquer la règle ci-dessus.

Exemples

1) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$

2) $\dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x+1}$

Inverse d'une fraction rationnelle

L'**inverse** d'une fraction rationnelle est obtenue en inversant son numérateur et son dénominateur (si le numérateur et le dénominateur sont différents de zéro).

$$\boxed{\frac{A}{B} \xrightarrow{\text{inverse}} \frac{B}{A}}$$

Exemples

1) $\dfrac{3}{4}$ *est l'inverse de* $\dfrac{4}{3}$.

2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ *est l'inverse de la fraction rationnelle* $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Quotient de deux fractions rationnelles

Pour **diviser** une fraction rationnelle par une seconde fraction rationnelle, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\boxed{\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}}$$

Exemples

1) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \dfrac{21}{20}$

2) $\dfrac{\frac{x-3}{x+1}}{\frac{x-2}{x+1}} = \dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

1.6 Symbole de sommation

Définition 1.14
Le **symbole de sommation**, noté à l'aide de la lettre grec Σ, s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes.

Soit n termes a_1, a_2, …, a_n. La somme de ces n termes s'écrit de la manière suivante à l'aide du symbole de sommation :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

On appelle k l'**indice de la somme**. Il permet de décrire la manière dont on somme les éléments.
Le nombre se trouvant à droite de l'égalité sous le symbole de sommation est la valeur de départ de l'indice de sommation, ici 1, et le nombre au-dessus du symbole la valeur finale de l'indice, ici n. La somme porte sur toutes les valeurs de k comprises entre ces deux bornes (bornes comprises).

Le symbole de sommation permet donc d'écrire des sommes d'un nombre important de termes de manière précise et condensée sans utiliser les points de suspension.

L'indice de sommation peut être utilisé pour décrire les termes de la somme de manière directe et les bornes sur l'indice de sommation peuvent avoir d'autre valeurs que 1 et n.

Par exemple, la somme des puissance de 2 comprises entre 6 et 27 peut s'écrire

$$\sum_{k=6}^{27} 2^k$$

au lieu de $2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{26} + 2^{27}$.
Donnons d'autres exemples pour bien comprendre cette notation.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} k = 3+4+5+6+7+8 = 33$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k^2-1) = (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1) = 0+3+8+15 = 26$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-1) = 0+3+8+15+\ldots+(n^2-1)$

5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} (k-1)^3 = (2-1)^3+(3-1)^3+(4-1)^3 = 1^3+2^3+3^3 = 36$

Proposition 1.3
Soient $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$; $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Le symbole de sommation possède les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \cdot x_k = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = n \cdot a$

Ces propriétés du symbole de sommation découlent directement de l'associativité et de la commutativité de l'addition ainsi que de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

1.7 Principe de récurrence

Nous allons décrire ci-après un principe qui nous permettra de démontrer certaines relations utiles pour la progression du cours.

Proposition 1.4 (Principe de récurrence)
Soit $\mathbf{P}(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

1. $\mathbf{P}(0)$ est vraie (ancrage) ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ implique $\mathbf{P}(n+1)$ (hérédité).

Alors $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse d'hérédité signifie que si $\mathbf{P}(n)$ est vraie alors $\mathbf{P}(n+1)$ l'est aussi. Dans ces conditions, on comprend bien que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n. En effet, $\mathbf{P}(0)$ est vraie par l'hypothèse d'ancrage, donc $\mathbf{P}(1)$ l'est par hérédité, donc $\mathbf{P}(2)$ aussi pour la même raison, etc.

Exemple

A l'aide du principe de récurrence, nous allons démontrer la relation :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Cette propriété dépend donc de* n *et pourrait être désignée par* $\mathbf{P}(n)$, *pour reprendre la notation proposé ci-dessus. On procède en deux étapes :*

1. Ancrage *: La formule est vraie pour n = 1 :*

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow \textit{OK}.$$

Cette égalité est vraie et la relation est donc vraie pour $n = 1$ *(autrement dit :* $\mathbf{P}(1)$ *est vérifiée).*

2. Hérédité *On suppose que la formule est vraie pour n quelconque. On montre alors qu'elle est vraie pour n+1.*

Hypothèse : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Conclusion : $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

On doit donc montrer la seconde égalité en s'appuyant sur la première. Pour cela, on part du terme de gauche de la seconde égalité et par une suite d'égalités on essaie d'obtenir le terme de droite :

$$\begin{aligned}\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{Hyp:=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Nous venons de prouver l'hérédité de notre formule : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

La formule :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

est donc vraie pour tout nombre naturel positif n *par le principe de récurrence.*

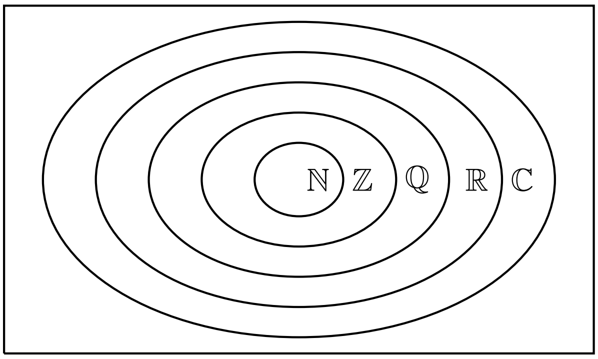
Remarque

Cette formule est à connaître par coeur !

1.8 Exercices

1) Placer chacun des nombres suivants dans la bonne "plage" (ne reporter que la lettre correspondante) :

$a = 0$	$b = -1,2$
$c = \frac{5}{2}$	$d = \frac{0}{5}$
$e = 3,\overline{48}$	$f = \pi$
$g = \sqrt{2}$	$h = \sqrt{36}$
$i = \sqrt{-1}$	$j = \sqrt[3]{2}$
$k = \frac{-12}{0}$	$l = \sqrt[3]{-8}$
$m = 2,999$	$n = 2,999\ldots$



2) Ecrire en notation scientifique :

a) $14'000'000$ b) $1,004$ c) $0,000004$

d) $0,00081$ e) 143 f) $23,090$

3) Indiquer la décomposition en facteurs premiers de $14'520$, $10'725$ et $9'126$; déterminer ensuite leur *pgdc* et *ppmc*.

4) Supprimer les parenthèses inutiles :

a) $\left(\dfrac{3}{x}\right) + 2 + (4 \cdot 3) - 1$ b) $(4 \cdot x) + 5 \cdot (2 + x)$

c) $(x+2) \cdot (x-1) + (3 \cdot x) - (x+2)$ d) $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

5) Simplifier les quotients suivants :

a) $\dfrac{55}{33}$ b) $\dfrac{24+18}{6}$ c) $\dfrac{24+18}{7}$ d) $\dfrac{8+12}{4+28}$

6) Additionner les fractions suivantes et simplifier :

a) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{4}{2} + \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{6}{8+4} + \dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{3}{11} + \dfrac{4}{7}$ f) $\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{18}$ g) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{32}$ h) $\dfrac{4}{9} + \dfrac{11}{12}$

i) $\dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{2}$ j) $\dfrac{6}{7} + \dfrac{9}{14} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{11}{21}$ k) $\dfrac{7}{8} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{19}{24} + \dfrac{5}{6}$

l) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{3}$ m) $\dfrac{7}{16} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{6}$ n) $\dfrac{70}{84} + \dfrac{45}{54} + \dfrac{20}{45} + \dfrac{49}{56}$

o) $\dfrac{54}{72} + \dfrac{140}{336} + \dfrac{65}{117} + \dfrac{119}{189}$ p) $\dfrac{\frac{2}{3} + 2}{\frac{2}{9} - \frac{4}{3}}$ q) $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{2}}$

7) Effectuer les multiplications suivantes :

a) $\dfrac{495}{125} \cdot \dfrac{475}{304} \cdot \dfrac{352}{405} \cdot \dfrac{45}{363}$

b) $\dfrac{161}{368} \cdot \dfrac{676}{343} \cdot \dfrac{648}{624} \cdot \dfrac{686}{819}$

c) $\dfrac{833}{279} \cdot \dfrac{192}{289} \cdot \dfrac{527}{882} \cdot \dfrac{216}{128}$

d) $\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{10}\right) \cdot \left(\dfrac{7}{11} + \dfrac{7}{4}\right)$

8) Effectuer les divisions suivantes :

a) $\dfrac{3}{24} \div \dfrac{15}{8}$

b) $\dfrac{12}{91} \div \dfrac{12}{13}$

c) $\dfrac{60}{39} \div \dfrac{30}{13}$

d) $\dfrac{3600}{4225} \div \dfrac{2772}{4433}$

e) $\dfrac{9251}{5819} \div \dfrac{783}{621}$

f) $\dfrac{9}{11} \div \dfrac{7}{132}$

9) Effectuer les calculs suivants :

a) $\dfrac{\frac{111}{105} - \frac{90}{175}}{\frac{36}{140} + \frac{49}{245}} \cdot \dfrac{\frac{14}{21}}{\frac{66}{72} - \frac{45}{360}} = \ldots$

b) $\dfrac{\frac{25}{16} - \frac{16}{25}}{\frac{5}{4} + \frac{4}{5}} = \ldots$

c) $\dfrac{1}{5 - \frac{24}{\frac{21}{4}}} = \ldots$

d) $\dfrac{\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{13}{14}\cdot\frac{21}{39}}} = \ldots$

e) $\dfrac{\frac{\frac{225}{21}\cdot\frac{616}{33}}{\frac{163}{3}-\frac{10}{3}}}{\frac{100}{3} - \frac{100}{17}} = \ldots$

f) $\dfrac{\frac{10}{11} + \frac{10}{9}}{2 + \frac{1}{3}} \cdot \dfrac{1 - \frac{4}{11}}{\frac{48}{5} + \frac{472}{55}} = \ldots$

g) $\dfrac{\frac{53}{8} - \frac{125}{40}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \div \dfrac{\frac{35}{3}}{\frac{5}{3}} = \ldots$

h) $\dfrac{\frac{203}{343} + \frac{294}{2401}}{\frac{799}{1071} - \frac{418}{1197}} \div \dfrac{\frac{255}{285} - \frac{252}{513}}{\frac{1173}{1058} - \frac{812}{1334}} = \ldots$

i) $\dfrac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{\frac{14}{13}\cdot\frac{26}{7}}{4}}} = \ldots$

j) $3 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{17}{8}+\frac{15}{40}}} = \ldots$

10) Effectuer les opérations suivantes sans machine et donner les résultats sous forme de puissances entières positives. ($m, n \in \mathbb{N}^*_+$ et $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$)

a) $3^4 \cdot 3^7$

b) $2^5 \cdot 7^5$

c) $(3^2)^4$

d) $5^3 \cdot 5^3$

e) $2^7 + 2^7$

f) $3^8 + 3^8 + 3^8$

g) $4^3 \cdot 8^5$

h) $3^6 \cdot 2^9$

i) $5 \cdot 25^6$

j) $9 \cdot (3^5)^3$

k) $(9 \cdot 3^5)^3$

l) $4^{12} \div 4^3$

m) $9^7 \div 9^3$

n) $8^6 \div 4^5$

o) $a^6 \cdot a^5$

p) $b^3 \cdot c^3$

q) $(8^m)^4$

r) $a^8 \div a^2$

s) $a \cdot b^5 \cdot (a \cdot b)^5$

t) $2(ab^6) \cdot (3a^2b)$

u) $2(ab^6)^3 \cdot (3a^2b)$

v) $(2ab^6)^3 \cdot (3a^2b)$

w) $2^m \cdot 2^n$

x) $2^m \div 2^n$ (3 cas)

11) Effectuer les opérations suivantes sans machine et donner les résultats sous forme de puissance entières positives. ($m, n, p \in \mathbb{N}_+^*$ et $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$)

a) $2x^ny^3 \cdot 5xy^nz^5$ b) $x^2y(3x^ny^{2n}z^{p+3})^2$ c) $[(x^2y) \cdot (3x^ny^{2n}z^{p+3})]^2$
d) $(-ab^n)^4$ e) $(-a)^n$ (2 cas) f) $3a^mb^n(c^mb^5)^3$
g) $((2a^m)^3a^4)^2$ h) $(-2x^5y^6) \cdot (x^2 \div y^3)$ i) $(-2x^5y^6)^3 \cdot (x^2 \div y^3)^2$
j) $(x^{n+3}x^n) \div x^{n+1}$ k) $a^{8m} \div (a^{3m} \div a^m)$ l) $(a^{8m} \div a^{3m}) \div a^m$

12) Calculer mentalement : 32^2, 28^2, $21 \cdot 19$, 35^2, 65^2.

13) Quel terme faut-il ajouter aux binômes suivants pour les transformer en carrés parfaits ?

a) $x^2 + 6x$ b) $4a^2b^4 + 9$ c) $16a^4 - 8a^2y^2$
d) $x^2 + bx$ e) $4b^4 + 9z^{12}$ f) $4a^2b^4 - ab^2$

14) Développer et réduire le plus possible. Indiquer le degré du polynôme obtenu.

a) $-xx^3x^2 + 2x^6 + 8x^3 - 3xx^2$ b) $(x-2) \cdot 3x$
c) $(x^2-3)(x^2+4)$ d) $(x-1)(x^2+x+1)$

15) Compléter :

a) $2a(a+b) - 3b(a-b) =$ b) $1 - (x-1) + 2(3x-1) =$
c) $(x+2)(x+7) =$ d) $(x-6)(x+8) =$
e) $(3x+2)^2 =$ f) $(5x^2-2)^2 =$
g) $(a^4-3a)^2 =$ h) $(-7a^2b + 3ab^3c)^2 =$
i) $((a+b)-(c+d))^2 =$ j) $(5x - 7xy + 3y)^2 =$
k) $(a^3b^4 + c) \cdot (a^3b^4 - c) =$ l) $(x^2 - 5x + 1)^2 =$
m) $(a+a^3) \cdot (a-a^3) \cdot (a^2+a^6) =$ n) $(x^4-1) \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+1) =$

16) A l'aide du triangle de Pascal établir la formule générale de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que le nombre de grilles différentes possibles au jeu de la Loterie à numéros est donné par le coefficient de a^6b^{39} du développement de $(a+b)^{45}$.

Plus généralement, le nombre de sous-ensemble de k objets choisis parmi n est donné par le coefficient de a^kb^{n-k} du développement de $(a+b)^n$.

Montrer que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n objet est 2^n.

17) Mettre en évidence le facteur commun :

a) $21st + 7t^2$ b) $5m + 15mn$ c) $22x - 33xy$
d) $6ab - 12b + 6bc$ e) $2ab + 4b^2 + 6bc$ f) $15a^2b - 10ab + 5a$
g) $15x^2y - 5xy + 10xy^2$ h) $16x^2yz + 24xyz^2$ i) $a(c+d) + b(c+d)$
j) $a(x-y) - (x-y)$ k) $r(a+2ab) - s(a+2ab)$ l) $x(x+y) - xy - y^2$

18) Décomposer en produits de facteurs irréductibles :

a) $y^3z^3 - 3yz$ b) $1 - 8z + 16z^2$ c) $4x^2 - 9y^2$

d) $9x^3 - 36x$ e) $xy^2 + 2xy + x$ f) $5y^3 - 5y$

g) $x^2 + 3x + 2$ h) $y^2 + 15y + 56$ i) $y^2 - 15y + 56$

j) $x^2 - 2x - 35$ k) $2x^2 + 14x + 24$ l) $5z^2 + 15z - 50$

m) $x^2 + xy + 2x + 2y$ n) $12xy - 16x + 27y - 36$ o) $8x^2 - 4xy - 6x + 3y$

p) $3x^2y^2 - 54x^2 - 9x^2y$ q) $36b^2 - 100$ r) $b^3 - bc^2$

19) Décomposer en produits de facteurs irréductibles :

a) $7a + 7ab - 7a^2$ b) $4a^2 - 1$ c) $a^3 - 8$

d) $x(a - b) + 3(a - b)$ e) $a^3 - 3a^2 + 27 - 9a$ f) $x^2 + 5x + 6$

g) $a^3 - a + 2a^2 - 2$ h) $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1)$ i) $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

j) $(-a - b)^3 + 4(a + b)$ k) $1 - x^2y^2$ l) $a^4 + 1 - 2a^2$

m) $a^3 + a^2 + 1 + a$ n) $2a^3 - 6a^2 + 6a - 2$ o) $a^2 + 2ab - x^2 + b^2$

p) $x^3 + x^2 - 6x$ q) $a^6 - b^6$ r) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

s) $2a^2 - 4a - 6$ t) $a^2 + 1 - b^2 - 2a$ u) $ax^8 - a$

v) $2a + 2b - (a + b)^2$ w) $2x^2 - 7x + 3$ x) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$

20) Ecrire l'inverse des expressions suivantes :

a) x b) $x - 2$ c) $3x$ d) $\dfrac{1}{x^3}$

e) $\dfrac{3}{x}$ f) $\dfrac{5}{y^2 + 1}$ g) $\dfrac{1}{\frac{1}{x+1}}$ h) 0

21) Simplifier :

a) $\dfrac{84m^3n^2p}{35m^4np^2}$ b) $\dfrac{5a + 5b}{7a + 7b}$ c) $\dfrac{a + ab}{2ab}$ d) $\dfrac{(a - b)^2}{b - a}$

e) $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x + 7}$ f) $\dfrac{4a^2 - 9}{10a - 15}$ g) $\dfrac{5x^2 + 5xy}{3x^2 - 3y^2}$ h) $\dfrac{8a^2b - 16ab^2}{12a^2x - 48b^2x}$

22) Simplifier le plus possible et effectuer :

a) $\dfrac{x}{x + 1} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2}$ b) $\dfrac{x - 3}{10} \cdot \dfrac{15}{x - 3}$

c) $7 \cdot \dfrac{x + y}{14}$ d) $(x + 5) \cdot \dfrac{x}{x^2 + 10x + 25}$

e) $\dfrac{2b^3}{5} \div \dfrac{b^2}{20}$ f) $-\dfrac{x^2}{6} \div \dfrac{x}{2}$

g) $\dfrac{e - 1}{e + 2} \div \dfrac{1}{(e + 2)^2}$ h) $\dfrac{7x + 7y}{x} \div 7$

23) Effectuer et simplifier, s'il y a lieu :

a) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}$

b) $\dfrac{a}{3}-\dfrac{2a}{5}+a$

c) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{a}{2}$

d) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

e) $\dfrac{4}{3x}+\dfrac{1}{x}$

f) $\dfrac{2a}{3}+\dfrac{4a}{3}$

g) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

h) $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}$

i) $\dfrac{1}{3a}-\dfrac{1}{4a}$

j) $\dfrac{1}{x-1}-1$

k) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$

l) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

m) $\dfrac{2}{a+2}+\dfrac{1}{2-a}-\dfrac{4}{4-a^2}$

n) $\dfrac{3x-2y}{2}-\dfrac{4y+2x}{5}+\dfrac{22y-9x}{15}$

o) $\dfrac{6}{x(3x-2)}+\dfrac{5}{3x-2}-\dfrac{2}{x^2}$

p) $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$

24) Effectuer et simplifier, s'il y a lieu :

a) $\dfrac{4x}{3x-4}+\dfrac{8}{3x^2-4x}+\dfrac{2}{x}$

b) $\dfrac{12x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x^2+x}+\dfrac{5}{x}$

c) $\dfrac{3a+2b}{a}+\dfrac{2a^2-2b^2}{ab}-\dfrac{2a+3b}{b}$

d) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}-\dfrac{3a^2}{a^3+b^3}+\dfrac{a}{a^2-ab+b^2}$

e) $\dfrac{x(1+y)}{x^n}+\dfrac{x-y}{x^{n-1}}-\dfrac{1}{x^{n-2}}$

f) $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{xy}{x^3+y^3}$

g) $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}-\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}$

h) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}$

i) $\dfrac{2x+6}{x^2+6x+9}+\dfrac{5x}{x^2-9}+\dfrac{7}{x-3}$

j) $\dfrac{3x}{2x-5}-\dfrac{x}{2x+5}-\dfrac{4x}{4x^2-25}$

k) $\dfrac{16x}{2x+8}+\dfrac{5}{x^2+x-12}-\dfrac{x-4}{x-3}$

l) $\dfrac{3-6x}{4x^2-1}-\dfrac{2+5x}{4x^2+4x+1}$

m) $\dfrac{4x^2-4x}{x^2+x-2}-\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-4x}$

n) $\dfrac{81-54x+9x^2}{3x^2-15x+18}-\dfrac{2x^2-6x+4}{4x^2-8x+4}$

o) $\dfrac{\frac{1}{x+2}-3}{\frac{4}{x}-x}$

p) $\dfrac{\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x+3}}$

25) Simplifier le plus possible et effectuer :

a) $\dfrac{3(a^2-b^2)}{5bc}\cdot\dfrac{10c}{9(a+b)}$

b) $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(a+\dfrac{ax}{a-x}\right)$

c) $\dfrac{a^2-4x^2}{a^2+4ax}\div\dfrac{a^2-2ax}{ax+4x^2}$

d) $\dfrac{(27x^3-8y^6)(x-4y)}{2x(3x-2y^2)}$

e) $\dfrac{3a^2b^2-6b^2c}{a^4-4a^2c+4c^2}$

f) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}\div\dfrac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2}$

26) Simplifier :

a) $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}}$

b) $\dfrac{x+y+\frac{y^2}{x}}{x+y+\frac{x^2}{y}}$

c) $\dfrac{a-1+\frac{8}{a-8}}{a-2+\frac{4}{a-8}}$

d) $\dfrac{1-x+x^2-\frac{x^3}{x+1}}{1+\frac{1}{x^2-1}}$

e) $\dfrac{\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}}{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}$

f) $\dfrac{x-a}{x-\frac{(x-a)(x-b)}{x+a}}$

g) $\dfrac{1}{1+\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}}}$

h) $\dfrac{abc}{bc+ac-ab}-\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}-\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$

i) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$

j) $\left(\dfrac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}\div\dfrac{1}{a+\frac{1}{b}}\right)-\dfrac{1}{b(abc+a+c)}$

27) Lequel de ces calculs est correct ?

a) $6+3\cdot 2=9\cdot 2=18$ <u>ou</u> $6+3\cdot 2=6+6=12$

b) $4+5\cdot(6+3)=4+45=49$ <u>ou</u> $4+5\cdot(6+3)=9\cdot 9=81$

c) $13-4+5=9+5=14$ <u>ou</u> $13-4+5=13-9=4$

d) $2+10\cdot 17-7=12\cdot 10=120$ <u>ou</u> $2+10\cdot 17-7=2+170-7=165$

e) $6+\frac{10}{2}=\frac{16}{2}=8$ <u>ou</u> $6+\frac{10}{2}=6+5=11$

f) $5\cdot 2+9-4(2+5)=19-28=-9$ <u>ou</u> $5\cdot 2+9-4(2+5)=55-28=27$

28) Ecrire les expressions suivantes en termes algébriques :

a) l'entier suivant le nombre entier n
b) le triple du nombre n
c) le double de l'entier précédant le nombre entier n
d) le produit de deux nombres entiers consécutifs
e) un nombre pair
f) une puissance de 2
g) l'inverse de x
h) l'opposé de x
i) le double du carré de l'inverse de l'opposé de l'entier précédant le quadruple du nombre entier n

29) Associer la bonne description aux expressions algébriques :

$x+y$	est un produit
x^2-y^2	est le double du carré d'une somme
$2(x+y)^2$	est le carré du double d'une somme
$(x-y)^2$	est la somme des carrés
xy	est le carré d'une somme
$(x+y)^2$	est une somme
$(x-y)(x+y)$	est le carré d'une différence
$2xy$	est la différence des carrés
$(2(x+y))^2$	est un double produit
x^2+y^2	est le produit d'une somme par une différence

30) Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$ b) $\dfrac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$ c) $\dfrac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$ d) $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

31) On donne les valeurs de $x_1,\ldots,x_7$ et $n_1,\ldots,n_7$ dans le tableau ci-dessous.

Indice i	Valeur de x_i	Valeur de n_i
1	0	1
2	1	1
3	2	2
4	3	5
5	4	7
6	5	8
7	6	2

Avec des données ci-dessus, calculez les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} x_i$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} n_k$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i \sum_{j=1}^{4} x_j$

32) Démontrer :

a) $\displaystyle 1+4+9+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\displaystyle 1+3+5+\ldots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2$

c) $\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^n}$

d) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

e) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)-4}{(k+1)(k+2)}=\frac{n^2}{n+2}$

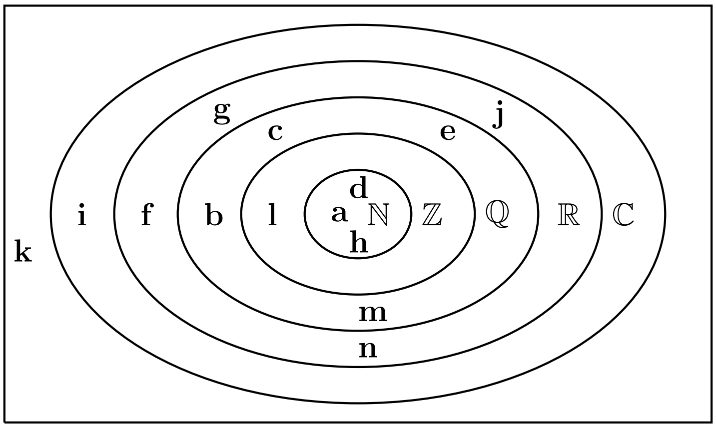
f) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{n}{3n+1}$

g) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 $\forall n \in \mathbb{N}$.

h) $7^{n+1} + 2$ est divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.9 Solutions des exercices

1)



2) i) $1,4 \cdot 10^7$ j) $1,004 \cdot 10^0$ k) $4 \cdot 10^{-6}$

l) $8,1 \cdot 10^{-4}$ m) $1,43 \cdot 10^2$ n) $2,3090 \cdot 10^1$

3) $14'520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$, $10'725 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$, $9126 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13^2$

$pgdc = 3$, $ppmc = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$

4) a) $\frac{3}{x} + 2 + 4 \cdot 3 - 1$ b) $4 \cdot x + 5 \cdot (2 + x)$

c) $(x+2) \cdot (x-1) + 3 \cdot x - (x+2)$ d) $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

5) a) $\frac{5}{3}$ b) 7 c) 6 d) $\frac{5}{8}$

6) a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{8}{3}$ c) 2 d) $\frac{13}{12}$ e) $\frac{65}{77}$ f) $\frac{5}{9}$

g) $\frac{19}{32}$ h) $\frac{49}{36}$ i) $\frac{4}{7}$ j) $\frac{113}{42}$ k) $\frac{13}{4}$ l) $\frac{59}{30}$

m) $\frac{91}{48}$ n) $\frac{215}{72}$ o) $\frac{127}{54}$ p) $-\frac{12}{5}$ q) $\frac{57}{115}$

7) a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2 d) $\frac{7}{4}$

8) a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{7}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{124}{91}$

e) $\frac{29}{23}$ f) $\frac{108}{7}$

9) a) 1 b) $\frac{9}{20}$ c) $\frac{7}{3}$ d) 2 e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{1}{33}$

g) 3 h) $\frac{513}{230}$ i) $\frac{2}{7}$ j) $\frac{41}{12}$

10) a) 3^{11} b) 14^5 c) 3^8 d) 5^6 e) 2^8 f) 3^9
g) 2^{21} h) $6^6 \cdot 2^3$ i) 5^{13} j) 3^{17} k) 3^{21} l) 2^{18}
m) 3^8 n) 2^8 o) a^{11} p) $(b \cdot c)^3$ q) 2^{12m} r) a^6
s) $a^6 \cdot b^{10}$ t) $6a^3b^7$ u) $6a^5b^{19}$ v) $24a^5b^{19}$ w) 2^{m+n}
x) $\begin{cases} 2^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ 1 \div 2^{n-m} & \text{si } m < n \end{cases}$

11) a) $10x^{n+1}y^{n+3}z^5$ b) $9x^{2n+2}y^{4n+1}z^{2p+6}$ c) $9x^{2n+4}y^{4n+2}z^{2p+6}$
d) a^4b^{4n} e) $\begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ f) $3a^mb^{n+15}c^{3m}$
g) $64a^{6m+8}$ h) $-2x^7y^3$ i) $-8x^{19}y^{12}$
j) x^{n+2} k) a^{6m} l) a^{4m}

12) $32^2 = 1024$, $28^2 = 784$, $21 \cdot 19 = 399$, $35^2 = 1225$, $65^2 = 4225$

13) a) $x^2 + 6x + \mathbf{9}$ b) $4a^2b^4 + 9 + \mathbf{12ab^2}$ c) $16a^4 - 8a^2y^2 + \mathbf{y^4}$
d) $x^2 + bx + \mathbf{\frac{b^2}{4}}$ e) $4b^4 + 9z^{12} + \mathbf{12b^2z^6}$ f) $4a^2b^4 - ab^2 + \mathbf{\frac{1}{16}}$

14) a) $x^6 + 5x^3$, deg$= 6$ b) $3x^2 - 6x$, deg$= 2$
c) $x^4 + x^2 - 12$, deg$= 4$ d) $x^3 - 1$, deg$= 3$

15) a) $2a^2 - ab + 3b^2$ b) $5x$
c) $x^2 + 9x + 14$ d) $x^2 + 2x - 48$
e) $9x^2 + 12x + 4$ f) $25x^4 - 20x^2 + 4$
g) $a^8 - 6a^5 + 9a^2$ h) $49a^4b^2 - 42a^3b^4c + 9a^2b^6c^2$
i) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd$
j) $49x^2y^2 - 70x^2y + 25x^2 + 30xy - 42xy^2 + 9y^2$
k) $a^6b^8 - c^2$ l) $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 10x + 1$
m) $a^4 - a^{12}$ n) $x^8 - 2x^4 + 1$

17) a) $7t(3s + t)$ b) $5m(1 + 3n)$ c) $11x(2 - 3y)$
d) $6b(a - 2 + c)$ e) $2b(a + 2b + 3c)$ f) $5a(3ab - 2b + 1)$
g) $5xy(3x - 1 + 2y)$ h) $8xyz(2x + 3z)$ i) $(a + b)(c + d)$
j) $(a - 1)(x - y)$ k) $a(1 + 2b)(r - s)$ l) $(x + y)(x - y)$

18) a) $yz(y^2z^2-3)$ b) $(1-4z)^2$ c) $(2x+3y)(2x-3y)$
d) $9x(x+2)(x-2)$ e) $x(y+1)^2$ f) $5y(y+1)(y-1)$
g) $(x+1)(x+2)$ h) $(y+7)(y+8)$ i) $(y-7)(y-8)$
j) $(x-7)(x+5)$ k) $2(x+3)(x+4)$ l) $5(z+5)(z-2)$
m) $(x+y)(x+2)$ n) $(4x+9)(3y-4)$ o) $(4x-3)(2x-y)$
p) $3x^2(y-6)(y+3)$ q) $4(3b+5)(3b-5)$ r) $b(b+c)(b-c)$

19) a) $7a\cdot(b-a+1)$ b) $(2a+1)\cdot(2a-1)$ c) $(a-2)\cdot(a^2+2a+4)$
d) $(x+3)\cdot(a-b)$ e) $(a-3)^2(a+3)$ f) $(x+3)\cdot(x+2)$
g) $(a+2)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$ h) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$
i) $(a+b)^2\cdot(a-b)^2$ j) $(a+b)\cdot(2+a+b)\cdot(2-a-b)$
k) $(1+xy)\cdot(1-xy)$ l) $(a+1)^2\cdot(a-1)^2$ m) $(a+1)\cdot(a^2+1)$
n) $2(a-1)^3$ o) $(a+b+x)\cdot(a+b-x)$ p) $x\cdot(x+3)\cdot(x-2)$
q) $(a+b)\cdot(a-b)\cdot(a^2-ab+b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)$ r) $(x+y)^2\cdot(x-y)^2$
s) $2\cdot(a-3)\cdot(a+1)$ t) $(a+b-1)\cdot(a-b-1)$
u) $a\cdot(x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ v) $(a+b)\cdot(2-a-b)$
w) $(2x-1)(x-3)$ x) $(a+b)^2\cdot(a-b)^2$

20) a) $\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}$ c) $\dfrac{1}{3x}$ d) x^3
e) $\dfrac{x}{3}$ f) $\dfrac{y^2+1}{5}$ g) $\dfrac{1}{x+1}$ h) $--$

21) a) $\dfrac{12n}{5mp}$ b) $\dfrac{5}{7}$ c) $\dfrac{1+b}{2b}$ d) $b-a$
e) $x-3$ f) $\dfrac{2a+3}{5}$ g) $\dfrac{5x}{3(x-y)}$ h) $\dfrac{2ab}{3x(a+2b)}$

22) a) $\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{x+y}{2}$ d) $\dfrac{x}{x+5}$
e) $8b$ f) $-\dfrac{x}{3}$ g) $(e-1)(e+2)$ h) $\dfrac{x+y}{x}$

23) a) $\dfrac{5a}{6}$ b) $\dfrac{14a}{15}$ c) $\dfrac{(2+a)(2-a)}{2a}$ d) $\dfrac{a+b}{ab}$
e) $\dfrac{7}{3x}$ f) $2a$ g) $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$ h) y
i) $\dfrac{1}{12a}$ j) $\dfrac{2-x}{x-1}$ k) $\dfrac{5x}{(x+2)(x-3)}$ l) $\dfrac{1}{b-a}$

m) $\dfrac{1}{a+2}$ n) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y$ o) $\dfrac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}$ p) $\dfrac{2x-1}{x}$

24) a) $\dfrac{2(2x+3)}{3x-4}$ b) $\dfrac{2(3x+1)}{x}$ c) 0 d) $\dfrac{b-a}{a^2-ab+b^2}$

e) $\dfrac{1}{x^{n-1}}$ f) $\dfrac{2x^2}{x^3+y^3}$ g) $-\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$ h) $\dfrac{1}{x-2}$

i) $\dfrac{14x+15}{(x+3)(x-3)}$ j) $\dfrac{4x(x+4)}{(2x-5)(2x+5)}$

k) $\dfrac{7x^2-24x+21}{(x+4)(x-3)}$ l) $\dfrac{-11x-5}{(2x+1)^2}$

m) $\dfrac{4x^2-x-5}{x(x+2)}$ n) $\dfrac{5x^2-20x+14}{2(x-2)(x-1)}$

o) $\dfrac{x(3x+5)}{(x+2)^2(x-2)}$ p) $\dfrac{2x^2+7x+15}{x^2+10x+7}$

25) a) $\dfrac{2(a-b)}{3b}$ b) $\dfrac{a^2(a-b)}{x}$ c) $\dfrac{x(a+2x)}{a^2}$

d) $\dfrac{(x-4y)(9x^2+6xy^2+4y^4)}{2x}$ e) $\dfrac{3b^2}{a^2-2c}$ f) $\dfrac{1}{a^2-b^2}$

26) a) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ b) $\dfrac{y}{x}$ c) $\dfrac{a^2-9a+16}{a^2-10a+20}$ d) $\dfrac{x-1}{x^2}$

e) 1 f) $\dfrac{x^2-a^2}{2ax+bx-ab}$ g) $\dfrac{1+a^2}{1+a}$ h) 1

i) a j) 1

28) a) $n+1$ b) $3n$ c) $2(n-1)$ d) $n\cdot(n+1)$

e) $2n$ f) 2^n g) $\dfrac{1}{x}$ h) $-x$

i) $2\left(\dfrac{1}{1-4n}\right)^2$

29)

$x+y \longrightarrow$ est une somme
$x^2-y^2 \longrightarrow$ est la différence des carrés
$2(x+y)^2 \longrightarrow$ est le double du carré d'une somme
$(x-y)^2 \longrightarrow$ est le carré d'une différence
$xy \longrightarrow$ est un produit
$(x+y)^2 \longrightarrow$ est le carré d'une somme
$(x-y)(x+y) \longrightarrow$ est le produit d'une somme par une différence
$2xy \longrightarrow$ est un double produit
$(2(x+y))^2 \longrightarrow$ est le carré du double d'une somme
$x^2+y^2 \longrightarrow$ est la somme des carrés

30) a) $\dfrac{t+25+10\sqrt{t}}{t-25}$ b) $\dfrac{t+16-8\sqrt{t}}{t-16}$

c) $(9x+4y)\cdot(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})$ d) $(4x+y)\cdot(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$

31) a) 10 b) 24 c) 20 d) 54

Chapitre 2

Equations

2.1 Généralités

Définition 2.1
Une **équation** est une *égalité* dont l'un ou les deux membres sont des expressions littérales contenant une ou plusieurs lettres et des nombres.

Une lettre utilisée dans l'écriture d'une équation est une **inconnue** (ou une variable) dès le moment où on s'intéresse à en déterminer la valeur pour que l'égalité soit vérifiée. La ou les inconnues sont généralement désignées par les lettres x, y ou z.

Exemple

1) $\underbrace{x^2 - 5}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{4x}_{\text{membre de droite}}$ *: équation à une inconnue x.*

2) $4y - 1 = x$ *: équation à deux inconnues x et y si on cherche à déterminer leur valeur.*

3) $x + y = b$ *: équation à deux inconnues x et y si on cherche à déterminer leur valeur et la lettre b représente une valeur fixe.*

Définition 2.2
Pour les définitions suivantes, on considère le cas d'une équation en une inconnue notée x.

1) Un nombre a qui vérifie l'égalité quand il est substitué à l'inconnue x est appelé **solution** ou **racine** de l'équation. On dit alors que *a vérifie* ou *satisfait* l'équation.
2) Une équation est **résolue** lorsqu'on a déterminé toutes ses solutions. La recherche de ses solutions se nomme la **résolution** de l'équation (on dira généralement "résoudre une équation").
3) Toutes les solutions d'une équation forme l'**ensemble des solutions**, généralement noté S. On énumérera parfois ces solutions en écrivant $x_1 = \ldots$, $x_2 = \ldots$, $x_3 = \ldots$, $\ldots$

Ces définitions peuvent s'étendre aux cas d'équations à plusieurs inconnues.

Exemple

5 est solution de l'équation $x^2 - 5 = 4x$ *car* $5^2 - 5 = 20$ *et* $4 \cdot 5 = 20$.

Une autre solution de cette équation est -1 *car* $(-1)^2 - 5 = -4$ *et* $4 \cdot (-1) = -4$.

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{-1; 5\}$.

Définition 2.3
Deux équations **équivalentes** sont deux équations qui ont exactement le même ensemble de solutions.

Exemples

1) Les équations $x - 5 = 8 - x$ *et* $5x = 32,5$ *sont équivalentes. Leur ensemble de solutions est* $S = \left\{\frac{13}{2}\right\}$.

2) Les équations $10 - 2y = y^2 + y$ *et* $y^2 + 3y - 10 = 0$ *sont équivalentes. Leur ensemble de solutions est* $S = \{-5; 2\}$.

3) Les équations $5x = 15$ *et* $5x^2 = 15x$ *ne sont pas équivalentes car* 0 *est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première.*

Règles d'équivalence

Les règles suivantes permettent de transformer une équation en une équation équivalente :

- permuter les deux membres de l'équation,
- effectuer du calcul littéral dans l'un ou l'autre de ses membres,
- additionner (ou soustraire) un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux **deux** membres de l'équation,
- multiplier (ou diviser) les **deux** membres de l'équation par un même nombre non nul.

Dans la pratique, on utilisera souvent une suite de transformations équivalentes sur l'équation à résoudre afin d'obtenir une équation équivalente où l'ensemble des solutions est plus facile à déterminer.

Exemple

Pour résoudre l'équation $4(x + 2) = 9x - 12 + x$, *on peut procéder comme suit :*

$$\begin{array}{rcl|l}
4(x+2) & = & 9x - 12 + x & \textit{calcul littéral (CL)} \\
4x + 8 & = & 10x - 12 & +12 \ \textit{(ajouter } 12 \textit{ aux deux membres)} \\
4x + 20 & = & 10x & -4x \ \textit{(soustraire } 4x \textit{ aux deux membres)} \\
20 & = & 6x & \textit{permuter les deux membres} \\
6x & = & 20 & \div 6 \ \textit{(diviser les deux membres par } 6\textit{)} \\
x & = & \frac{10}{3} &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de toutes ces équations équivalentes (en particulier de l'équation de départ) est donc : $S = \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

Remarques

Attention ! Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une équation par l'inconnue ou par un polynôme, on peut obtenir une équation non équivalente à la première. On peut supprimer ou ajouter des solutions.

- Si on multiplie les deux membres de l'équation $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ par le polynôme $x - 2$, on trouve l'équation $x = 2$. La deuxième équation admet comme ensemble de solutions $S = \{2\}$ et la première $S = \emptyset$ $\rightarrow$ En substituant 2 à x dans la première équation, on obtient une division par 0. On a donc ajouté la solution égale à 2.
- Si on divise les deux membres de l'équation $x^2 = x$ par le monôme x, on trouve l'équations $x = 1$. La deuxième équation a comme ensemble de solutions $S = \{1\}$ et la première $S = \{0; 1\}$. On a perdu une solution égale à 0.

Dans la pratique, on se permettra tout de même de réaliser ces transformations dans certaines résolutions mais il sera alors nécessaire de **tester les solutions** obtenues dans l'équation de départ (en substituant ces solutions à l'inconnue, voir exemple au paragraphe *à complter*).

Définition 2.4
On appelle **zéros** ou **racines** d'un polynôme $p(x)$ les solutions de l'équation : $p(x) = 0$.

Si le nombre réel a est un zéro du polynôme $p(x)$ alors $p(a) = 0$.

Exemple

2 est un zéro du polynôme $p(x) = x^2 - 4$ *car* 2 *est solution de l'équation* $x^2 - 4 = 0$. *De plus,* $p(2) = 2^2 - 4 = 0$.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne traiterons que des équations à **une** inconnue. On désignera cette inconnue par la lettre x.

2.2 Equations du premier degré

Définition 2.5
Une **équation du premier degré** à une inconnue est une équation équivalente (qui peut être mise sous la forme) à l'équation :

$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Remarque

Dans une équation du premier degré, l'inconnue apparaît seulement à la puissance 1. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $3x - 2 = 0$

2) $4x - 3 = 8x - 7 + 2x - 1$

Solution

L'équation (2.1) possède une **unique** solution : $x = -\frac{b}{a}$.

Une équation du premier degré est rarement donnée sous la forme (2.1) et sa solution ne peut donc pas être donnée immédiatement comme ci-dessus. On utilisera alors les règles d'équivalence pour résoudre une telle équation.

2.2.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation du premier degré :

1. réduire les polynômes figurant dans chacun des deux membres,

2. "passer" les termes en x dans un des membres et les termes constants dans l'autre en utilisant la règle d'addition $\rightarrow$ obtenir une équation de la forme $ax = b$,

3. isoler (on dit aussi expliciter) x en divisant les deux membres par a $\rightarrow$ obtenir $x = \ldots$.

Il arrive qu'une, ou plusieurs, de ces étapes soient inutiles ou que d'autres méthodes soient plus avantageuses, selon les cas.

Exemple

Résoudre : $4x + 2 - (1 - x) = 3x + 4 - x$.

$$\begin{array}{rcl|l}
4x + 2 - (1 - x) & = & 3x + 4 - x & \text{CL (réduire les deux polynômes)} \\
5x + 1 & = & 2x + 4 & -1 \\
5x & = & 2x + 3 & -2x \\
3x & = & 3 & \div 3 \\
x & = & 1 &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{1\}$.

2.3 Equations du deuxième degré

Définition 2.6
Une **équation du deuxième degré** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Remarque

Dans une équation du deuxième degré, l'inconnue apparaît à la puissance 2 et éventuellement à la puissance 1. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

2) $4(x-2)^2 = 2x - 1$

2.3.1 Résolution par factorisation

Proposition 2.1
Soit $p(x)$ un polynôme et $a(x)$, $b(x)$, ..., $m(x)$ des polynômes tels que $p(x) = a(x) \cdot b(x) \cdot \ldots \cdot m(x)$: une **factorisation** de $p(x)$.
L'ensemble des solutions de l'équation

$$p(x) = 0 \qquad \text{ou (équivalent)} \qquad a(x) \cdot b(x) \cdot \ldots \cdot m(x) = 0$$

est égal à la réunion des ensembles de solutions des équations :

$$\begin{aligned} a(x) &= 0, \\ b(x) &= 0, \\ &\vdots \\ m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Cette proposition découle immédiatement du fait qu'un produit de plusieurs facteurs est nul si et seulement si au moins un de ces facteurs est nul.

En se fondant sur cette proposition, on peut résoudre certaines équations du deuxième degré en **devinant une factorisation** du membre de droite ou de gauche de l'équation (un polynôme de degré 2) si le membre de gauche, respectivement de droite, est *égal à* 0. On utilise les techniques vues au chapitre (1.4.3) pour déterminer une factorisation : mise en évidence, identité remarquable, ...

Exemples

1) Résoudre : $x^2 + 5x = 0$.

En mettant x en évidence, on obtient l'équation équivalente :

$$x(x+5) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

- $x_1 = 0$
- $x + 5 = 0 \longrightarrow x_2 = -5$

En conséquence : $S = \{0; -5\}$

2) Résoudre : $x^2 - 2x - 24 = 0$.

En devinant une factorisation du membre de gauche, on obtient l'équation équivalente :

$$(x+4)(x-6) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

- $x + 4 = 0 \longrightarrow x_1 = -4$
- $x - 6 = 0 \longrightarrow x_2 = 6$

En conséquence : $S = \{-4; 6\}$

3) Résoudre : $x^2 = 3$.

Cette équation est équivalente à l'équation $x^2 - 3 = 0$. *En utilisant une identité remarquable, on devine une factorisation du membre de gauche :*

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

$\ast$ $x + \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x_1 = -\sqrt{3}$

$\ast$ $x - \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x_2 = \sqrt{3}$

En conséquence : $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Remarque

Attention ! L'équation de l'exemple 3) possède deux solutions : $\pm\sqrt{3}$. Ce résultat est vrai pour toutes les équations du type $x^2 = a$ avec $a > 0$, qui admettent comme solutions les nombres $\pm\sqrt{a}$. Il faut prendre garde à ne pas oublier la solution $-\sqrt{a}$! ! !

2.3.2 Résolution à l'aide d'une formule

Proposition 2.2
Soit l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de cette équation le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre de solutions de l'équation dépend du signe de Δ :

- si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes : $\boxed{x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$,

- si $\Delta = 0$: une solution double : $\boxed{x_1 = \dfrac{-b}{2a}}$,

- si $\Delta < 0$: pas de solution réelle ($S = \emptyset$).

Démonstration. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On transforme le membre de gauche par une suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{=0} + \frac{c}{a}\right) \\
&\overset{id.\ rem.}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Comme $a \neq 0$, l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

est équivalente à l'équation de départ. La suite de la résolution dépend du signe de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Le dénominateur, $4a^2$, est toujours positif et le signe du numérateur, $\Delta = b^2 - 4ac$, dépend des valeurs de a, b et c.

Si $\Delta > 0$: il y a deux nombres dont le carré est $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

* Première solution : $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
* Seconde solution : $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$: le membre de droite de l'équation vaut 0.

* Une solution double : $x + \dfrac{b}{2a} = 0 \longrightarrow x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$: le membre de droite de l'équation est négatif : $\frac{b^2-4ac}{4a^2} < 0$.

* Pas de solution réelle : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < 0$.

□

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation du deuxième degré :

1. réduire les polynômes figurant dans chacun des deux membres,

2. "passer" tous les termes en x dans un des membres en utilisant la règle d'addition → obtenir une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$,

3. appliquer la formule de résolution ou deviner une factorisation pour obtenir la ou les solutions.

Exemple

Résoudre : $2 \cdot (x-3)^2 = x^2 - 3 \cdot (3x-5) + 1$.

$$\begin{array}{rcl|l} 2 \cdot (x-3)^2 & = & x^2 - 3 \cdot (3x-5) + 1 & \textit{CL (réduire les deux polynômes)} \\ 2x^2 - 12x + 18 & = & x^2 - 9x + 16 & -(x^2 - 9x + 16) \\ x^2 - 3x + 2 & = & 0 & \end{array}$$

On applique la formule de résolution des équations du deuxième degré avec $a = 1$, $b = -3$ *et* $c = 2$.

– *Calcul du discriminant :* $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

– $\Delta > 0$ *: 2 solutions distinctes :*

  * $x_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2$
  * $x_2 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 1$

– *Ensemble des solutions :* $S = \{1; 2\}$.

2.3.3 Factorisation d'un polynôme de degré 2

Il est possible de factoriser directement un polynôme de degré 2 si on connaît ses zéros, sans devoir tâtonner.

Proposition 2.3
Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$ et le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation $p(x) = 0$.

Si $\Delta > 0$: le polynôme $p(x)$ possède deux zéros distincts x_1 et x_2 et on peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Si $\Delta = 0$: le polynôme $p(x)$ possède un zéro double x_1 et on peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)^2}$$

Si $\Delta < 0$: le polynôme $p(x)$ ne possède pas de zéro et on ne peut pas le décomposer en un produit de deux facteurs du premier degré.

Remarque

Attention ! Lorsqu'on utilise cette proposition pour factoriser un polynôme de degré 2, il ne faut pas oublier le **coefficient dominant** comme premier facteur ! ! !

Démonstration. Soit $p(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$. On considère ici uniquement le cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. La démonstration des autres cas est laissée au lecteur.
Lors de la démonstration de la formule de résolution des équations du deuxième degré, on a vu que $ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Comme $\Delta > 0$, on peut utiliser les identités remarquables et obtenir :

$$\begin{aligned} a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a \cdot \left[\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \end{aligned}$$

□

Exemple

Le polynôme de degré 2, $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$, possède deux zéros : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -3$. On peut donc écrire la factorisation :

$$p(x) = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$$

2.3.4 Formules de Viète

Théorème 2.4
Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du deuxième degré avec $a \neq 0$ qui admet deux zéros distincts x_1 et x_2 alors :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}} \qquad \textbf{Formules de Viète}$$

Démonstration. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du deuxième degré avec deux zéros distincts x_1 et x_2. On peut écrire que

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{array}{cccccll} - & x^2 & : & a & = & a & , \\ - & x & : & b & = & -a \cdot (x_1 + x_2) & (1), \\ - & 1 & : & c & = & a \cdot x_1x_2 & (2). \end{array}$$

De l'équation (1), on tire que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et, de l'équation (2), que $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. □

On pourra utiliser ces formules de Viète pour deviner les zéros d'un polynôme du deuxième degré et ainsi déterminer une factorisation de ce polynôme.

> ***Exemple***
>
> *Les racines de $x^2 - 5x + 6$ sont, d'après les formules de Viète, deux nombres dont la somme est $-\dfrac{-5}{1} = 5$ et le produit $\dfrac{6}{1} = 6$. En tâtonnant, on trouve que ces deux nombres sont 2 et 3.*
> *On peut donc écrire que : $x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = (x - 2) \cdot (x - 3)$.*

2.4 Equations bicarrées

Il existe un type particulier d'équations de degré différent de 2 qu'on peut résoudre à l'aide de la formule vue au paragraphe précédent.

Définition 2.7
Une **équation bicarrée** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{2.3}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

> ***Exemples***
>
> *1)* $4x^6 + 2x^3 - 6 = 0$ *: équation bicarrée avec $n = 3$.*
>
> *2)* $-2x^{10} - 7x^5 + \frac{4}{5} = 0$ *: équation bicarrée avec $n = 5$.*

2.4.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation bicarrée (équation 2.3) :

1. poser $t = x^n$ et substituer $\rightarrow$ on obtient l'équation du deuxième degré $at^2 + bt + c = 0$,

2. trouver les solutions t_1 et t_2 (si elles existent) de cette équation à l'aide de la formule de résolution ou d'une factorisation,

3. résoudre les équations $x^n = t_1$ et $x^n = t_2$ (inconnue : x).

Exemple

Résoudre : $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$*. On reconnaît une équation bicarrée avec* $n = 2$*. On pose alors* $t = x^2$ *et on substitue pour obtenir :*

$$4t^2 + 11t - 3 = 0$$

On peut résoudre cette équation à l'aide de la formule de résolution des équations du second degré avec $a = 4$*,* $b = 11$ *et* $c = -3$*.*
– *Calcul du discriminant :* $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 169 = 13^2$*.*
– $\Delta > 0$ *: 2 solutions distinctes :*
  $\ast$ $t_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-11 + 13}{8} = \dfrac{1}{4}$
  $\ast$ $t_2 = \dfrac{-11 - \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-11 - 13}{8} = -3$

Pour la dernière étape, on utilise la relation entre x *et* t *pour poser les équations :*
  $\ast$ $x^2 = t_1 \longrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4}$*. Deux solutions :* $x_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ *et* $x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$
  $\ast$ $x^2 = t_2 \longrightarrow x^2 = -3$*. Pas de solution : un nombre élevé au carré ne peut pas être négatif.*

L'ensemble des solutions est : $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$*.*

2.5 Equations polynomiales

Définition 2.8
Une **équation polynomiale** de degré n à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$p(x) = 0 \qquad (2.4)$$

où $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$).

Remarque

Dans une équation polynomiale, l'inconnue apparaît élevée à une ou plusieurs puissances. La puissance la plus élevée nous donne, en principe, le degré du polynôme $p(x)$. On utilisera ces caractéristiques pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $2x^3 - 4x + 2 = 0$ *: équation polynomiale de degré* 3.

2) $8x^4 - 3x^2 + 2 = -7x^5 + 9x^3 - 2x$ *: équation polynomiale de degré* 5.

3) $5x^3 - 2x^2 - x + 1 = 5x^3 - 3$ *: équation polynomiale de degré* 2.

2.5.1 Division euclidienne

Rappel

La *division euclidienne* d'un nombre naturel a par un nombre naturel b a été étudiée à l'école secondaire. Par exemple, pour diviser 535 par 6, on suit le schéma suivant :

$$\begin{array}{rr|r} & 5\;3\;5 & 6 \\ \cline{3-3} \ominus & \underline{4\;8} & 8\;9 \\ & 5\;5 & \\ \ominus & \underline{5\;4} & \\ & 1 & \end{array}$$

où 89 est le *quotient* de la division et 1 le *reste*. Plus généralement, pour a et b, on obtient :

$$a = b \cdot q + r$$

où a est appelé le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste* qui doit être le plus petit nombre positif ou nul possible.
A partir de la "même" idée, on va pouvoir diviser deux polynômes en faisant apparaître un reste et un quotient.

Définition 2.9
Diviser un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$ à l'aide d'une **division euclidienne** revient à chercher des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

avec $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$.
On appelle $p(x)$ le **dividende**, $d(x)$ le **diviseur**, $q(x)$ le **quotient** et $r(x)$ le **reste**.

Pour réaliser cette division, nous allons utiliser l'**algorithme de division** ci-dessous illustré par un exemple.

Pour diviser $p(x) = 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3$ par le polynôme $d(x) = 2x^2 - 1$, on part du tableau suivant :

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 \;+\; 4x^3 \;-\; 7x^2 \qquad\quad +\; 3 & 2x^2 - 1 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

On place à gauche le dividende en **laissant un espace vide** pour les puissances de x "absentes" dans le polynôme et à droite le diviseur.

On suit ensuite les pas de l'algorithme :

1) Déterminer le monôme $m(x)$ par lequel il faut multiplier le terme de plus haut degré du diviseur, ici $2x^2$, pour obtenir le terme de plus haut degré du dividende, ici $6x^4$ $\longrightarrow$ Réponse : $m(x) = 3x^2$.

2) Reporter $m(x)$ dans la partie réservée au quotient (sous le diviseur).

3) Multiplier $d(x)$ par $m(x)$ et reporter le résultat sous le dividende en respectant les puissances de x $\longrightarrow$ Produit : $3x^2 \cdot (2x^2 - 1) = 6x^4 - 3x^2$.

4) Soustraire ce produit du dividende pour trouver un polynôme $s(x)$ $\longrightarrow$ Différence : $s(x) = (6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3) - (6x^4 - 3x^2) = 4x^3 - 4x^2 + 3$.

5) **- Si deg**$(s(x)) <$ **deg**$(d(x))$ **:** stop !
- Sinon : recommencer en 1 en prenant $s(x)$ comme "nouveau" dividende.

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 6x^4 + 4x^3 & - 7x^2 & & + 3 & 2x^2 - 1 \\ \cline{6-6}
\ominus & 6x^4 & - 3x^2 & & & 3x^2 + 2x - 2 \\ \cline{2-3}
 & 4x^3 & - 4x^2 & & + 3 & \\
\ominus & 4x^3 & & - 2x & & \\ \cline{2-4}
 & & - 4x^2 & + 2x & + 3 & \\
\ominus & & - 4x^2 & & + 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & + 1 &
\end{array}
$$

La dernière ligne de gauche fournit le reste et la ligne sous le diviseur le quotient. On a ainsi :

$$\underbrace{6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3}_{\text{dividende}} = \underbrace{(2x^2 - 1)}_{\text{diviseur}} \cdot \underbrace{(3x^2 + 2x - 2)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(2x + 1)}_{\text{reste}}$$

Définition 2.10
Un polynôme $p(x)$ est dit **divisible** par un polynôme $d(x)$ si le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ vaut zéro.

Remarque

Si le polynôme $p(x)$ est divisible par le polynôme $d(x)$, il existe un polynôme $q(x)$ tel que :

$$p(x) = d(x) \cdot q(x)$$

On peut donc écrire $p(x)$ comme le produit de 2 polynôme. On obtient alors une *factorisation* de $p(x)$.

Proposition 2.5
Si $p(x)$ est un polynôme de degré n et $d(x)$ un polynôme de degré m, le quotient de la division de $p(x)$ par $d(x)$ est un polynôme de degré $n - m$ et le reste un polynôme de degré inférieur à m.

Il découle de cette proposition que le reste de la division d'un polynôme de degré quelconque par un polynôme de degré 1 est de degré 0, donc un **nombre réel**.

Théorème 2.6
Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par le polynôme $x - a$ vaut $p(a)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si $q(x)$ est le quotient et r (un nombre réel !) le reste de la division de $p(x)$ par $x - a$, on a :

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

En remplaçant x par a, on obtient $p(a) = \underbrace{(a - a)}_{=0} \cdot q(a) + r = r$. □

Il découle du théorème précédent et de la définition de la divisibilité le théorème suivant :

Théorème 2.7
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes

1. a est une solution de l'équation $p(x) = 0$,
2. a est une racine de $p(x)$,
3. $p(x)$ est divisible par $x - a$.

avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple

Divisons $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ par $d(x) = x - 2$ à l'aide de l'algorithme de division.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 3x^3 & + & 2x^2 & - & x & + & 2 & & x - 2 \\ \cline{12-12}
\ominus & \underline{x^4} & \underline{-} & \underline{2x^3} & & & & & & & & x^3 - x^2 - 1 \\
 & & - & x^3 & + & 2x^2 & - & x & + & 2 & & \\
 & \ominus & \underline{-} & \underline{x^3} & \underline{+} & \underline{2x^2} & & & & & & \\
 & & & & & & - & x & + & 2 & & \\
 & & & & & \ominus & \underline{-} & \underline{x} & \underline{+} & \underline{2} & & \\
 & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

On obtient alors :

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (x^3 - x^2 - 1)$$

Ainsi, $p(x)$ est divisible par $x - 2$ car le reste est nul. 2 est donc une racine de $p(x)$, ce qu'on peut facilement vérifier : $p(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$.

2.5.2 Schéma de Horner

Le **schéma de Horner** s'avère souvent très utile lorsqu'on désire :
– diviser un polynôme $p(x)$ par le polynôme $x - a$,
– évaluer un polynôme $p(x)$ en a.
avec $a \in \mathbb{R}$.

Nous allons illustrer l'utilisation de ce schéma de Horner par un exemple.

On désire diviser le polynôme $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ par le polynôme $d(x) = x - 2$. On pourrait utiliser l'algorithme de division et trouver que :

$$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = (x - 2) \cdot (2x^3 + x^2 - 5) - 6 \qquad (2.5)$$

On peut également partir du tableau suivant (schéma de Horner) :

2	-3	-2	-5	4	
					2

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du polynôme, y compris ceux valant 0 ! Le ② de la deuxième ligne du tableau est le zéro du diviseur $d(x) = x - 2$.

On construit ensuite, en partant du coin inférieur gauche, le schéma suivant :

2	-3	-2	-5	4	
	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	
	4	2	0	-10	2
2	1	0	-5	-6	

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $q(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ et le reste $r = -6$. On retrouve donc bien l'équation (2.5).

De plus, la valeur de $p(x)$ en 2 est égale au reste $r = -6$ donnée par le schéma de Horner : $p(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -6$.

2.5.3 Principe de résolution

Pour les équations de degrés 3 et 4, il existe des formules du même type que celles que nous avons rencontrées pour le degré 2. Elles sont cependant relativement compliquées et on ne les utilisera pas dans ce cours. En 1826, Abel, mathématicien norvégien, a montré qu'une équation du cinquième degré ou plus ne peut se résoudre par radicaux (pas de solutions générales comme pour les équations du second degré).

Dans ce cours, nous allons utiliser une technique qui permet de résoudre un *petit nombre* d'équations polynomiales de degré supérieur à 2 et qui se base sur les techniques de division de polynômes.

Soit $p(x)$ un polynôme de degré supérieur à 2. Marche à suivre pour résoudre l'équation $p(x) = 0$:

1. chercher par tâtonnement une solution, a, de l'équation,

2. diviser le polynôme $p(x)$ par le binôme $x - a$, $\longrightarrow$ on obtient une polynôme $q(x)$ tel que $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$,

3. **- si deg**$(q(x)) > 2$ **:** recommencer en 1 en considérant l'équation $q(x) = 0$,

- si deg$(q(x)) \leqslant 2$ **:** résoudre l'équation $q(x) = 0$ à l'aide des techniques vues dans les chapitres précédents.

Remarques

1) Pour résoudre une équation polynomiale quelconque, il faut, avant de pouvoir débuter la procédure décrite ci-dessus, se ramener à une équation équivalente avec un des deux membres égal à zéro.

2) La solution a obtenue par tâtonnement est une racine de $p(x)$ car $p(a) = 0$.
3) D'une manière générale, on cherche tout d'abord des racines entières proches de zéro en testant dans l'ordre les nombres : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
4) Le degré de $q(x)$ est strictement inférieur à celui de $p(x)$ ce qui permet de "simplifier" le problème (on ne peut pas itérer les opérations sans fin).

Exemple

Résoudre : $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Essais successifs pour découvrir une solution :

– $x = 0 \longrightarrow 0^3 + 0^2 - 4 \cdot 0 - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: Non*

– $x = 1 \longrightarrow 1^3 + 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: Non*

– $x = -1 \longrightarrow (-1)^3 + (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: O.K*

$\Rightarrow x_1 = -1$ *est solution de l'équation.*

On divise alors le polynôme $x^3 + x^2 - 4x - 4$ *par le binôme* $x + 1$ *à l'aide du schéma de Horner.*

1	1	-4	-4	
	-1	0	4	-1
1	0	-4	0	

On obtient l'égalité $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x^2 - 4)$.

On résout alors l'équation $x^2 - 4 = 0$. *Cette équation est une équation du deuxième degré qu'on peut résoudre par factorisation en utilisant une identité remarquable. On trouve l'équation équivalente*

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

qui admet comme solution $x_2 = 2$ *et* $x_3 = -2$.

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est : $S = \{-2; -1; 2\}$.

2.5.4 Factorisation d'un polynôme de degré supérieur à 2

Définition 2.11

Rappel : **factoriser** un polynôme de degré n consiste à écrire ce polynôme sous forme d'un produit de polynômes de degré plus petit que n.

Un polynôme est dit **irréductible** s'il ne peut pas être écrit comme un produit de deux polynôme de degré $\geqslant 1$.

Exemples

1) Le polynôme $x^2 + 4$ *est irréductible.*

2) Le polynôme $x^2 - 4$ *n'est pas irréductible, car* $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

Théorème 2.8

Les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif.

Ainsi, tout polynôme peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

Pour factoriser un polynôme $p(x)$ de degré n avec $n > 2$ sous cette forme, on va procéder comme si on voulait résoudre l'équation $p(x) = 0$:

1. trouver une racine a de $p(x)$,

2. diviser $p(x)$ par $x - a$ pour obtenir

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

ce qui permet d'effectuer une étape de la factorisation complète du polynôme,

3. factoriser $q(x)$ en partant de 1 si $\deg(q(x)) = n - 1 > 2$ ou en utilisant les résultats de la section (2.3.3) si $\deg(q(x)) = 2$.

Remarques

1) Cette méthode ne permet pas de trouver la factorisation d'un polynôme $p(x)$ qui n'admet pas de polynôme de degré 1 dans sa factorisation. Ainsi, elle n'est pas utilisable pour le polynôme suivant qui se factorise pourtant facilement à l'aide d'une identité remarquable : $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$.
2) Cette procédure a une fin car le degré du quotient est toujours inférieur de 1 au degré du polynôme de départ (dividende).

Théorème 2.9
Un polynôme de degré n a au plus n zéros.

En se basant sur ce théorème et sur la procédure de factorisation ci-dessus, on peut, comme pour les polynômes de degré 2, donner immédiatement la factorisation d'un polynôme $p(x)$ de degré n si on connaît exactement les n zéros de celui-ci (donc l'ensemble de ses zéros d'après le théorème).

Proposition 2.10
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n zéros de ce polynôme. On peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

Remarque

Attention ! Lorsqu'on utilise cette proposition pour factoriser un polynôme de degré n, il ne faut pas oublier le **coefficient dominant** comme premier facteur !!!

Exemple

Soit le polynôme $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$. *Ses* 3 *zéros sont :* $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ *et* $x_3 = \frac{1}{3}$.
Une factorisation de ce polynôme en un produit de facteurs irréductibles est :

$$p(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - \frac{1}{3})$$

Les zéros dans la proposition ci-dessus ne sont pas nécessairement tous différents. Par exemple, $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ se factorise

$$p(x) = (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-1)$$

Si un facteur $x - a$ apparaît m fois, alors a est un **zéro de multiplicité** m du polynôme $p(x)$. Dans l'exemple ci-dessus, 1 est un zéro de multiplicité 2, et -3 un zéro de multiplicité 1.

A l'inverse, si a est un zéro de $p(x)$ de multiplicité m, alors $p(x)$ admet le facteur $(x-a)^m$ dans sa factorisation.

Le théorème suivant permet de "deviner" plus facilement un zéro de certains polynôme qu'en testant tous les nombres entiers proche de zéro.

Théorème 2.11
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers.

1) Si a est un zéro entier de $p(x)$, alors a est un diviseur de a_0.
2) Si $a = \frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $p(x)$, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de a_0 et v un diviseur de a_n

Exemple

Déterminer les zéros rationnels de $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

Les zéros entiers possibles sont ± 1, ± 2, *car les diviseurs de* 2 *sont* ± 1 *et* ± 2.

Les zéros rationnels possibles sont ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, *car les diviseurs de* 3 *sont* ± 1 *et* ± 3 *et les diviseurs de* 2 *sont* ± 1 *et* ± 2.

On obtient ici les trois zéros du polynôme car $p(1) = 0$, $p(-2) = 0$ *et* $p(\frac{1}{3}) = 0$.

2.6 Equations rationnelles

Définition 2.12
Une **équation rationnelle** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \tag{2.6}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes.

Remarque

Dans une équation rationnelle, l'inconnue apparaît au dénominateur d'une (ou plusieurs) fractions. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $\dfrac{3x-2}{4-x} = 0$

2) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3x}$

3) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{x-1} = -\dfrac{39}{x(x-1)}$

Solutions

Les solutions de l'équation (2.6) sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$ qui ne sont pas solution de l'équation $q(x) = 0$. L'ensemble des solutions est donc donné par : $S = \{a \in \mathbb{R} \mid p(a) = 0 \text{ et } q(a) \neq 0\}$.

Une équation rationnelle est rarement donnée sous la forme (2.6). Il faudrait donc trouver, par une suite d'opérations, une équation équivalente de la forme souhaitée pour pouvoir "calculer" ses solutions comme proposé ci-dessus. Dans la pratique, on procédera généralement un peu différemment.

2.6.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation rationnelle :

1. déterminer le polynôme *de plus petit degré possible* multiple de chaque dénominateur $\longrightarrow$ on appelle ce polynôme le "*ppmc*" des dénominateurs,

2. multiplier chaque membre de l'équation par ce "*ppmc*" et simplifier $\longrightarrow$ **les dénominateurs "disparaissent"**,

3. résoudre l'équation ainsi obtenue,

4. **vérifier** les solutions obtenues dans l'équation de départ !

Remarque

Attention ! Le fait de multiplier les deux membres d'une équation par un polynôme peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemples

1. *Le "ppmc" des polynômes* $x^3 \cdot (x-2)$ *et* $x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$ *est le polynôme* $x^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$.

   Pour construire ce "ppmc", on multiplie chacun des facteurs différents apparaissant dans les polynômes initiaux. Si un même facteur élevé à différentes puissances est présent dans plusieurs polynômes, on ne considère que la puissance la plus grande pour la construction du "ppmc".

2. *Résoudre :* $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{2}{5x-10}$.

   On détermine d'abord le "ppmc" des dénominateurs qui est le polynôme $5 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$. *Ensuite, on procède comme décrit ci-dessus :*

$$
\begin{array}{rcl|l}
\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} & = & \frac{2}{5x-10} & \cdot 5(x-2)(x+2) \ \textit{(multiplier par le "ppmc")} \\
\frac{5(x-2)(x+2)}{x-2} - \frac{3\cdot 5(x-2)(x+2)}{x+2} & = & \frac{2\cdot 5(x-2)(x+2)}{5x-10} & \textit{simplifier} \\
5(x+2) - 3 \cdot 5(x-2) & = & 2(x+2) & \textit{CL} \\
-10x + 40 & = & 2x + 4 & -40
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcl|l} -10x & = & 2x-36 & -2x \\ -12x & = & -36 & \div(-12) \\ x & = & 3 & \end{array}$$

Important ! *Il faut maintenant vérifier la solution obtenue en substituant* 3 *à* x *dans l'équation de départ.*

Vérification

$$* \quad \underbrace{\frac{1}{3-2} - \frac{3}{3+2}}_{=\frac{2}{5}} \stackrel{?}{=} \frac{2}{5} \longrightarrow O.K.$$

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S = \{3\}$.

2.7 Equations irrationnelles

Définition 2.13

Une **équation irrationnelle** à une inconnue est une équation où l'inconnue figure sous un radical $\sqrt[n]{\ldots}$.

Exemples

1) $\sqrt{3x-2} = 8$

2) $\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0$

3) $\sqrt[3]{4x-3} = \sqrt[6]{5x^2-7x+2} + 23x - 4$

2.7.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation irrationnelle :

1. isoler un radical $\sqrt[n]{\ldots}$ dans un des membres de l'équation à l'aide des règles d'équivalence,

2. élever les deux membres de l'équation à la puissance $n \longrightarrow$ le radical isolé disparaît,

3. *répéter les points* 1 *et* 2 *afin de faire disparaître l'ensemble des radicaux,*

4. résoudre l'équation à une inconnue obtenue,

5. **vérifier** les solutions obtenues dans l'équation de départ !

Remarque

Attention ! Le fait d'élever à la puissance n les deux membres d'une équation peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemple

Résoudre : $\sqrt{x+5}+x-1=0$.

$$\begin{array}{rcl|l}
\sqrt{x+5}+x-1 & = & 0 & -(x-1) \text{ (isoler le radical)} \\
\sqrt{x+5} & = & -x+1 & (\ldots)^2 \text{ (élever au carré)} \\
x+5 & = & (-x+1)^2 & \text{développer} \\
x+5 & = & x^2-2x+1 & -(x+5) \\
0 & = & x^2-3x-4 &
\end{array}$$

On résout alors l'équation du deuxième degré $x^2-3x-4=0$ *à l'aide de la formule de résolution avec* $a=1$, $b=-3$ *et* $c=-4$.

- *Calcul du discriminant :* $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25=5^2$.
- $\Delta>0$ *: 2 solutions distinctes :*
  - $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{3+5}{2}=4$
  - $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{3-5}{2}=-1$

Important ! *Il faut maintenant vérifier les solutions obtenues en les substituant à* x *dans l'équation de départ.*

<u>*Vérification*</u>

- $\underbrace{\sqrt{4+5}}_{=3}+4-1\stackrel{?}{=}0 \longrightarrow$ *Non*
- $\underbrace{\sqrt{-1+5}}_{=2}+(-1)-1\stackrel{?}{=}0 \longrightarrow$ *O.K.*

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S=\{-1\}$.

2.8 Exercices

1) Dans chacune des formules physiques suivantes, exprimer chaque lettre au moyen des autres.

a) $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ c) $x = \dfrac{1}{2}at^2 + x_0$ d) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

2) Résoudre les équations suivantes.

a) $10x - 38 + 5x = 20x - 18 + 4x - 11$ b) $4x + 7 + 20x - 17 = 24x - 10$

c) $-x + 8 = -1 + 2x$ d) $x - 10 = -9 + 3x$

e) $4x + 12 - (1 - x) = 5x + 2$ f) $4x + 12 - (1 - x) = 5x + 11$

g) $4x + 3 = 2(7x - 1)$ h) $7(x + 2) - x = 2(x - 1)$

i) $4x - (x + 3) = 5 - (1 - 3x)$ j) $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

k) $(5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$ l) $\dfrac{3 - x}{2} = \dfrac{9 + 7x}{6}$

m) $\dfrac{x - 1}{5} = \dfrac{3x + 2}{20}$ n) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{6} - x = 18$

o) $11 - \dfrac{x}{3} = 1 + \dfrac{x}{12}$ p) $\dfrac{1}{5}x + 2 = 3 - \dfrac{2}{7}x$

3) Résoudre les équations suivantes.

a) $(x - 2)(x + 3) = 0$ b) $(3x - 1)(3 - 4x) = 0$

c) $x(2x + 7) = 0$ d) $(2x + 1)^2 = 0$

e) $x^2 + 4x = 0$ f) $x = 3x^2$

g) $x^2 - 9 = 0$ h) $(x - 2)^2 = 9$

i) $(x + 5)^2 = -5$ j) $1 - (4x + 11)^2 = 0$

4) Résoudre les équations suivantes.

a) $3x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $2x^2 - x - 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$ d) $x(x + \sqrt{2}) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$

e) $x^2 - (3 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ f) $x^2 - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})x = 6\sqrt{3}$

g) $x(x + \sqrt{5}) = 2x$ h) $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$

i) $x^3 + 6x^2 + 5x = 0$ j) $x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$

5) Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{x-3}{x-5}=5$

b) $\dfrac{x-3}{x-5}=0$

c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{2x+1}$

e) $\dfrac{x-5}{x-3}-\dfrac{x-7}{x-1}=\dfrac{1}{2x-2}$

f) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=1$

g) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{8}{x^2-1}$

h) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}=0$

i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{9}$

j) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{x^2-1}=1$

6) Résoudre les équations suivantes.

a) $2+\sqrt[3]{1-5t}=0$

b) $\sqrt[4]{2x^2-1}=x$

c) $\sqrt{7-x}+5=x$

d) $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

e) $x=4+\sqrt{4x-19}$

f) $x+\sqrt{5x+19}=-1$

g) $\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3x}$

h) $\sqrt{11+8x}+1=\sqrt{9+4x}$

i) $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$

j) $\sqrt{1+4\sqrt{x}}=\sqrt{x}+1$

2.9 Solutions des exercices

2) a) $S=\{-1\}$ b) $S=\mathbb{R}$ c) $S=\{3\}$ d) $S=\{-\frac{1}{2}\}$
e) $S=\emptyset$ f) $S=\mathbb{R}$ g) $S=\{\frac{1}{2}\}$ h) $S=\{-4\}$
i) $S=\emptyset$ j) $S=\{-\frac{24}{29}\}$ k) $S=\{\frac{7}{31}\}$ l) $S=\{0\}$
m) $S=\{6\}$ n) $S=\{54\}$ o) $S=\{24\}$ p) $S=\{\frac{35}{17}\}$

3) a) $S=\{-3;2\}$ b) $S=\{\frac{1}{3};\frac{3}{4}\}$ c) $S=\{-\frac{7}{2};0\}$ d) $S=\{-0,5\}$
e) $S=\{-4;0\}$ f) $S=\{0;\frac{1}{3}\}$ g) $S=\{-3;3\}$ h) $S=\{-1;5\}$
i) $S=\emptyset$ j) $S=\{-\frac{5}{2};-3\}$

4) a) $S=\{\frac{-7\pm\sqrt{85}}{6}\}$ b) $S=\{-\frac{1}{2};1\}$ c) $S=\emptyset$
d) $S=\emptyset$ e) $S=\emptyset$ f) $S=\{\frac{-3+2\sqrt{3}\pm\sqrt{21+12\sqrt{3}}}{2}\}$
g) $S=\{0;2-\sqrt{5}\}$ h) $S=\{0\}$ i) $S=\{-5;-1;0\}$
j) $S=\{-2;0;3\}$

5) a) $S=\{\frac{11}{2}\}$ b) $S=\{3\}$ c) $S=\{3\}$ d) $S=\{-5\}$
e) $S=\{\frac{29}{7}\}$ f) $S=\emptyset$ g) $S=\emptyset$ h) $S=\{-3;0\}$
i) $S=\{-\frac{3}{4};3\}$ j) $S=\{0;5\}$

6) a) $S=\{\frac{9}{5}\}$ b) $S=\{1\}$ c) $S=\{6\}$ d) $S=\{6\}$
e) $S=\{5;7\}$ f) $S=\{-3\}$ g) $S=\{-1\}$ h) $S=\{-\frac{5}{4}\}$
i) $S=\{3\}$ j) $S=\{0;4\}$

Chapitre 3

Déterminants

3.1 Déterminants d'ordre 2

Définition 3.1
On appelle **déterminant d'ordre 2**, et on note

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

le nombre $a_1b_2 - a_2b_1$.

Exemple

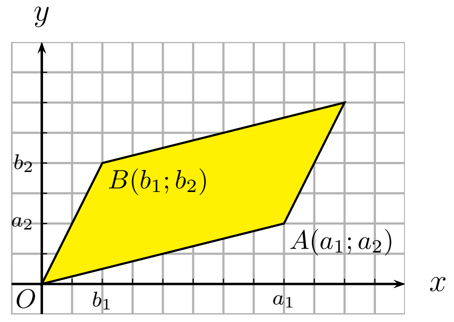
1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 18$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -18$

3.1.1 Aire d'un parallélogramme

On peut utiliser un déterminant d'ordre 2 pour calculer l'aire d'un parallélogramme. Considérons un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, et deux points A et B de coordonnées $(a_1; a_2)$ et $(b_1; b_2)$. L'aire du parallélogramme construit sur OAB (voir le dessin ci-dessous) vaut exactement :

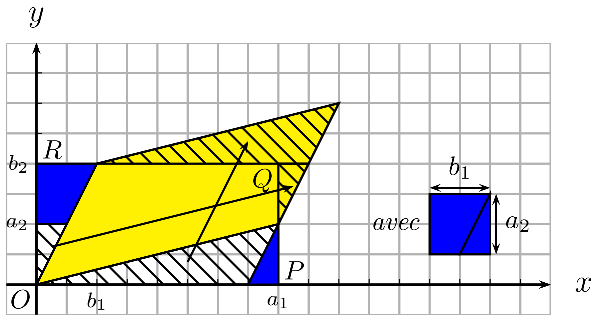
$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$



Démonstration. On peut se convaincre de ce résultat en remarquant que a_1b_2 est l'aire d'un rectangle de largeur a_1 et de hauteur b_2 auquel on soustrait a_2b_1 qui est l'aire d'un rectangle de hauteur a_2 et de largeur b_1.

Or, sur le dessin ci-dessous, en déplaçant les parties hachurées du rectangle $OPQR$ (d'aire a_1b_2) et en éliminant les deux parties foncées (d'aire totale a_2b_1), on retrouve le parallélogramme de départ dont l'aire vaut donc bien $a_1b_2 - a_2b_1$.

On peut également se persuader de ceci en utilisant du papier et des ciseaux.



□

Remarques

– On constate qu'en inversant les deux colonnes du déterminant, on trouve le résultat opposé. Le déterminant peut donc être interprété comme une aire **signée**.
– On peut facilement voir que le déterminant est nul si les trois points O, A et B sont alignés.

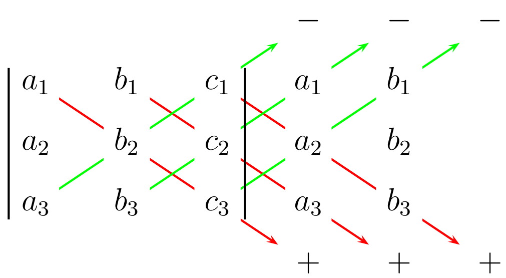
3.2 Déterminants d'ordre 3

Définition 3.2
On appelle **déterminant d'ordre 3**, et on note

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

le nombre $a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

Pour calculer un tel déterminant, on utilise le tableau suivant :



On effectue le produit des éléments sur les diagonales puis on somme ces produits ; les diagonales descendantes sont affectées du signe +, les diagonales montantes du signe −. Ce procédé est appelé **règle de Sarrus**.

Remarque

Attention ! La règle de Sarrus ne marche que pour des déterminants d'ordre trois.

Exemple

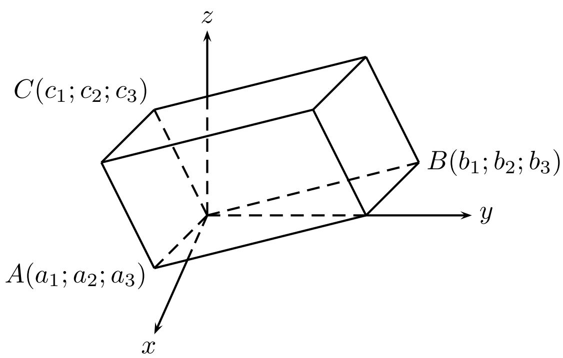
La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *est donnée par*

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & - & - & - \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 2 & \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & \\ -3 & 1 & 0 & -3 & 1 & \\ & & & + & + & + \end{array} \quad \begin{aligned} &= 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 4\cdot(-3) + (-4)\cdot 2\cdot 1 \\ &\quad -(-3)\cdot 0\cdot(-4) - 1\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 2 = -36 \end{aligned}$$

3.2.1 Volume d'un parallélépipède

On peut utiliser un déterminant d'ordre 3 pour calculer le volume d'un parallélépipède. Considérons celui représenté ci-dessous et construit sur le tétraèdre $OABC$. Son volume peut s'exprimer en fonction des coordonnées des points $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ et $C(c_1; c_2; c_3)$. Il est donné par le déterminant d'ordre 3 :

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



3.3 Quelques propriétés des déterminants

Définition 3.3
Le **transposé** d'un déterminant D est un déterminant D' obtenu en permutant, dans D, chaque colonne avec la ligne de même rang (première ligne avec première colonne, ...). Une colonne ou une ligne d'un déterminant est appelée une **rangée**.

Exemple

Le déterminant transposé de $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *est le déterminant* $D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Remarque

Si D' est le transposé de D, D est le transposé de D'.

Voici quelques propriétés des déterminants particulièrement utiles. Elles s'appliquent aux déterminants de tous les ordres, mais nous utiliserons des déterminants d'ordre trois pour illustrer notre propos.

Propriétés

Soit a_i, b_i et c_i $(i = 1, 2, 3)$ des nombres réels.

1. Deux déterminants transposés sont égaux.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2. Si l'on permute deux rangées parallèles d'un déterminant D, la valeur du déterminant obtenu est l'opposée de celle de D.

   Exemple : $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

3. Si un déterminant a une rangée formée uniquement de zéros, alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

4. Si on multiplie tous les éléments d'une rangée par un nombre λ, alors la valeur du déterminant est multiplié par λ.

   Exemple : $\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5. Si deux rangées parallèles d'un déterminant sont proportionnelles (donc éventuellement identiques), alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & \alpha a_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha a_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$

6. Si on ajoute aux éléments d'une même rangée d'un déterminant une combinaison linéaire des éléments correspondants de rangées parallèles, alors le déterminant ne change pas de valeur.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

7. (*Corollaire des propriétés* 3 *et* 6) Si les éléments d'une rangée d'un déterminant peuvent être obtenus par une combinaison linéaire des éléments correspondants de rangées parallèles, alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma a_1 + \delta a_2 & \gamma b_1 + \delta b_2 & \gamma c_1 + \delta c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{avec } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$

3.4 Déterminants d'ordre n

Définition 3.4
On appelle **déterminant d'ordre** n, et on note sous la forme d'un tableau de n lignes et n colonnes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

le nombre

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1}$$

où
- a_{ij} est l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne,
- M_{ij} est le **mineur** de l'élément a_{ij} défini comme le déterminant obtenu en supprimant dans le tableau représentant le nombre D les rangées (lignes et colonnes) qui contiennent a_{ij},
- A_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} qui est défini par : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Un déterminant d'ordre n est donc égal à la somme des produits des éléments de la première colonne par les cofacteurs correspondants. On dit dans ce cas que le déterminant est **développé** par rapport à la première colonne.

Proposition 3.1
Un déterminant d'ordre n peut être développé par rapport à n'importe quelle rangée et est donc égal à la somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs correspondants.

En développant par rapport à la i-ème ligne, on obtient :

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

En développant par rapport à la j-ème colonne, on obtient :

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Remarque

Pour un déterminant d'ordre n, les cofacteurs obtenus sont d'ordre $n-1$. On peut calculer ces derniers en utilisant la même définition. Le processus de calcul est donc itératif jusqu'au moment où on obtient des déterminants d'ordre 2 qu'on peut facilement calculer.

Exemples

1) Soit $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Le cofacteur de a_{21} *est :*

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Le cofacteur de a_{13} *est :*

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2) Calculer la valeur de $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Important ! *Pour réduire au maximum le nombre de calculs (et donc l'effort), on va toujours choisir de développer un déterminant selon la rangée comportant le plus de* 0 *possible : ici la troisième colonne.*

$$\begin{aligned}
D &= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad -3 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (-1) \cdot (-5 - 4 + 6) - 3 \cdot (3 - 8 + 2) \\
&= 12
\end{aligned}$$

3.5 Exercices

1) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

2) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 9 & 1 & 16 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

3) Vérifier :

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & -5 \\ -2 & -10 & -14 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -17 \\ 3 & -9 & 51 \\ -8 & 24 & -101 \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 75 & 83 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 21 & 43 \\ 0 & 2 & 75 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & a'' & a \\ b' & b'' & b \\ c' & c'' & c \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

4) Exprimer D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 à l'aide de D_1 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ b & b' & b'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

5) Exprimer D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 à l'aide de D_1 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & b_1 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

6) Vérifier :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 8 & -5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 14 & 16 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 16 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

7) Résoudre en utilisant les propriétés des déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

8) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3.6 Solutions des exercices

1) a) 5 b) -1 c) 0 d) 47
e) -1 f) 2 g) -14 h) 0

2) a) -70 b) -88 c) 30 d) 12
e) 1 f) -20 g) -6 h) 178

4) $D_2 = -D_1$ $D_3 = -D_1$ $D_4 = D_1$ $D_5 = -D_1$ $D_6 = D_1$

5) $D_2 = \lambda D_1$ $D_3 = \lambda^2 D_1$ $D_4 = 4D_1$ $D_5 = D_1$ $D_6 = D_1$

7) a) $S = \{a; b\}$ b) $S = \{a; b\}$ c) $S = \{1; a\}$

8) a) -61 b) 0 c) -20

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Généralités

4.1.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition 4.1
Une **équation linéaire à deux inconnues** x et y est une condition pour $(x; y)$ du type :

$$ax + by = c$$

où a, b, c sont des nombres réels.

Tout couple $(x; y)$ qui vérifie $ax + by = c$ est une solution de l'équation.

Il existe une infinité de *couples solutions*. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble de ces couples définit une **droite**.

Exemple

L'équation

$$2x - 3y = -6$$

est une équation linéaire à deux inconnues. Quelques couples solutions de cette équation :

$$(3; 4),\ (0; 2),\ (-3; 0),\ (15; 12),\ (-6; -2),\ \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{3}\right),\ \ldots$$

On peut vérifier l'égalité si on substitue 3 *à* x *et* 4 *à* y *:* $2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -6$ *; de même pour les autres couples de solutions.*

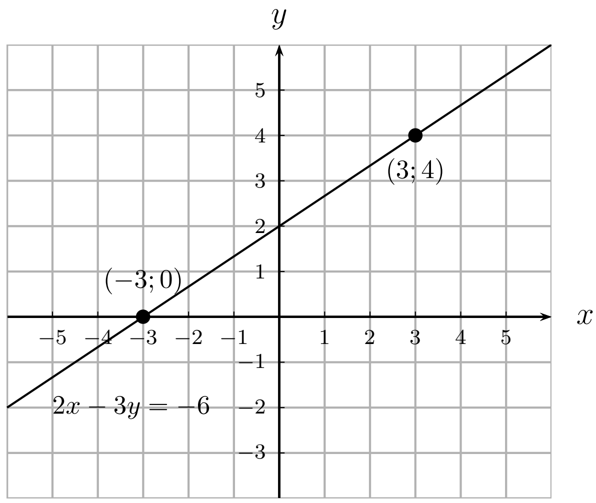
Pour déterminer un couple de solutions, on peut isoler y *par des transformations équivalentes :*

$$\begin{array}{rcl|l} 2x - 3y & = & -6 & -2x \\ -3y & = & -2x - 6 & \div(-3) \\ y & = & \frac{2}{3}x + 2 & \end{array}$$

puis choisir une valeur pour x*, par exemple* 3*, et obtenir la valeur de* y *correspondante en substituant* 3 *à* x *dans l'équation ci-dessus :* $y = \frac{2}{3} \cdot 3 + 2 = 4 \longrightarrow$ *on obtient le couple solution* $(3; 4)$*.*

Pour dessiner la droite représentant l'ensemble des solutions de l'équation linéaire à deux inconnues $2x - 3y = -6$ (cas général $ax + by = c$), on peut procéder comme suit :

1) déterminer deux couples de solutions $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ de l'équation,
2) reporter dans le plan muni d'un système d'axes (orthonormés) les points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$,
3) tracer la droite passant par ces deux points.



Remarque

Une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$ peut être mise sous la forme (voir l'exemple) :

$$y = mx + h$$

où m et h sont deux nombres réels. Cette équation s'appelle aussi *équation réduite* de la droite formée par l'ensemble des solutions. On appelle :
– m la **pente** de la droite,
– h l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Nous reviendrons sur cette équation plus en détails dans la suite du cours.

Définition 4.2
Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est une condition pour $(x; y)$ (ou de manière plus générale $(x_1; x_2)$) du type :

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \textbf{et} \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels.

On convient, le plus souvent, de noter ce système comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Une **solution** du système (4.1) est un couple de nombres réels $(x; y)$ qui vérifie les deux équations du système simultanément.
Résoudre un système d'équations signifie trouver toutes les solutions de celui-ci.

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 3 \\ x & + & 2y & = & 8 \end{array}\right.$$

est un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui admet comme solution unique le couple $(2;3)$. *Comme pour les équations à une inconnue, on donne l'ensemble de solutions sous la forme :* $S = \{(2;3)\}$

4.1.2 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Définition 4.3
Une **équation linéaire à trois inconnues** x, y et z est une condition pour (x, y, z) du type :

$$ax + by + cz = d$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

Tout triplet $(x; y; z)$ qui vérifie $ax + by + cz = d$ est une solution de l'équation.

Il existe une infinité de *triplets solutions*. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'ensemble de ces triplets définit un **plan**.

Un **système de trois équations à trois inconnues** est une condition pour $(x; y; z)$ du type :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

où a_i, b_i, c_i et d_i $(i = 1, 2, 3)$ sont des nombres réels.

Une **solution** du système (4.2) est un triplet de nombres réels $(x; y; z)$ qui vérifie les trois équations du système simultanément.

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 5y & + & z & = & -10 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \\ -3x & - & 4y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

est un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui admet comme solution unique le triplet $(-1; 3; 7)$. *On note :* $S = \{(-1; 3; 7)\}$

4.1.3 Systèmes de m équations linéaires à n inconnues

Définition 4.4
Une **équation linéaire à n inconnues** x_1, x_2, ..., x_n est une condition du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{4.3}$$

où a_1, ..., a_n et b sont des nombres réels. On peut remarquer que tous les x_i sont à la puissance 1, si ce n'était pas le cas, l'équation ne serait pas linéaire.

Un système de m équations linéaires à n inconnues x_1, ..., x_n est une condition composée de m équations du type (4.3).

Une **solution** d'un tel système est un n-uplets de nombres réels $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ qui vérifie les m équations simultanément.

Exemple

Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & = & 23 \\ -3x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & & & = & 56 \\ & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 65 \end{array} \right.$$

est un système de trois équations linéaires à quatre inconnues.

4.1.4 Systèmes équivalents

Deux systèmes sont **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions. Pour résoudre un système, on va transformer le système original en un système équivalent dont les solutions peuvent être déterminées de manière simple.

Règles d'équivalence

Les règles suivantes permettent de transformer un système d'équations en un système équivalent :

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre réel non nul,
- additionner un multiple d'une équation à une autre équation.

4.2 Méthodes de résolution

Dans cette partie, nous allons décrire quatre méthodes de résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. On précisera à chaque fois si l'idée de la méthode peut s'appliquer à d'autre types de systèmes.

On cherchera donc à résoudre le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \right. \tag{4.4}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels.

4.2.1 Graphiquement

Note : cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de 2 équations à 2 inconnues.

Idée : La solution du système est l'intersection des ensembles de solutions de chaque équation. Comme l'ensemble des solutions de chaque équation correspond à une droite, la solution du système correspond au point d'intersection de ces deux droites.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

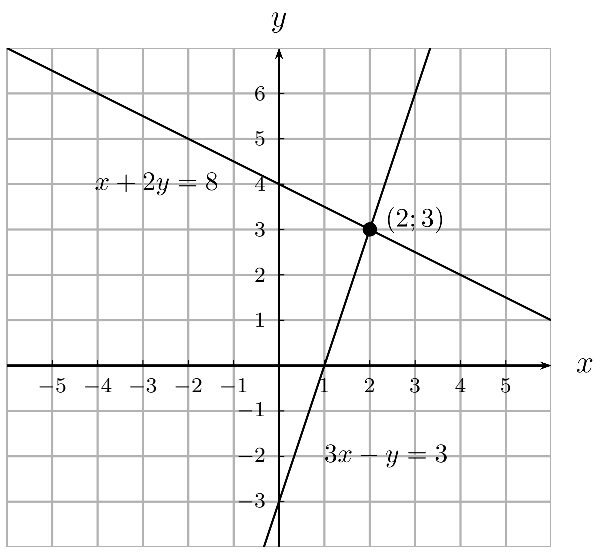
1) déterminer deux couples de solutions de la première équation et deux couples de solutions de la seconde équation,
2) reporter dans un système d'axes (orthonormés) les points correspondant à ces solutions,
3) tracer les deux droites passant par ces points représentant respectivement les solutions de la première et de la seconde équation,
4) lire sur la représentation graphique les coordonnées du ou des (infinité) points d'intersection $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Exemple

Résoudre graphiquement le système : $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 3 \\ x & + & 2y & = & 8 \end{array}\right.$

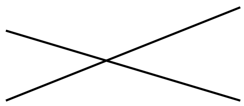
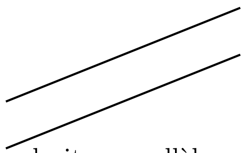
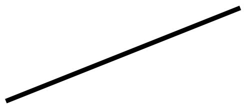
– 2 *couples solutions de* $3x - y = 3$ *:* $(0; -3)$ *et* $(1, 0)$.
– 2 *couples solutions de* $x + 2y = 8$ *:* $(0; 4)$ *et* $(8, 0)$.

Résolution graphique :



Ensemble de solutions : $S = \{(2; 3)\}$

Comme le graphique de toute équation linéaire $ax + by = c$ est une droite, tout système de deux équations de ce type correspond à *exactement un* des trois cas énumérés dans le tableau ci-dessous.

Graphique	**Nombre de solutions**	**Coefficients des équations**	**Classification**
 droites sécantes	**UNE** seule solution	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	système déterminé
 droites parallèles	**AUCUNE** solution	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	système impossible
 droites confondues	**IINFINITE** de solutions (mais $S \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	système indéterminé

Remarques

1. On note $S = \emptyset$ lorsqu'un système n'admet pas de solution. Par exemple, le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

n'a pas de solution, car les deux équations sont contradictoires (droites parallèles).

2. Avoir une infinité de couples solutions, ne signifie pas que tous les couples de nombres réels sont solutions. Par exemple, le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

a une infinité de solutions (droites confondues). Pour exprimer l'ensemble des solutions, on peut **choisir** la valeur d'une variable arbitrairement, et la valeur de la seconde variable sera déterminée d'après la valeur de la première. On peut choisir ici :

$$x = \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et y est alors déterminée par :

$$y = 1 - \lambda$$

λ n'est pas une inconnue, mais un **paramètre**, c'est-à-dire une valeur que l'on peut choisir arbitrairement.

On note l'ensemble de solutions ainsi : $S = \{(\lambda, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4.2.2 Par substitution

Note : cette méthode peut s'appliquer à l'ensemble des systèmes d'équations.

Idée : isoler une des inconnues dans une des équations puis remplacer cette inconnue par la valeur trouvée dans les autres équations.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

1) expliciter (isoler) y dans la première équation $\longrightarrow$ y est exprimé en fonction de x,

2) remplacer (=*substituer*) y, dans la seconde équation, par son expression en fonction de x trouvé en 1 $\longrightarrow$ on obtient *une* équation à *une* inconnue, x,

3) résoudre l'équation obtenue en 2 $\longrightarrow$ valeur(s) pour x,

4) substituer la (ou les) valeur(s) de x trouvée(s) en 3 dans l'équation de l'étape 1 pour trouver les valeurs correspondantes de y $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Remarques

1. A l'étape 1, on peut choisir d'isoler x au lieu d'y. On modifie alors la procédure pour être cohérent avec ce choix.
2. A l'étape 1, on peut choisir la seconde équation au lieu de la première.
3. Il n'y pas de règle pour savoir quelle équation et quelle inconnue choisir à l'étape 1. On effectuera cependant le choix qui "demandera" le moins de calculs et d'efforts.

Exemple

Résoudre par substitution le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 5 \\ 3x & + & 6y & = & -12 \end{array}\right.$

On exprime y en fonction de x dans la première équation. On écrira souvent ceci de la manière suivante.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 5 \\ 3x & + & 6y & = & -12 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \quad y = 5 - 4x \quad (1) \\ \qquad\qquad \hookleftarrow \end{array}$$

On remplace alors y par $5-4x$ dans la deuxième équation. On obtient l'équation à une inconnue $3x + 6\underbrace{(5-4x)}_{=y} = -12$*, qu'on résout :*

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 6(5-4x) & = & -12 & \textit{CL (réduire les deux polynômes)} \\ -21x + 30 & = & -12 & -30 \\ -21x & = & -42 & \div(-21) \\ x & = & 2 & \end{array}$$

On remplace ensuite x par 2 dans (1) : $y = 5 - 4 \cdot 2 = -3$.

Pour vérifier la solution obtenue, on remplace x par 2 et y par -3 dans chaque équation du système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 4 \cdot 2 & + & (-3) & \stackrel{?}{=} & 5 & \textit{O.K.} \\ 3 \cdot 2 & + & 6 \cdot (-3) & \stackrel{?}{=} & -12 & \textit{O.K.} \end{array}\right.$$

Ensemble de solutions : $S = \{(2; -3)\}$.

4.2.3 Par combinaisons linéaires

Note : cette méthode peut s'appliquer à l'ensemble des systèmes d'équations linéaires.

Idée : on somme un multiple de la première équation avec un multiple de la seconde de façon à obtenir une nouvelle équation où au moins une inconnue a été éliminée.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

1) choisir x comme inconnue à éliminer,
2) multiplier chaque équation par un facteur "convenablement choisi" de manière à ce que x soit multiplié, dans chacune des équations, par des nombres *opposés*,
3) additionner les deux équations (=*combinaison linéaire*) $\longrightarrow$ on obtient une équation à une inconnue y,
4) résoudre l'équation obtenue en 3 $\longrightarrow$ valeur(s) pour y,
5) recommencer en 1 en choisissant y comme inconnue à éliminer $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Exemple

Résoudre par combinaisons linéaires le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 27 \\ 5x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|l|l} 2x & + & 3y & = & 27 & \cdot 5 & \cdot 2 \\ 5x & - & 2y & = & 1 & \cdot(-2) & \cdot 3 \end{array}\right.$$

Multiplication des membres de la $1^{\text{ère}}$ équation par 5 et ceux de la $2^{\text{ème}}$ par (-2)

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 10x & + & 15y & = & 135 \\ -10x & + & 4y & = & -2 \quad \oplus \end{array}\right.$$

Addition membre à membre des deux équations

$$19y = 133$$

Résolution de l'équation à une inconnue y $(\div 19)$

$$y = 7$$

Multiplication des membres de la $1^{\text{ère}}$ équation par 2 et ceux de la $2^{\text{ème}}$ par 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 6y & = & 54 \\ 15x & - & 6y & = & 3 \quad \oplus \end{array}\right.$$

Addition membre à membre des deux équations

$$19x = 57$$

Résolution de l'équation à une inconnue x $(\div 19)$

$$x = 3$$

Pour vérifier la solution obtenue, on remplace x par 3 et y par 7 dans chaque équation du système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2\cdot 3 & + & 3\cdot 7 & \stackrel{?}{=} & 27 & \textit{O.K.} \\ 5\cdot 3 & - & 2\cdot 7 & \stackrel{?}{=} & 1 & \textit{O.K.} \end{array}\right.$$

Ensemble de solutions : $S = \{(3;7)\}$.

Remarques

1. On combinera parfois les méthodes de résolution par substitution et par combinaison linéaire.
2. Dans un système d'équations, on dit qu'une équation est **indépendante** si elle ne peut pas être obtenue en combinant d'autre équations du système.

   Dans un système d'équations,
   – il n'y a pas de solution quand il y a plus d'équations indépendantes que d'inconnues,
   – il y a une infinité de solutions quand il y a plus d'inconnues que d'équations indépendantes.
3. Soient n_i le nombre d'inconnues et n_e le nombre d'équations indépendantes d'un système. Le nombre $n = n_i - n_e$ est appelé **nombre de degrés de liberté**.

   Le nombre de degrés de liberté nous indique le nombre d'inconnues dont on pourra choisir la valeur. Par exemple, pour le système (4.5), on a $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté (on a donc pu choisir la valeur de l'inconnue x).

4.2.4 Par les formules de Cramer

Note : cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues et aux systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues.

Idée : on applique des formules qui donnent directement les solutions.

Théorème 4.1
Soit le système d'équations linéaires : $\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right.$

On appelle $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ le déterminant principal de ce système.
– Si $D \neq 0$, ce système admet pour solution unique le couple $(x; y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad \textbf{Formules de Cramer} \tag{4.6}$$

– Si $D = 0$, ce système peut ne pas avoir de solution ou une infinité de solutions.

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'isoler y dans l'équation $a_1x + b_1y = c_1$, puis de le substituer dans l'équation suivante. En isolant x, on trouve la première égalité du théorème ; on agit de manière analogue pour trouver la seconde formule.

Exemples

1) Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & -6 \\ 2x & + & 2y & = & 7 \end{array}\right.$.

Le déterminant principal du système est :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 10$$

Ce système admet donc une solution unique déterminée à l'aide des formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(-6)\cdot 2 - 7\cdot(-1)}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4\cdot 7 - 2\cdot(-6)}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

L'ensemble des solutions : $S = \{(-\frac{1}{2}; 4)\}$.

2) Résoudre et discuter le système :

$$\begin{cases} m^2x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{cases}$$

dans lequel m *est un paramètre réel.*

Le déterminant principal du système est :

$$D = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Il s'annule pour $m = 1$ *ou* $m = -1$.

a) ***Si*** $D \neq 0$, *c'est-à-dire si* $m \neq 1$ *et* $m \neq -1$, *le système admet une solution unique :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{-2}{m+1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 1 & 2m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{2(m^2+m+1)}{m+1}$$

Ensemble des solutions : $S = \{(\frac{-2}{m+1}; \frac{2(m^2+m+1)}{m+1}) \mid m \in \mathbb{R}, m \neq 1, -1\}$.

b) ***Si*** $m = 1$, *le système est :* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Il admet une infinité de solutions de la forme $(\lambda; 2-\lambda)$. *Ensemble des solutions :* $S = \{(\lambda; 2-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *l'ensemble de ces solutions forme une droite.*

c) ***Si*** $m = -1$, *le système est :* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Il n'admet aucune solution. Ensemble des solutions : $S = \emptyset$.

Théorème 4.2

Soit le système $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$.

On appelle $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ le déterminant principal de ce système.

– **Si** $D \neq 0$, ce système admet pour solution unique le triplet $(x; y; z)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D} \tag{4.7}$$

Formules de Cramer

– **Si** $D = 0$, ce système peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$

Le déterminant principal du système est

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 0 - 0 - 0 - 0 = -4$$

Ce système admet donc une solution unique déterminée à l'aide des formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8 + 6 + 0 - 0 - 0 - 0}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 8 + 0 - 0 - 12 - 0}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-48 + 0 + 0 - (-32) - 0 - 0}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

L'ensemble des solutions : $S = \{(\frac{1}{2}; 1; 4)\}$.

4.3 Systèmes linéaires homogènes

Définition 4.5

Les systèmes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

sont appelés **systèmes linéaires homogènes** à deux, respectivement trois inconnues.

Le couple $(0; 0)$ (respectivement le triplet $(0; 0; 0)$) est solution de tout système homogène d'ordre deux (respectivement d'ordre trois). C'est l'unique solution d'un tel système si et seulement si le déterminant principal est non nul.

4.4 Exercices

1) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 6y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} = 18 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 21 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{15} = 4 \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{10} = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 14 \\ -\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = 16 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 9x - 5y = 38 \\ 24x - 25y = 148 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{3} = 8 \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

2) Résoudre et discuter les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + m(m-1)y = 2m^2 \\ x - (m^2-1)y = m(1-m) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2mx - (m+2)y = 3m \\ 2(m-1)x - my = 3(m-1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = m \\ mx + (m+1)y = (m-1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} (m+1)^2x + (m^2-1)y = m+1 \\ (m-1)^2x + (m^2-1)y = (m-1)^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m-3)x + my = 5 \\ mx + (m-4)y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y = 5m+1 \\ (m+1)x + (m+4)y = -8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y + 5m + 10 = 0 \\ (m+5)x + (3m+9)y - 10 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = (m+1)(m-1)^2 \\ (m-1)x + (m+1)y = (m-1)(m+1)^2 \end{cases}$

3) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + 8y + 3z = -31 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ - 4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - 6z = 9 \\ x - y + 4z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 4x + y - 4z = -6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 5y - 3z = 3 \\ 5x + 12y - 8z = 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + z = -1 \\ 3x + 6y + 5z = 2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 6x - 2y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 4x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$

4) Résoudre et discuter les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m - 2 \\ x + y + mz = 2 - m \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$

5) Résoudre les systèmes homogènes suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 11x - 4y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 8y + 4z = 0 \\ 5x + 10y + 5z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 21z = 0 \end{cases}$

6) Résoudre et discuter les systèmes homogènes suivants :

a) $\begin{cases} (m^2+1)x - (m+1)y = 0 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m-5)x + (2m+1)y = 0 \\ (3m+5)x + (m-7)y = 0 \end{cases}$

4.5 Solutions des exercices

Remarque : on indique ci-dessous uniquement l'ensembles des solutions des différentes équations sous la forme $\{\ldots\}$ sans la mention du $S = \ldots$.

1) a) $\{(-\frac{1}{2}; 4)\}$ b) $\{(3; \frac{3}{2})\}$ c) $\emptyset$
d) $\{(60; 36)\}$ e) $\{(12; 0)\}$ f) $\{(14,4; 36,8)\}$
g) $\{(\lambda; \frac{2-\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ h) $\{(2; -4)\}$ i) $\{(24; 0)\}$

2) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

a) Si $m \neq 1$ et $m \neq -\dfrac{1}{2}$: $\left\{(\frac{m^2(m+3)}{2m+1}; \frac{m(3m-1)}{(m-1)(2m+1)})\right\}$,
Si $m = 1$ ou $m = -\frac{1}{2}$: $\emptyset$.

b) Si $m \neq 2$: $\left\{(\frac{3}{2}; 0)\right\}$,
Si $m = 2$: $\left\{(\lambda; \frac{2\lambda-3}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Si $m \neq -\frac{1}{3}$: $\left\{(\frac{3m-1}{3m+1}; \frac{-1}{3m+1})\right\}$,
Si $m = -\frac{1}{3}$: $\emptyset$.

d) Si $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$: $\left\{(\frac{3-m}{4}; \frac{m-1}{4})\right\}$
Si $m = -1$: $\{(1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
Si $m = 0$: $\{(\lambda; \lambda - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
Si $m = 1$: $\left\{(\frac{1}{2}; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

e) Si $m \neq \frac{12}{7}$: $\left\{(\frac{3m-20}{12-7m}; \frac{3m+6}{7m-12})\right\}$,
Si $m = \frac{12}{7}$: $\emptyset$.

f) Si $m \neq -\frac{3}{2}$: $\left\{(\frac{5m^2+29m-4}{6m+9}; \frac{-5m^2-14m-17}{6m+9})\right\}$,
Si $m = -\frac{3}{2}$: $\emptyset$.

g) Si $m = -\frac{1}{2}$ et $m \neq -1$: $\left\{(\frac{-5(3m+4)}{2m+1}; \frac{5(m+8)}{2m+1})\right\}$,
Si $m = -\frac{1}{2}$: $\emptyset$,
Si $m = -1$: $\left\{(\lambda; \frac{5-2\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

h) Si $m \neq 0$: $\{(0; m^2 - 1)\}$,
Si $m = 0$: $\{(\lambda; \lambda - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) a) $\{(-2; -5; 2)\}$ b) $\{(-5; -4; 2)\}$
c) $\{(0,5; 1; 4)\}$ d) $\{(\lambda; 1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(9; 4; 1)\}$ f) $\{(8; 7; 1)\}$
g) $\left\{(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})\right\}$ h) $\left\{(\frac{4\lambda+9}{13}; \frac{7\lambda+6}{13}; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
i) $\{(-1 - 2\lambda; \lambda; 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ j) $\emptyset$
k) $\{(\lambda; \mu; -\lambda - \mu + 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ l) $\emptyset$

4) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

   a) Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$: $\{(m; 2; -2)\}$
   Si $m = 1$: $\{(\lambda; \mu; 1 - \lambda - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Si $m = -2$: $\{(\lambda; 4 + \lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

   b) Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq -1$: $\left\{\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)\right\}$
   Si $m = 0$: $\emptyset$,
   Si $m = 1$: $\{(\lambda; 1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
   Si $m = -1$: $\{(\lambda; \lambda; -1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5) a) $\{(0; 0; 0)\}$
   b) $\left\{\left(\frac{\lambda}{3}; \frac{2\lambda}{3}; \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
   c) $\{(-2\lambda - \mu; \lambda; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   d) $\{(2\lambda; 3\lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

6) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

   a) Si $m \neq 2$ et $m \neq -\frac{1}{3}$: $\{(0; 0)\}$,
   Si $m = 2$: $\left\{\left(\lambda; \frac{5\lambda}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$,
   Si $m = -\frac{1}{3}$: $\left\{\left(\lambda; \frac{5\lambda}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

   b) Si $m \neq 1$ et $m \neq -6$: $\{(0; 0)\}$,
   Si $m = 1$: $\left\{\left(\lambda; \frac{4\lambda}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$,
   Si $m = -6$: $\{(\lambda; -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Chapitre 5

Inéquations

5.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons surtout étudié la résolution d'équations du premier degré (comme l'équation $2x + 3 = 11$), du deuxième degré ou de degré supérieur. Le but de ce chapitre est de résoudre des problèmes du type suivant :

Pour quelles valeurs de x l'expression $2x + 3$ est-elle plus grande que 11 ?

Remplaçons x par 3, 4, 5, 6 et regardons si cette comparaison est vérifiée.

x	$\mathbf{2x + 3 > 11}$	**Conclusion**
3	$9 > 11$	Faux
4	$11 > 11$	Faux
5	$13 > 11$	Vrai
6	$15 > 11$	Vrai

Si un nombre b vérifie la relation lorsqu'on le substitue à x, alors b est une **solution de l'inéquation**.

Définition 5.1
Une **inéquation** est une comparaison semblable à une équation, mais où le symbole d'égalité, =, y est remplacé par un symbole d'inégalité : > (plus grand que), < (plus petit que), $\geqslant$ (plus grand ou égal à) ou $\leqslant$ (plus petit ou égal à).

Exemple

Pour l'inéquation $2x + 3 > 11$, on voit que, grâce au tableau ci-dessus, parmi les nombres 3, 4, 5, 6, seuls 5 et 6 sont solutions de l'inéquation.

En procédant encore à quelques essais, il semble que tous les nombres supérieurs à 4 vérifient cette comparaison. Il y a donc une infinité de solutions à cette inéquation.

Comme pour les équations, **résoudre** une inéquation va signifier trouver *toutes* les solutions de l'inéquation.

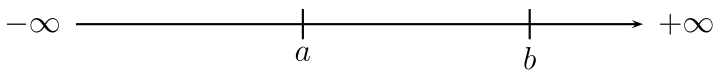
Que faut-il comprendre lorsque qu'on rencontre le signe $\geqslant$, *plus grand ou égal à* ?
- Si la comparaison *plus grand que* est vérifiée, alors l'expression *plus grand ou égal à* l'est aussi.

– Si la comparaison *égal* est vérifiée, alors l'expression *plus grand ou égal à* l'est aussi.
Pour voir la différence entre les symboles $>$ et $\geqslant$, on peut reprendre l'exemple précédent en le modifiant quelque peu :

x	$\mathbf{2x + 3 \geqslant 11}$	**Conclusion**
3	$9 \geqslant 11$	Faux
4	$11 \geqslant 11$	Vrai
5	$13 \geqslant 11$	Vrai
6	$15 \geqslant 11$	Vrai

Le nombre 4 est maintenant solution de l'inéquation.

Nous avons déjà vu qu'il est possible de représenter les nombres réels sur une droite allant de moins l'infini ($-\infty$) à plus l'infini ($+\infty$).



Sur la droite réelle, le nombre a est à gauche du nombre b si a est plus petit que b. On voit immédiatement que tous les nombres à gauche de b satisfont l'inéquation $x < b$. La solution d'une inéquation n'est donc pas un nombre, mais un **ensemble** de nombres, qu'on nomme **intervalle** (consulter le chapitre sur les ensembles). Ainsi, la solution de l'inéquation $x < b$ est l'ensemble $S = \,]-\infty; b[$.

5.2 Quelques propriétés

Comme nous le verrons, les méthodes pour résoudre les inéquations sont semblables à celles utilisées pour résoudre les équations. Les propriétés que nous allons voir sont valables pour tous les types d'inéquations.

Pour énoncer ces propriétés, nous considérerons deux nombres réels a et b ($a, b \in \mathbb{R}$) tel que $a < b$. Des propriétés équivalentes peuvent être données pour $a > b$, $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.

5.2.1 Propriété d'addition

Pour tous les nombres réels a, b et c, avec $a < b$, on a :

$$\boxed{a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c \ \text{ et } \ a - c < b - c}$$

Exemple

On considère les trois nombres 2, 3 *et* 7. *Comme* $2 < 7$, *on a alors que :*

- $2 + 3 < 7 + 3$ *ou* $5 < 10$,
- $2 - 3 < 7 - 3$ *ou* $-1 < 4$.

Cette propriété va nous permettre de passer un terme d'un membre de l'inéquation à l'autre en l'additionnant (ou en le soustrayant) des deux côtés.

On peut ainsi transformer l'inéquation $x + 2 < 0$ en une inéquation équivalente :

$$\begin{array}{rcl|l} x+2 & < & 0 & -2 \textit{ (Soustraire 2 aux deux membres)} \\ x+2-2 & < & -2 & \textit{Calcul littéral} \\ x & < & -2 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x+2<0$ est donc $S =]-\infty; -2[$.

5.2.2 Propriété de multiplication

Pour tous les nombres réels a, b et c, avec $a<b$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} a<b \text{ et } c>0 \implies a\cdot c<b\cdot c \text{ et } \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \\ a<b \text{ et } c<0 \implies a\cdot c>b\cdot c \text{ et } \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{array}}$$

Exemples

1. *On considère les trois nombres* 2, 5 *et* 7. *Comme* $2<7$, *on a alors que :*
   - $2\cdot 5<7\cdot 5$ *ou* $10<35$,
   - $\dfrac{2}{5}<\dfrac{7}{5}$ *ou* $0,4<1,4$.
2. *On considère les trois nombres* -5, 2 *et* 7. *Comme* $2<7$, *on a alors que :*
   - $2\cdot(-5)>7\cdot(-5)$ *ou* $-10>-35$,
   - $\dfrac{2}{-5}<\dfrac{7}{-5}$ *ou* $-0,4>-1,4$.

Remarque

La dernière propriété est source de beaucoup d'erreurs. Il faut y faire très attention. Si on multiplie (ou divise) une inéquation par un nombre négatif, il faut changer le signe de l'inégalité, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} < & \text{devient} & >, \\ > & \text{devient} & <, \\ \leqslant & \text{devient} & \geqslant, \\ \geqslant & \text{devient} & \leqslant. \end{array}$$

Cette propriété n'a rien de comparable pour les équations.

5.2.3 Propriété d'inversion

Pour tous nombres réels a et b de même signe (donc $a\cdot b>0$), avec $a<b$, on a :

$$\boxed{a<b \text{ et } a\cdot b>0 \implies \frac{1}{a}>\frac{1}{b}}$$

Exemples

1. *On considère les deux nombres* 2 *et* 5*. Comme* $2 < 5$*, on a alors que :*
   - $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$ *ou* $0.5 > 0.2$.
2. *On considère les deux nombres* -2 *et* -5*. Comme* $-5 < -2$*, on a alors que :*
   - $\dfrac{1}{-5} > \dfrac{1}{-2}$ *ou* $-0.2 > -0.5$.

5.3 Inéquation du premier degré

Définition 5.2
Une **inéquation du premier degré** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$a \cdot x + b > 0$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $2x + 3 > 0$ *est une inéquation du premier degré.*

Dans la suite de ce cours, nous allons travailler sur des exemples pour donner les idées générales de résolution de différents types d'inéquations.

5.3.1 Résolution algébrique

La résolution algébrique d'une inéquation du premier degré est analogue à celle d'une équation du premier degré, cependant il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif.

Exemple 1

A résoudre : $-3x + 4 < 11$.

On peut procéder de la manière suivante en s'inspirant de ce qu'on fait avec une équation du premier degré et en respectant les propriétés énoncées au paragraphe précédant. Le but est d'isoler x d'un côté de l'inéquation.

$$\begin{array}{rcl|l}
-3x + 4 & < & 11 & -4 \ \textit{(Soustraire 4 aux deux membres)} \\
(-3x + 4) - 4 & < & 11 - 4 & \textit{Réduire} \\
-3x & < & 7 & \div(-3) \ \textit{(Diviser par } -3\textit{, changer le sens de l'inégalité)} \\
\dfrac{-3x}{-3} & > & \dfrac{7}{-3} & \textit{Simplifier} \\
x & > & -\dfrac{7}{3} & \textit{Inéquation équivalente}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de $-3x + 4 < 11$ est $S = \left]-\frac{3}{7}; +\infty\right[$.

Exemple 2

A résoudre : $-6 < 2x - 4 < 2$.

Un nombre réel est solution de cette inéquation si et seulement s'il est solution des deux inéquations :

a) $-6 < 2x - 4$

b) $2x - 4 < 2$

On résout alors chacune de ces deux inéquations séparément. Pour la première :

$$\begin{array}{rcl|l} -6 & < & 2x-4 & +4 \textit{ (Additionner 4 aux deux membres)} \\ -6+4 & < & (2x-4)+4 & \textit{Réduire} \\ -2 & < & 2x & \div 2 \textit{ (Diviser par 2)} \\ -1 & < & x & \textit{Permuter les termes} \\ x & > & -1 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

Pour la seconde :

$$\begin{array}{rcl|l} 2x-4 & < & 2 & +4 \textit{ (Additionner 4 aux deux membres)} \\ 2x & < & 6 & \div 2 \textit{ (Diviser par 2)} \\ x & < & 3 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

Ainsi, x est solution de l'inéquation de départ si et seulement si on a *à la fois*

$$x > -1 \qquad \text{et} \qquad x < 3,$$

c'est-à-dire $-1 < x < 3$. Ainsi, les solutions de l'inéquation sont tous les nombres appartenant à l'intervalle $]-1;3[$.

En fait, cet intervalle correspond à l'intersection des deux intervalles qui représentent la solution de la première et de la seconde équation : $]-1;3[=]-1;+\infty[\bigcap]-\infty;3[$.

5.3.2 Résolution graphique

Pour résoudre une inéquation du type $ax + b > 0$ (ou avec un autre signe d'inégalité), on peut également observer le graphe de la fonction donnée par $f(x) = ax + b$.

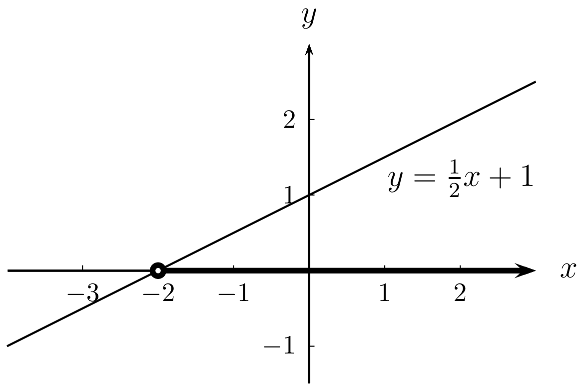
Exemple 3

A résoudre : $\frac{1}{2}x + 1 > 0$.

La fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ coupe l'axe Ox en $x = -2$.

On observant le graphe de f esquissé ci-dessous, on constate que

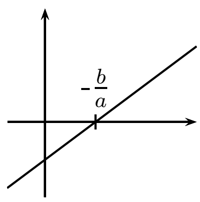
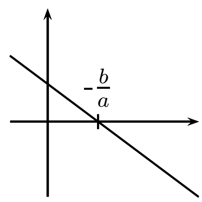
$$\frac{1}{2}x + 1 > 0 \;\text{ si }\; x > -2$$



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-2; +\infty[$.

On peut s'inspirer de l'exemple ci-dessus pour construire un tableau qui résume la résolution graphique des inéquations qui peuvent se ramener à la forme :

$$ax + b > 0 \quad \text{ou} \quad ax + b < 0 \quad (a \neq 0)$$

	$a > 0$			$a < 0$		
Graphe de $f(x) = ax + b$						
Valeur de x		$-\frac{b}{a}$			$-\frac{b}{a}$	
Signe de $ax + b$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
Solutions de $ax + b > 0$	$\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$			$\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$		
Solutions de $ax + b < 0$	$\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$			$\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$		

Un tableau similaire pourrait être construit pour les inéquations pouvant se ramener à la forme $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b \leqslant 0$ $(a \neq 0)$. En fait, il suffit de modifier la forme des intervalles et d'inclure à chaque fois la borne $-\frac{b}{a}$.

5.4 Inéquations de degrés égal ou supérieur à 2

Définition 5.3
Une **inéquation du deuxième degré** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Une **inéquation polynomiale de degré supérieur à 2** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$p(x) > 0$$

où $p(x)$ est un polynôme de degré supérieur à 2 et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $3x^2 + 4 > 0$ est une inéquation du deuxième degré et l'inéquation $3x^3 - 2x^2 + x \leqslant 0$ est une inéquation polynomiale de degré 3.

5.4.1 Résolution algébrique

La résolution algébrique d'une inéquation du deuxième degré du type $ax^2 + bx + c > 0$ ou de degré supérieur du type $p(x) > 0$ utilise fortement la résolution de l'équation du deuxième degré correspondante $ax^2 + bx + c = 0$ ou, respectivement, de l'équation correspondante $p(x) = 0$. Nous allons à nouveau prendre un exemple pour comprendre comment cela fonctionne.

Exemple 4

A résoudre : $2x^2 - 6x + 4 < 0$.

1) On commence par **résoudre** l'équation correspondante : $2x^2 - 6x + 4 = 0$.

   Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4$ et les deux solutions sont alors données par la formule : $x_{1,2} = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2}$. Après calcul, on trouve que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

2) On peut **factoriser** notre polynôme du deuxième degré et écrire que $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$.

   Au niveau de l'inéquation, on utilise cette factorisation pour passer à une nouvelle inéquation équivalente à la première.

$$\begin{array}{rcl|l} 2x^2 - 6x + 4 & < & 0 & \textit{Factoriser} \\ 2(x-1)(x-2) & < & 0 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

3) On doit maintenant étudier le signe de $2(x-1)(x-2)$ suivant les valeurs de x, afin de déterminer celles qui le rendent positif. Pour déterminer le signe de ce produit, on étudie le signe de chacun de ses facteurs :

   a) Pour 2, on a que $2 > 0$.

   b) Pour $x - 1$, on a trois solutions possibles :
      - $x - 1 > 0$, si $x > 1$,
      - $x - 1 = 0$, si $x = 1$,
      - $x - 1 < 0$, si $x < 1$.

   c) Pour $x - 2$, on a trois solutions possibles :
      - $x - 2 > 0$, si $x > 2$,
      - $x - 2 = 0$, si $x = 2$,

- $x - 2 < 0$, si $x < 2$.

Pour $2(x-1)(x-2)$, on construit un **tableau de signes** :

x		1		2	
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ce tableau de signes a été construit de la manière suivante :

1) Sur la première ligne, on représente les valeurs possibles de x (en fait la droite réelle). On construit une colonne pour chacune des racines et une colonne pour chacun des intervalles compris entre deux racines ou entre l'infini et une racine (première et dernière colonne).

   Important ! Dans la première ligne du tableau, les racines sont classées par ordre croissant.

2) On construit ensuite une ligne pour chacun des facteurs qu'on a déterminés et on étudie le signe de ces derniers. Pour chacune des colonnes construites (pour chaque racine et chaque intervalle), on détermine si le facteur est positif (+), nul (0) ou négatif (−) sur ceux-ci.

3) Sur la dernière ligne, on étudie le signe de l'expression de départ : $2(x-1)(x-2)$. Pour cela, on résume chacune des colonnes en utilisant la règle des signes ($+ \cdot + = +$, $+ \cdot - = -$,... *voir page 12*).

4) On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation proposée a comme solution tous les x tels que $1 < x < 2$. L'ensemble des solutions est donc $S =]1; 2[$.

Méthode générale de résolution

Si l'inéquation ne se ramène pas après simplification à une inéquation du premier degré, on suit la démarche suivante :

1. On **regroupe** tous les termes dans le membre de gauche pour que celui de droite soit égal à zéro.
2. On **factorise** (si possible) le membre de gauche en le mettant sous la forme d'un produit (ou d'un quotient).
3. On **étudie le signe** de chacun des facteurs dans un **tableau de signes** (voir les exemples).
4. On **conclut** en observant la dernière ligne du tableau.

Exemple 5

A résoudre : $x^3 \geqslant 4x^2 + x - 4$

Pour résoudre cette inéquation, on suit la démarche proposée ci-dessus.

$$\begin{array}{rcl|l} x^3 & \geqslant & 4x^2+x-4 & -4x^2-x+4 \textit{ (Membre de droite = 0)} \\ x^3-4x^2-x+4 & \geqslant & 0 & \textit{Factoriser} \\ (x+1)(x-1)(x-4) & \geqslant & 0 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

On voit immédiatement que les facteurs s'annulent en -1, 1 et 4. On construit le tableau de signes :

x		-1		1		4	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-1)(x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est donné par : $S = [-1;1] \bigcup [4;+\infty[$.

5.4.2 Résolution graphique

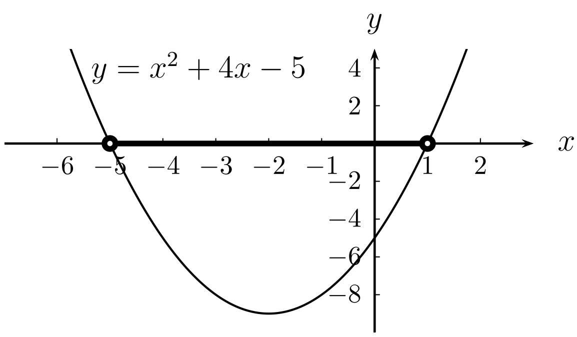
Pour résoudre une équation polynomiale du type $p(x) > 0$ (ou un autre signe d'inégalité) de manière graphique, on résout également l'équation $p(x) = 0$, puis, au lieu de construire la tableau de signes, on observe le graphe de la fonction donnée par $f(x) = p(x)$ afin de déterminer les solutions de l'inéquation.

Exemple 6

A résoudre : $x^2 + 4x - 5 < 0$.

1) On recherche les solutions de l'équation correspondante : $x^2 + 4x - 5 = 0$. On trouve $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$.
2) On réalise une esquisse du graphe de la fonction donnée par $f(x) = x^2 + 4x - 5$ (cas où $a > 0$). Celle-ci est donnée ci-dessous. On l'observant, on constate que :

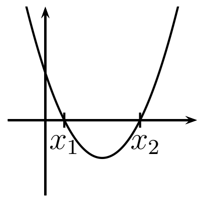
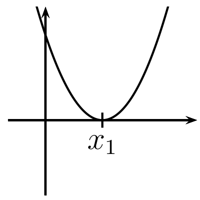
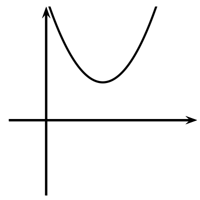
$$x^2 + 4x - 5 < 0 \quad \text{si} \quad -5 < x < 1$$



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-5;1[$.

On peut s'inspirer de l'exemple ci-dessus pour construire un tableau qui résume la résolution graphique des inéquations qui peuvent se ramener à la forme :

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad (\text{avec } a > 0)$$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="9">$a > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\Delta > 0$</td><td colspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>Graphe de $f(x) = ax^2 + bx + c$</td><td colspan="5">
</td><td colspan="3">
</td><td></td></tr>
<tr><td>Valeur de x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td></td><td>x_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $ax^2 + bx + c$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>Solutions de $ax^2 + bx + c > 0$</td><td colspan="5">$]-\infty; x_1[\bigcup]x_2; +\infty[$</td><td colspan="3">$\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Solutions de $ax^2 + bx + c < 0$</td><td colspan="5">$]x_1; x_2[$</td><td colspan="4">pas de solution ($S = \emptyset$)</td></tr>
</table>

Un tableau similaire pourrait être construit pour les inéquations pouvant se ramener à la forme $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ ($a > 0$). De même, on pourrait construire ce tableau pour $a < 0$ (laissé au lecteur).

5.5 Inéquations rationnelles

Définition 5.4
Une **inéquation rationnelle** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0$$

où $p(x)$, $q(x)$ sont des polynômes et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2} \leqslant 0$ *est une inéquation rationnelle.*

Exemple 7

A résoudre : $\dfrac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leqslant 0.$

L'expression est déjà factorisée, on peut donc directement établir le tableau de signes.

x		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

La solution de notre problème est donc l'ensemble $S = [-2; -1[\bigcup [3; +\infty[$.

Remarques

1. Le quotient n'est pas défini en $x = 1$ (on a $\frac{1}{0}$). $x = 1$ ne peut donc pas être une solution ! Dans le tableau, lorsque le quotient n'est pas défini, on achure les points ou les intervalles où ceci a lieu (dans la dernière ligne).
2. Le terme $(x^2 + 1)$ est toujours positif, il n'a donc pas d'effet sur le signe du quotient. On pourrait ainsi omettre la ligne correspondante dans le tableau.

Exemple 8

A résoudre : $\dfrac{x+1}{x+3} \leqslant 2$.

Attention ! Une erreur fréquente est de multiplier par $x + 3$. Or, on n'a pas le droit de multiplier l'inégalité par le dénominateur de la fraction s'il contient une variable. En effet, comme la valeur de x est inconnue, on ne sait pas si c'est un nombre positif ou négatif ! On ne sait donc pas si le sens de l'inéquation changera après multiplication. **On ne peut multiplier (ou diviser) les deux côtés d'une inégalité que par des valeurs connues** (des constantes). La résolution correcte est la suivante.

$$\begin{array}{rcl|l}
\dfrac{x+1}{x+3} & \leqslant & 2 & -2 \textit{ (Membre de droite = 0)} \\
\dfrac{x+1}{x+3} - 2 & \leqslant & 0 & \textit{Mettre au même dénominateur} \\
\dfrac{x+1-2(x+3)}{x+3} & \leqslant & 0 & \textit{Réduire} \\
\dfrac{-x-5}{x+3} & \leqslant & 0 & \cdot(-1) \textit{ (Multiplier par } -1\textit{)} \\
\dfrac{x+5}{x+3} & \geqslant & 0 & \textit{Inéquation équivalente}
\end{array}$$

x		-5		-3	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+5}{x+3}$	$+$	0	$-$		$+$

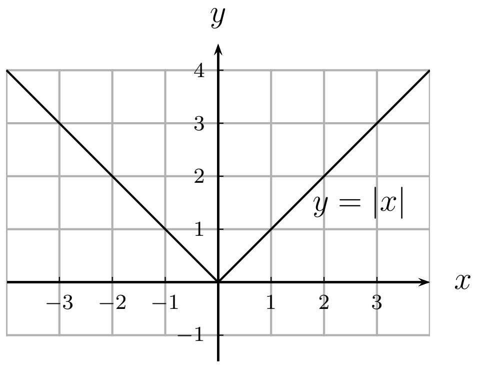
L'ensemble des solutions est donné par $S =]-\infty; -5] \cup]-3; +\infty[$.

Le nombre -5 est inclus puisque le quotient s'annule en -5. Le quotient n'est pas défini en -3 ; ce nombre n'appartient donc pas à l'ensemble des solutions.

5.6 Fonction valeur absolue et fonctions définies par morceaux

Le graphe de la fonction **valeur absolue** donnée par $f(x) = |x|$ est représenté ci-dessous. Cette fonction permet, en langage familier, "d'ôter" le signe d'un nombre, et de le rendre positif.

On constate que ce graphe est formé de deux demi-droites, la demi-droite d'équation $y = -x$ pour les x négatifs et la demi-droite d'équation $y = x$ pour les x positifs.



On peut donner une expression de cette même fonction sans utiliser le symbole *valeur absolue*, $|\ .\ |$, en séparant, dans la définition de f, les x positifs des x négatifs.

Définition 5.5
La fonction **valeur absolue** est définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

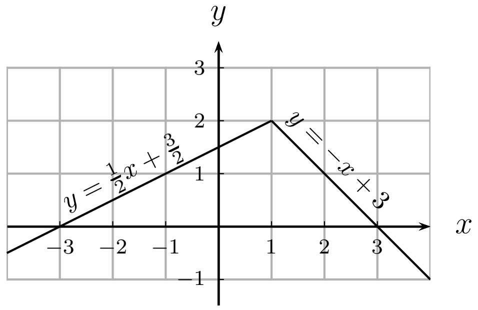
Exemples

1) $|5| = 5$ *puisque* $5 > 0$.

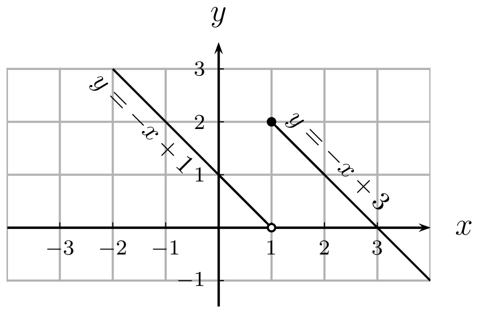
2) $|-5| = -(-5) = 5$ *puisque* $-5 < 0$

Une fonction donnée de cette façon est dite **définie par morceaux** ou définie par intervalles. On donne ci-dessous 3 exemples de telles fonctions.

Exemples

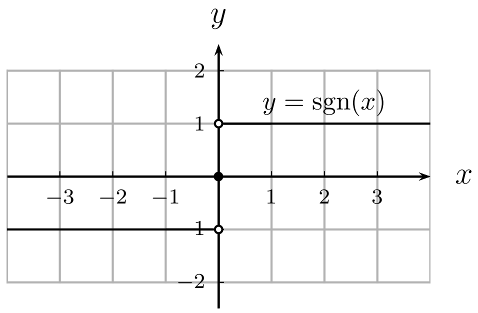
1. 

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. 

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction présente un ***saut*** *en* $x = 1$.

3. 

La fonction ***signe*** *donnée par* $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ *prend la valeur* 1 *si* x *est positif, la valeur* -1 *si* x *est négatif et la valeur* 0 *si* x *est nul. Elle est définie par morceaux et peut être donnée par l'expression :*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut également utiliser le symbole valeur absolue pour poser une inéquation.

Exemple 9

A résoudre : $|x| < 3$.

Essayons de comprendre ce que veut dire $|x| < 3$.
Si $x > 0$, cela signifie que $x < 3$. Si $x < 0$, cela veut dire que $-x < 3$, donc $x > -3$ (on multiplie par un nombre négatif, le signe de l'inéquation change). On en déduit :

$$|x| < 3 \text{ est équivalent à } -3 < x < 3.$$

De même, pour $|x| > 3$ on a :

$$|x| > 3 \text{ est équivalent à } x < -3 \textbf{ ou } x > 3.$$

On peut généraliser ce qui précède et on obtient, si a et b sont des nombres réels, :

1) $|a| < b$ est équivalent à $-b < a < b$,
2) $|a| > b$ est équivalent à $a < -b$ ou $a > b$.

Chapitre 6

Nombres complexes

6.1 Introduction

Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons décrit les ensembles de nombres suivants :

1. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$, l'ensemble des nombres naturels ;
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$, l'ensemble des nombres entiers ;
3. $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$, l'ensemble des nombres rationnels ;
4. $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Nous avons alors remarqué que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Historiquement, ces ensembles de nombres ont été définis successivement.

Les nombres naturels ont été les premiers à être utilisés. En effet, c'est cet ensemble de nombres qui est utilisé la plupart du temps pour compter. Historiquement, le zéro n'est pas apparu en même temps que les autres nombres. On le rencontre pour la première fois en Inde.

Dans $\mathbb{N}$, l'opposé d'un nombre n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $x+1 = 0$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Z}$, cette équation admet une solution : -1. $\mathbb{Z}$ est une extension de $\mathbb{N}$.

Dans $\mathbb{Z}$, l'inverse d'un nombre différent de 1 n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Q}$, une solution existe : $\frac{1}{2}$. $\mathbb{Q}$ est une extension de $\mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré 2 ou, de manière équivalente, la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas mesurable ou l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution. Par contre dans $\mathbb{R}$, cette équation admet 2 solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré -1 ou, de manière équivalente, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

L'objectif de ce cours est donc de définir un ensemble de nombres tel que les racines de nombres négatifs soient définies. Nous noterons ce nouvel ensemble $\mathbb{C}$ et nous appellerons ces nouveaux nombres **nombres complexes**.

On peut montrer que dans $\mathbb{C}$ toute équation polynomiale de degré n admet n solutions (*théorème fondamental de l'algèbre*). De plus, en utilisant cet ensemble, il est possible de déterminer une formule qui permet de résoudre toutes les équations du troisième degré.

6.2 Présentation des nombres complexes sous forme de couples

Il existe plusieurs manières de définir l'ensemble des nombres complexes. Selon le modèle de Hamilton, nous définirons l'ensemble $\mathbb{C}$ à partir de l'ensemble produit $\mathbb{R}^2$.

Définition 6.1
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, peut être défini comme l'ensemble produit

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a;b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

muni des opérations d'addition et de multiplications ci-dessous.

6.2.1 Addition des couples

Définition 6.2
L'addition dans $\mathbb{C}$ est l'opération interne ($\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), notée $+$, définie par :

$$\boxed{(a;b) + (a';b') = (a+a';b+b')}$$

Propriétés

L'addition des couples :

– est *associative* :

$$(a;b) + [(a';b') + (a'';b'')] = [(a;b) + (a';b')] + (a'';b'')$$

– possède un *élément neutre* dans $\mathbb{C}$, le couple $(0;0)$:

$$(a;b) + (0;0) = (0,0) + (a;b) = (a;b)$$

– est telle que tout couple de $\mathbb{C}$ possède un *opposé*, le couple $(-a;-b)$:

$$(a;b) + (-a;-b) = (-a;-b) + (a;b) = (0;0)$$

– est *commutative* :

$$(a;b) + (a';b') = (a';b') + (a;b)$$

En raison de ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition des couples a une structure de **groupe abélien**.

6.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 6.3
La multiplication par un scalaire est l'opération externe ($\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), notée $\cdot$, définie par :

$$\boxed{\lambda \cdot (a;b) = (\lambda a; \lambda b)}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriétés

La multiplication par un scalaire vérifie :

– $1 \cdot (a;b) = (a;b)$

– $\lambda \cdot [\mu \cdot (a;b)] = (\lambda\mu) \cdot (a;b)$

– $\lambda \cdot (a;b) + \mu \cdot (a;b) = (\lambda + \mu) \cdot (a;b)$

– $\lambda \cdot (a;b) + \lambda \cdot (a';b') = \lambda \cdot [(a;b) + (a';b')]$

En raison de ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition des couples et de la multiplication par un scalaire a une structure d'**espace vectoriel réel**.

L'ensemble ordonné $((1;0);(0;1))$ est une *base* de cet espace vectoriel réel. En effet, tout couple $(a;b)$ de $\mathbb{C}$ peut être engendré de manière unique comme combinaison linéaire de $(1;0)$ et $(0;1)$:

$$(a;b) = a \cdot (1;0) + b \cdot (0;1)$$

$\mathbb{C}$ muni de l'addition des couples et de la multiplication par un scalaire est donc un espace vectoriel réel de **dimension 2**.

6.2.3 Multiplication des couples

Définition 6.4
La multiplication dans $\mathbb{C}$ est l'opération interne ($\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), notée $*$, définie par :

$$\boxed{(a;b) * (a';b') = (aa' - bb'; ab' + a'b)}$$

Propriétés

La multiplication des couples :

– est *associative* :

$$(a;b) * [(a';b') * (a'';b'')] = [(a;b) * (a';b')] * (a'';b'')$$

– possède un *élément neutre* dans $\mathbb{C}$, le couple $(1;0)$:

$$(a;b) * (1;0) = (1,0) * (a;b) = (a;b)$$

– est telle que tout couple de $\mathbb{C}^*$ possède un *inverse*, le couple $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}; \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$:

$$(a;b) * \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right) * (a;b) = (1;0)$$

– est *commutative* :

$$(a;b) * (a';b') = (a';b') * (a;b)$$

– est distributive par rapport à l'addition des couples :

$$(a;b) * [(a';b') + (a'';b'')] = (a;b) * (a';b') + (a;b) * (a'';b'')$$

En raison des propriétés liées aux opérations internes, on dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication des couples a une structure de **corps commutatif**.
Ainsi, toutes les propriétés des opérations dans un corps sont vérifiées. Par exemple, la multiplication n'a pas de diviseurs de zéro, c'est-à-dire que l'équation $(x;y) * (x';y') = (0;0)$ a pour solution $(x,y) = (0;0)$ ou $(x';y') = (0;0)$. Pour cette même raison, on a le droit de simplifier une équation :

$$(x;y) * (x';y') = (x;y) * (x'';y'') \Rightarrow (x';y') = (x'';y'') \quad \text{ou} \quad (x;y) = (0;0)$$

6.2.4 Prolongement de l'ensemble des nombres réels

Définition 6.5
On note $\mathbb{C}'$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ tels que leur deuxième coordonnée est égale à 0 :

$$\mathbb{C}' = \{(a; 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

Opérations dans $\mathbb{C}'$

Considérons l'addition et les multiplications dans ce sous-ensemble $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$.

- *Addition* : $(a; 0) + (a'; 0) = (a + a'; 0) \in \mathbb{C}'$
  On dit que $\mathbb{C}'$ est stable pour l'addition.
- *Multiplication par un scalaire* : $\lambda \cdot (a; 0) = (\lambda a; 0) \in \mathbb{C}'$
  $\mathbb{C}'$ est stable pour la multiplication par un scalaire. C'est aussi un espace vectoriel réel de base $((1; 0))$. Tout couple $(a; 0)$ de $\mathbb{C}'$ peut s'exprimer comme $a \cdot (1; 0)$.
- *Multiplication* : $(a; 0) * (a'; 0) = (aa' - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + a' \cdot 0) = (aa'; 0) \in \mathbb{C}'$
  $\mathbb{C}'$ est stable pour la multiplication.

Définition 6.6
Soient E et F deux espaces vectoriels réels.
On appelle **application linéaire** de E vers F toute application h de E vers F telle que :

$$\begin{aligned} h(u + v) &= h(u) + h(v) \\ h(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot h(u) \end{aligned}$$

quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une application linéaire bijective de E vers F est appelée **isomorphisme** de E vers F.

Deux espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F. On note $E \cong F$.

Lorsque deux espaces vectoriels sont isomorphes, on peut presque dire qu'ils sont identiques. Les mêmes éléments se trouvent dans les deux ensembles. Seule la manière de les écrire est différente. L'application h nous permet de passer d'une écriture à l'autre, comme un dictionnaire nous permet de passer d'une langue à l'autre.

On considère maintenant l'application linéaire bijective qui a tout nombre réel x fait correspondre le couple $(x; 0)$ de $\mathbb{C}'$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}' \\ x &\longmapsto (x; 0) \end{aligned}$$

a) φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ vers $(\mathbb{C}'; +; \cdot)$
   - $\varphi(u) + \varphi(v) = (u; 0) + (v; 0) = (u + v; 0) = \varphi(u + v)$
   - $\lambda \cdot \varphi(u) = \lambda \cdot (u; 0) = (\lambda u; 0) = \varphi(\lambda u)$

b) φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; \cdot; \cdot)$ vers $(\mathbb{C}'; *; \cdot)$
   - $\varphi(u) * \varphi(v) = (u; 0) * (v; 0) = (u \cdot v; 0) = \varphi(u \cdot v)$
   - $\lambda \cdot \varphi(u) = \lambda \cdot (u; 0) = (\lambda u; 0) = \varphi(\lambda u)$

Les opérations définies dans $\mathbb{C}$ et celles définies dans $\mathbb{R}$ sont donc les mêmes lorsqu'on se restreint aux couples de la forme $(a;0)$. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}$ et le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ des couples de la forme $(a;0)$ sont isomorphes. Nous pouvons alors identifier le nombre réel quelconque a avec le couple $(a;0)$:

$$\boxed{a = (a;0)}$$

L'ensemble des nombres réels peut donc être considéré comme un sous-ensemble de l'ensemble des nombres complexes.

6.3 Présentation des nombres complexes sous forme cartésienne

Comme l'ensemble des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2, il existe au moins une base de cet espace formé de deux couples. La plus simple est la base formée des couples $(1;0)$ et $(0;1)$. Tout couple $(a;b)$ peut alors s'écrire

$$(a;b) = (a;0) + (0;b) = a \cdot (1;0) + b \cdot (0;1)$$

Par ce qui précède, on peut remplacer le couple $(1;0)$ par le nombre réel 1. Si on pose en outre $(0;1) = i$, on pourra remplacer le couple $(a;b)$ par le nombre complexe $z = a + bi$.

Définition 6.7
Tout nombre complexe $z = (a;b)$ peut s'écrire sous forme **cartésienne** comme

$$\boxed{z = a + bi}$$

où a et b sont des nombres réels.

Le nombre a est appelé **partie réelle** du nombre complexe z, on la note : $a = \mathfrak{Re}(z)$.
Le nombre b est appelé **partie imaginaire** du nombre complexe z, on la note : $b = \mathfrak{Im}(z)$.

En appliquant les règles de multiplication, on obtient
- $i^2 = (0;1) * (0;1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1;0) = -1$
- $i^3 = i^2 i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$
- ...

Ainsi, pour tout nombre naturel n, on a :

$$\boxed{i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i}$$

6.3.1 Addition, soustraction, multiplications sous forme cartésienne

Pour additionner ou soustraire deux nombres complexes sous forme cartésienne, pour multiplier un nombre complexe sous forme cartésienne par un scalaire ou pour multiplier deux nombres complexes sous forme cartésienne entre eux, on procède comme s'il s'agissait d'opérations sur les binômes mais en tenant compte que $i^2 = -1$.

- ▷ $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- ▷ $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$
- ▷ $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$
- ▷ $(a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Remarque

En travaillant sous forme cartésienne, on utilise le symbole $\cdot$ au lieu du symbole $*$ pour la multiplication de deux nombres complexes, car, sous cette forme, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont très proches au niveau de la manière de les réaliser.

6.3.2 Division

Pour diviser deux nombres complexes sous forme cartésienne, on amplifie la fraction afin de faire disparaître la partie imaginaire au dénominateur :

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{a + bi}{a' + b'i} \cdot \frac{a' - b'i}{a' - b'i} = \frac{aa' + bb' + (a'b - ab')i}{(a')^2 + (b')^2} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}i$$

Si le dominateur de la fraction est le nombre complexe $z' = a' + b'i$, on amplifie la fraction par le nombre complexe $\overline{z'} = a' - b'i$.

6.3.3 Nombre complexe conjugué

Définition 6.8
On appelle **nombre complexe conjugué** du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre complexe :

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

Propriétés - nombre complexe conjugué

La notion de nombre complexe conjugué vérifie les propriétés suivantes :

1) La somme de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel :

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a \in \mathbb{R}$$

2) Le produit de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel :

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6) $\overline{\overline{z}} = z$
7) $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{\overline{z} - z}{2}i$

Ces propriété sont valables pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6.3.4 Résolution d'équations du deuxième degré

Pour rechercher les racines carrées d'un nombre complexe $z = a+bi$ (il y en a deux !), par exemple pour la résolution d'une équation du deuxième degré, on procède comme suit.

Si on appelle $x + yi$ les racines carrées de z, on peut poser, par définition :

$$(x + yi)^2 = a + bi \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

Comme l'ensemble des nombres complexes est un espace vectoriel, la décomposition dans une base quelconque est unique. On peut donc poser

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{cases}$$

ce qui nous donne un système de deux équations à deux inconnues qu'on résout par substitution en remplaçant y par $\dfrac{b}{2x}$ dans la première équation. L'équation à résoudre devient

$$x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \qquad \text{ou} \qquad 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

On obtient alors que

$$x^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Comme $a^2 + b^2 > 0$, il y aura deux solutions pour x^2. De plus, comme $a^2 + b^2 > a^2$, une des solutions sera positive, l'autre négative et ne conviendra pas pour x^2. Finalement, on a :

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \qquad \text{et} \qquad y_{1,2} = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

Exemple

Résoudre : $\frac{1}{2}z^2 - 4z + iz + 5 - 10i = 0$
On commence par calculer le discriminant associé à cette équation :

$$\Delta = (-4 + i)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 - 10i) = 16 - 8i + i^2 - 10 + 20i = 5 + 12i$$

On cherche ensuite les racines carrées $x + yi$ *de* $5 + 12i$*. On peut poser :*

$$(x + yi)^2 = 5 + 12i \qquad \textit{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2xyi = 5 + 12i$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 5 \\ 2xy & = & 12 \end{cases}$$

En isolant y *dans la deuxième équation et en injectant sa valeur dans la première équation, on doit maintenant résoudre l'équation*

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \qquad \textit{ou} \qquad x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \qquad \textit{ou} \qquad (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 4) = 0$$

Ainsi $x^2 = 9$ *ou* $x^2 = -4$ *ce qui est impossible. Les deux racines carrées de* $5 + 12i$ *sont donc*

$$x_1 = 3 \quad \to \quad y_1 = \frac{6}{3} = 2$$
$$x_2 = -3 \quad \to \quad y_2 = \frac{6}{-3} = -2$$

Ainsi, $x + yi = \pm(3 + 2i)$*. En utilisant la formule de résolution des équations du deuxième degré, on obtient comme solutions de l'équation de départ*

$$z_{1,2} = \frac{-(-4+i) \pm (3+2i)}{1} \qquad ou \qquad z_1 = 7 + i \text{ et } z_2 = 1 - 3i$$

6.4 Présentation des nombres complexes sous forme trigonométriques

6.4.1 Plan de Gauss, module et argument

Nous avons vu que l'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2. Nous avons même donné une base de cet espace :

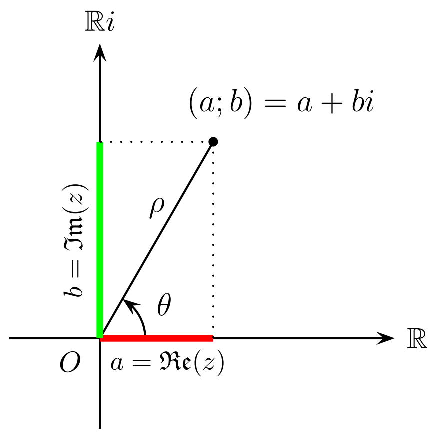
$$(1; i) \text{ ou } ((1; 0); (0; 1))$$

Avec cette base et le point $0 + 0 \cdot i$ comme origine, nous pouvons définir un repère.

Dans ce repère, tout nombre complexe $z = a + bi$ peut être représenté par un point $M(a; b)$ dont l'abscisse est la partie réelle de a et l'ordonnée la partie imaginaire b.

On introduit ainsi une bijection entre $\mathbb{C}$ et les points du plan.

Définition 6.9
Le plan ainsi défini est appelé **plan complexe** ou **plan de Gauss**.
L'axe des x est appelé **axe des réels**.
L'axe des y est appelé **axe des imaginaires**.



Définition 6.10
Tout nombre complexe $z = (a; b) = a + bi$ peut être repéré dans le plan de Gauss par :

a) la distance, notée ρ ou $|z|$, entre l'origine et le point $M(a;b)$ représentant z :

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}}$$

On appelle cette distance le **module** de z.

b) l'angle orienté, noté θ ou $\arg(z)$, entre l'axe des réels et le segment $[OM]$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k \cdot 2\pi \text{ si } a > 0 \\ \text{et} \\ \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi + k \cdot 2\pi \text{ si } a < 0 \end{array}}$$

On appelle cet angle l'**argument** de z.

Le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ se note souvent :

$$\boxed{[\rho;\theta]}$$

On appelle cette notation la **forme trigonométrique** de z

On peut passer aisément de la forme trigonométrique, $[\rho;\theta]$, à la forme cartésienne, $a+bi$, d'un nombre complexe z en posant :

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos(\theta) \\ b &= \rho\sin(\theta) \end{aligned}$$

ou de manière équivalente :

$$\boxed{z = a + bi = \rho \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot i) = \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) \cdot i}$$

Remarques

1. Si z est un nombre réel, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{z^2}$ est la valeur absolue de z.
2. Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux sous forme cartésienne ou sous forme trigonométrique si :

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i &\iff a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2 \\ [\rho_1;\theta_1] = [\rho_2;\theta_2] &\iff \rho_1 = \rho_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Propriétés - module

Le module vérifie les propriétés suivantes :

1) $|z| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $||z_1| - |z_2|| \leqslant \underbrace{|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|}_{\text{Minkowski}}$
4) $|z| = |\overline{z}|$
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
7) $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$

Ces propriétés sont valables pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Remarque

Les fonctions vérifiant les deux premières propriétés et la propriété de Minkowski sont appelées des **normes**.

6.4.2 Addition, soustraction et multiplication par un scalaire

Cette manière de présenter les nombres complexes n'a aucun intérêt en ce qui concerne ces opérations.
Dans le plan de Gauss, l'addition et la soustraction équivalent à des translations. La multiplication par un scalaire équivaut à une homothétie de centre O et de rapport ce scalaire.

6.4.3 Multiplication

Soient deux nombres complexes $z_1 = [\rho_1; \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2; \theta_2]$. On peut multiplier ces deux nombres complexes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i) \cdot \rho_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i) \\
&= \rho_1\rho_2 \cdot [\underbrace{(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + \underbrace{(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))}_{\sin(\theta_1+\theta_2)} i] \\
&= \rho_1\rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i) = [\rho_1 \cdot \rho_2; \theta_1 + \theta_2]
\end{aligned}$$

On remarque alors que lorsqu'on multiplie des nombres complexes, les *modules* se multiplient et les *arguments* s'additionnent :

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = [\rho_1; \theta_1] \cdot [\rho_2; \theta_2] = [\rho_1 \cdot \rho_2; \theta_1 + \theta_2]}$$

Remarque

Dans le plan de Gauss, la multiplication par $z = [\rho; \theta]$ équivaut à une rotation d'angle θ, suivie d'une homothétie de rapport ρ.

6.4.4 Inversion

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. Pour déterminer l'inverse de ce nombre complexe, on prend l'inverse de son *module* et l'opposé de son *argument* :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}; -\theta\right]}$$

En effet, on a bien que :

$$z \cdot \frac{1}{z} = [\rho; \theta] \cdot \left[\frac{1}{\rho}; -\theta\right] = \left[\rho \cdot \frac{1}{\rho}; \theta + (-\theta)\right] = [1; 0] = 1$$

6.4.5 Division

Soient deux nombres complexes $z_1 = [\rho_1; \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2; \theta_2]$. On peut déterminer le quotient de ces deux nombres complexes de la manière suivante :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = [\rho_1; \theta_1] \cdot \left[\frac{1}{\rho_2}; -\theta_2\right] = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2\right]$$

On remarque alors que lorsqu'on divise deux nombres complexes, les *modules* se divisent et les *arguments* se soustraient :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{[\rho_1; \theta_1]}{[\rho_2; \theta_2]} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2\right]}$$

Remarque

Dans le plan de Gauss, la division par $z = [\rho; \theta]$ équivaut à une rotation d'angle $-\theta$, suivie d'une homothétie de rapport $\frac{1}{\rho}$.

6.4.6 Elévation à une puissance

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. Pour élever le nombre complexe z à la puissance n, z^n, il suffit de le multiplier n fois par lui-même. En effectuant les diverses multiplications successives, on obtient :

$$\boxed{z^n = [\rho; \theta]^n = [\rho^n; n\theta]}$$

On remarque que pour élever un nombre complexe à la puissance n, on élève le *module* à la puissance n et on multiplie l'argument par n.

6.4.7 Extraction des racines n-ièmes

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. On cherche ici les nombres qui élevés à la puissance n donnent le nombre z. D'après ce qui précède, il faut prendre un nombre complexe dont le module est $\sqrt[n]{\rho}$ et dont l'argument est $\frac{\theta}{n}$. Comme θ est défini à $k \cdot 2\pi$ près, $\frac{\theta}{n}$ sera défini à $\frac{k \cdot 2\pi}{n}$ près. Il y aura donc n modules différents par tour. Ainsi tout nombre complexe possédera n racines n-ièmes **distinctes**.

Les racines n-ièmes de $z = [\rho; \theta]$ sont données par :

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right]}$$

avec $0 \leqslant k < n, k \in \mathbb{N}$.

Remarques

1. Comme $\left[1; \dfrac{k \cdot 2\pi}{n}\right]^n = [1^n; k \cdot 2\pi] = 1$, on peut en déduire que les racines n-ièmes de $z = [\rho; \theta]$ s'obtiennent en multipliant une des racines n-ièmes de z par les racines n-ièmes de l'unité.
2. Dans le plan de Gauss, les n racines n-ièmes de z sont situées sur un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$. Si on relie ces racines par des segments de droite, elles forment un polygone régulier à n côtés.

6.4.8 Formule de Moivre

Soit un nombre complexe z de module 1. Il peut s'écrire

$$z = [1;\theta] = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$$

Si on l'élève à la puissance n, on obtient

$$z^n = [1;\theta]^n = [1^n; n \cdot \theta] = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)i$$

Proposition 6.1
La formule appelée **formule de Moivre** est l'égalité suivante :

$$\boxed{(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)i}$$

Exemple

Si on applique la formule de Moivre pour $n = 2$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)^2 & = & \cos(2\theta) + \sin(2\theta)i \\ & ou & \\ \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)i - \sin^2(\theta) & = & \cos(2\theta) + \sin(2\theta)i \end{array}$$

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{array}{rcl} \cos(2\theta) & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) & = & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{array}$$

qui sont les formules trigonométriques de duplication.

6.5 Exercices

1) Soient les nombres complexes $z_1 = (1;4)$ et $z_2 = (5;-1)$. Calculer :

a) $z_3 = z_1 + z_2$ b) $z_4 = 3z_1$ c) $z_5 = z_1 \cdot z_2$

d) $z_6 = z_1^2$ e) $z_7 = \dfrac{1}{z_1}$ f) $z_8 = \dfrac{z_1}{z_2}$

2) Reprendre l'exercice 1) mais en écrivant les nombres complexes sous la forme $a + bi$ (forme cartésienne).

3) Soient les nombres complexes $z_1 = 7 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -5 + 2i$, $z_4 = -10 - 3i$, $z_5 = 8$ et $z_6 = 8i$. Calculer :

a) $z_1 - z_3 - z_5$ b) $z_1 z_2 z_3$ c) $z_3^2 + z_4^2$

d) $iz_4 - z_3 z_6$ e) $\mathfrak{Im}(z_4)$ f) $\mathfrak{Re}(z_1^2 z_3)$

g) $\mathfrak{Im}(2z_2 - 3z_3)$ h) $\dfrac{z_1}{z_6}$ i) $\dfrac{z_1}{z_2}$

4) Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $z' = (z-1)(z-2i)$ soit

a) un nombre réel b) un nombre imaginaire pur

5) Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $z' = \dfrac{z+2i}{z-2}$ soit

a) un nombre réel b) un nombre imaginaire pur

6) Démontrer les formules :

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{\overline{z} - z}{2} i.$$

7) Résoudre les équations :

a) $z + 2i\overline{z} = 8 + 7i$ b) $(1+i)z + (5-3i)\overline{z} = 20 + 20i$

c) $(2+2i)z - 3\mathfrak{Re}(z) = -18 + 30i$ d) $\mathfrak{Im}(\overline{z}+1) + i \cdot \mathfrak{Re}(-z+2) = -\dfrac{1}{2} - 6i$

8) Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 + i \\ 5x - 3y = -1 + 8i \end{cases}$ b) $\begin{cases} ix - 5y = 13 \\ 2x - 3iy = 13i \end{cases}$

9) Résoudre les équations :

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $6x^2 + (7 - 13i)x - 3 - 7i = 0$

10) Ecrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants donnés sous forme trigonométrique :

a) $z_1 = [2; \pi]$ b) $z_2 = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{6}\right]$ c) $z_3 = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$

11) Soient $z_1 = \left[2; \frac{\pi}{4}\right]$, $z_2 = \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$, $z_3 = \left[5; \frac{\pi}{6}\right]$ et $z_4 = \left[1; \frac{5\pi}{6}\right]$. Calculer :

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ c) $z_3 \cdot z_4$ d) $\dfrac{z_3}{z_4}$

12) Calculer le module et l'argument des nombres complexes :

a) $z_1 = 4 + 2i$ b) $z_2 = 3 - i$ c) $z_3 = -4 + 2i$

d) $z_4 = -3 - i$ e) $z_5 = z_1 + z_2$ f) $z_6 = z_1 \cdot z_2$

g) $z_7 = z_1^2$ h) $z_8 = \dfrac{1}{z_3}$ i) $z_9 = \dfrac{z_3}{z_4}$

13) Calculer, en utilisant la forme trigonométrique, les produits et les quotients suivants, puis exprimer les résultats sous forme cartésienne.

a) $(1+i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ b) $(1 - \sqrt{3}i)(-4\sqrt{3} + 4i)$ c) $\dfrac{1-i}{1+i}$

d) $\dfrac{4 + 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$ e) $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ f) $\dfrac{3+i}{2+i}$

14) Calculer :

a) $(1-i)^{37}$ b) $\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)^{1000}$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^{21}$

15) Soit $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$.

a) Représenter z^5.

b) Déterminer les nombres entiers n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$.

16) Calculer et construire :

a) les racines carrées de -81.

b) les racines carrées de $16i$.

c) les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

d) les racines cubiques de $-46 + 9i$.

e) les racines sixièmes de $1 + \sqrt{3}i$.

17) Résoudre les équations :

a) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$ b) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

c) $z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$ d) $z^6 - (1 + 12i)z^3 - 13 - 9i = 0$

6.6 Solutions des exercices

1) a) $z_3 = (6;3)$ b) $z_4 = (3;12)$ c) $z_5 = (9;19)$

d) $z_6 = (-15;8)$ e) $z_7 = \left(\frac{1}{17};\frac{-4}{17}\right)$ f) $z_8 = \left(\frac{1}{26};\frac{21}{26}\right)$

2) a) $z_3 = 6+3i$ b) $z_4 = 3+12i$ c) $z_5 = 9+19i$

d) $z_6 = -15+8i$ e) $z_7 = \frac{1}{17}+\frac{-4}{17}i$ f) $z_8 = \frac{1}{26}+\frac{21}{26}i$

3) a) $4-7i$ b) $-89+53i$ c) $112+40i$

d) $19+30i$ e) -3 f) 20

g) -4 h) $-\frac{5}{8}-\frac{7}{8}i$ i) $\frac{9}{5}-\frac{17}{5}i$

4) a) z' est un réel si $z=a+bi$ est tel que $2ab-2a-b+2=0$
b) z' est un imaginaire pur si $z=a+bi$ est tel que $(a-\frac{1}{2})^2-(b-1)^2+\frac{3}{4}=0$

5) a) z' est un réel si $z=a+bi$ est tel que $a-b-2=0$
b) z' est un imaginaire pur si $z=a+bi$ est tel que $(a-1)^2+(b+1)^2=2$

7) a) $z=2+3i$ b) $z=-5i$ c) $z=12+3i$ d) $z=8+\frac{1}{2}i$

8) a) $x=1+i,\ y=2-i$ b) $x=2i,\ y=-3$

8) a) $x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ $x_2=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i$

10) a) $z_1=-2$ b) $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$ c) $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i$

11) a) $\left[6;\frac{5\pi}{12}\right]$ b) $\left[\frac{2}{3};\frac{\pi}{12}\right]$ c) $[5;\pi]$ d) $\left[5;\frac{-2\pi}{3}\right]$

12) Réponses :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
mod.	$\sqrt{20}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{200}$	20	$\frac{\sqrt{20}}{20}$	$\sqrt{2}$
arg.	$0,464$	$-0,322$	$2,678$	$3,463$	$0,142$	$0,142$	$0,927$	$3,605$	$\frac{-\pi}{4}$

13) a) $2\sqrt{2}$ b) $16i$ c) $-i$

d) $2\sqrt{3}+2i$ e) $0,966+0,259i$ f) $1,4-0,2i$

14) a) $-262144 + 262144i$ b) $-0,865 - 0,501i$

c) $21200629,67 + 5231678,51i$

15) b) Les multiples de 12.

16) a) $9i$ $\quad -9i$

b) $2\sqrt{2}(1+i)$ $\quad -2\sqrt{2}(1+i)$

c) $0,966 + 0,259i$ $\quad \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad -0,259 - 0,966i$

d) $2 + 3i$ $\quad -3,598 + 0,232i$ $\quad 1,598 - 3,232i$

e) $1,105 + 0,195i$ $\quad 0,384 + 1,055i$ $\quad -0,722 + 0,860i$

$-1,105 - 0,195i$ $\quad -0,384 - 1,055i$ $\quad 0,722 - 0,860i$

17) a) $z_1 = -2 + i \qquad z_2 = -3 + i$

b) $z_1 = 1 \qquad z_2 = i \qquad z_3 = -i$

c) $z_1 = 0,951 - 0,309i \qquad z_2 = 0,588 + 0,809i \qquad z_3 = -0,588 + 0,809i$

$z_4 = -0,951 - 0,309i$

d) $z_1 = 2 + i \qquad z_2 = -1,87 + 1,23i \qquad z_3 = -0,13 - 2,23i$

$z_4 = 0,79 + 0,79i \qquad z_5 = -1,08 + 0,29i \qquad z_6 = 0,29 - 1,08i$

Chapitre 7

Progressions

7.1 Notion de suite

Définition 7.1
Une **suite** est un ensemble ordonné de nombres réels, appelés **termes**.

Exemples

1) $3\ ;\ 5\ ;\ -24\ ;\ 53\ ;\ 4\ ;\ -12\ ;\ 14\ ;\ \ldots$

2) $-2 \overset{+5}{;} 3 \overset{+5}{;} 8 \overset{+5}{;} 13 \overset{+5}{;} 18 \overset{+5}{;} \ldots$

3) $4 \overset{\cdot 2}{;} 8 \overset{\cdot 2}{;} 16 \overset{\cdot 2}{;} 32 \overset{\cdot 2}{;} 64 \overset{\cdot 2}{;} \ldots$

Remarques

La suite peut être munie d'une **règle de formation** (manière de construire la suite à partir d'un ou de plusieurs de ses termes) ou non.

La première suite des exemples ci-dessus est une suite sans règle de formation. Les deuxième et troisième suites sont des suites avec règle de formation.
Pour la deuxième, on obtient le terme suivant de la suite en additionnant 5 au terme précédent.
Pour la troisième, on obtient le terme suivant de la suite en multipliant le terme précédent par 2.

Un ensemble ordonné de nombres réels signifie qu'il existe une fonction qui associe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ à cet ensemble de nombres réels. Le terme de départ de la suite est alors l'image du plus petit nombre contenu dans A. Le terme suivant est l'image du deuxième nombre contenu dans A, si on ordonne les éléments de A en ordre croissant. Le troisième terme est obtenu de la même manière, et ainsi de suite.

Définition 7.2
Plus précisément, une **suite** de nombres réels est une fonction f de $A \in \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

Le nombre réel $f(n)$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par n, par exemple : x_n, y_n, u_n ou v_n. La suite elle-même est alors désignée par (x_n), (y_n), (u_n), et (v_n).

Remarques

– Dans l'exemple 1, on a que $u_0 = 3,\ u_1 = 5,\ u_2 = -24,\ \ldots$

– Le plus souvent A est $\mathbb{N}$ lui-même, ou $\mathbb{N}^*$. Ainsi, sans indication contraire, on considérera que $A = \mathbb{N}$.

– Si A est constitué d'un nombre fini de nombres, la suite est également constituée d'un nombre fini de termes. Dans le cas contraire, la suite est constituée d'un nombre infini de termes.

7.1.1 Détermination d'une suite

Une suite peut être déterminée par :

– la donnée de **tous ses termes** (pas de règle de formation).

Exemple : $u_0 = 6$; $u_1 = -3$; $u_2 = -1$; $u_3 = 98;\ \ldots$

– une **formule** qui donne u_n par rapport à n (ce qui revient à donner $f(n) = u_n$).

Exemples : 1) $f(n) = u_n = n^2 \Rightarrow 1\ ;\ 4\ ;\ 9\ ;\ 16\ ;\ \ldots$

2) $f(n) = u_n = \frac{1}{n}$, avec $A = \mathbb{N}^* \Rightarrow 1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \ldots$

– par **récurrence** : le deuxième terme de la suite est donné en fonction du premier, le troisième en fonction du deuxième et ainsi de suite. Plus généralement, le terme d'indice n est donné par rapport au terme d'indice $n-1$.

Mathématiquement, on écrit : $\begin{cases} u_1 \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$

Exemple : $u_1 = 1$, $u_n = 3u_{n-1} - 1 \Rightarrow 1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 14\ ;\ \ldots$

7.1.2 Quelques définitions sur une suite

Définition 7.3

Une suite (x_n) est dite **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier $n \in A$, $u_n \leqslant M$.

Une suite (x_n) est dite **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier $n \in A$, $u_n \geqslant m$.

Une suite (x_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

Soit la suite (u_n) donnée par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.

Elle est majorée par le nombre 3. Elle est aussi majorée par le nombre 1, qui est le plus petit majorant.

Elle est minorée par le nombre -5. Elle est aussi minorée par le nombre 0, qui est le plus grand minorant.

Pour les définitions suivantes, on considère que $A = \mathbb{N}$.

Définition 7.4
Une suite (x_n) est dite **croissante** (respectivement strictement croissante), à partir de l'indice n_0, si, quel que soit l'entier naturel $n \geqslant n_0$, on a

$$u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{(respectivement } u_{n+1} > u_n\text{)}.$$

Une suite (x_n) est dite **décroissante** (respectivement strictement décroissante), à partir de l'indice n_0, si, quel que soit l'entier naturel $n \geqslant n_0$, on a

$$u_{n+1} \leqslant u_n \qquad \text{(respectivement } u_{n+1} < u_n\text{)}.$$

Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Pour montrer qu'une suite est monotone, on peut étudier le signe de la *différence* $u_{n-1} - u_n$. Si cette différence est positive, alors la suite est croissante et, si elle négative, la suite est décroissante. Cette méthode est particulièrement adaptée aux suites définies à l'aide d'une sommation.
On peut également comparer le *quotient* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ au nombre 1 (en prenant garde aux signes de u_n et u_{n+1}). Si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante et, s'il est inférieur à 1, la suite est décroissante.

Exemple

Soit la suite (u_n) donnée par $u_n = \dfrac{4n-1}{n+3}$.
La suite (u_n) est strictement croissante. En effet, si on considère la différence d'un terme de la suite et du précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1)-1}{(n+1)+3} - \frac{4n-1}{n+3} = \frac{4n+3}{n+4} - \frac{4n-1}{n+3} \\ &= \frac{(4n+3)(n+3)-(4n-1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{13}{(n+3)(n+4)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

étant donné que le dénominateur du dernier quotient est un produit de deux nombres positifs ($n \in \mathbb{N}$).
La suite (u_n) est majorée par le nombre 4. En effet, on a :

$$u_n = \frac{4n-1}{n+3} < \frac{4n+12}{n+3} = \frac{4(n+3)}{n+3} = 4$$

7.2 Progression arithmétique (PA)

Définition 7.5
Une **progression arithmétique (PA)** est une suite déterminée par le premier terme u_1 et par la formule de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + r$$

où $r \in \mathbb{R}$. Le nombre r est un nombre constant appelé **raison** de la progression arithmétique.

Exemples

1) $u_1 = 2,\ r = 6 \Rightarrow 2 \overset{+6}{\curvearrowright}; 8 \overset{+6}{\curvearrowright}; 14 \overset{+6}{\curvearrowright}; 20 \overset{+6}{\curvearrowright}; 26 \overset{+6}{\curvearrowright}; \ldots$

2) $u_1 = 0,\ r = 1 \Rightarrow 0 \overset{+1}{\curvearrowright}; 1 \overset{+1}{\curvearrowright}; 2 \overset{+1}{\curvearrowright}; 3 \overset{+1}{\curvearrowright}; 4 \overset{+1}{\curvearrowright}; \ldots = \{\textit{nombres naturels}\} = \mathbb{N}$

3) $u_1 = 1,\ r = 2 \Rightarrow 1 \overset{+2}{\curvearrowright}; 3 \overset{+2}{\curvearrowright}; 5 \overset{+2}{\curvearrowright}; 7 \overset{+2}{\curvearrowright}; 9 \overset{+2}{\curvearrowright}; \ldots = \{\textit{nombres impairs}\}$

Propriété

La différence de deux termes consécutifs est constante et égale à la raison : $u_n - u_{n-1} = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7.2.1 Terme général u_n

On peut mettre en évidence un lien entre le premier terme u_1 et n'importe quel terme u_n de rang n d'une PA.

Soit une PA déterminée par son premier terme u_1 et sa raison r. Par définition, on a :

$$\begin{array}{lllll} u_1 & & & & \text{(premier terme)} \\ u_2 & = & u_1 + r & & \text{(définition)} \\ u_3 & = & u_2 + r & = \ u_1 + 2r & \text{(définition, substitution de } u_2\text{)} \\ u_4 & = & u_3 + r & = \ u_1 + 3r & \text{(définition, substitution de } u_3\text{)} \\ & \vdots & & & \\ u_n & = & u_{n-1} + r & = \ u_1 + (n-1)\cdot r & \text{(définition, substitution de } u_{n-1}\text{)} \end{array}$$

On obtient ainsi le lien suivant :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)\cdot r}$$

Remarques

Il ne faut pas confondre u_n et n !
n est le nombre d'éléments, u_n l'élément de rang n.
n est un nombre entier, u_n ne l'est pas forcément.

Exemple

Soit la suite donnée par $u_1 = 5$ *et* $r = 7 \Rightarrow 5 \overset{+7}{\curvearrowright}; 12 \overset{+7}{\curvearrowright}; 19 \overset{+7}{\curvearrowright}; 26 \overset{+7}{\curvearrowright}; 33 \overset{+7}{\curvearrowright}; \ldots$
Son $46^{ème}$ *terme est* $u_{46} = 5 + 45 \cdot 7 = 320$.

7.2.2 Somme des n premiers termes : S_n

Propriété

Dans une progression arithmétique finie comportant n termes, la somme de 2 termes équidistants des extrêmes (u_1 et u_n) est égale à la somme des extrêmes ($u_1 + u_n$).

Exemple

Soit la PA de 6 termes données par $u_1 = 5$ et $r = 4$. On a alors :

$$\underbrace{5 \quad \underbrace{9 \quad \underbrace{13 \quad 17}_{13+17=30} \quad 21}_{9+21=30} \quad 25}_{5+25=30}$$

La somme de deux termes équidistants des extrêmes est égale 30.

Démonstration. Soit une PA de n termes donnée par u_1 et r. En reprenant le même schéma que pour l'exemple ci-dessus, on obtient pour le cas général :

$$\underbrace{u_1 \quad \underbrace{u_2 \quad \underbrace{u_3 \quad \ldots \quad u_{n-2}}_{u_3+u_{n-2}} \quad u_{n-1}}_{u_2+u_{n-1}} \quad u_n}_{u_1+u_n}$$

Or, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 + u_n &= u_1 + u_n \\ u_2 + u_{n-1} &= (u_1 + r) + (u_n - r) = u_1 + u_n \\ u_3 + u_{n-2} &= (u_1 + 2r) + (u_n - 2r) = u_1 + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

La somme de deux termes équidistants des extrêmes est donc bien égale à $u_1 + u_n$. $\square$

Propriété

La somme des n premiers termes d'une PA, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$, est donnée par la formule :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2} \cdot [2u_1 + (n-1) \cdot r]}$$

Démonstration. Soit une PA donnée par u_1 et r. On peut écrire de deux manières différentes (ordre) la somme de ses n premiers termes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & \ldots & + & u_{n-2} & + & u_{n-1} & +u_n & \\ S_n & = & u_n & + & u_{n-1} & + & u_{n-2} & + & \ldots & + & u_3 & + & u_2 & +u_1 & \oplus \\ \hline \end{array}$$

En additionnant ces deux expressions terme à terme, on obtient :

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$$

D'après la propriété précédente, il y a n parenthèses formées de la somme de termes valant chacun $u_1 + u_n$. Ainsi $2S_n = n \cdot (u_1 + u_n)$. En remplaçant u_n par $u_1 + (n-1) \cdot r$ et en divisant les deux membres de l'équation par 2, on obtient :

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2u_1 + (n-1) \cdot r]$$

$\square$

Exemples

1) La somme des 100 *premiers nombres entiers :* $S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 1 + 99 \cdot 1) = 5050$

2) La somme des 29 *premiers nombres impairs :* $S_{29} = \frac{29}{2}(2 \cdot 1 + 28 \cdot 2) = 841$

7.3 Progression géométrique (PG)

Définition 7.6
Une **progression géométrique (PG)** est une suite déterminée par le premier terme u_1 et par la formule de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} \cdot q$$

où $q \in \mathbb{R}$. Le nombre q est un nombre constant appelé **raison** de la progression géométrique.

Exemples

1) $u_1 = 2,\ q = 6 \Rightarrow 2 \overset{\overset{\cdot 6}{\curvearrowright}}{;} 12 \overset{\overset{\cdot 6}{\curvearrowright}}{;} 72 \overset{\overset{\cdot 6}{\curvearrowright}}{;} 432 \overset{\overset{\cdot 6}{\curvearrowright}}{;} 2592 \overset{\overset{\cdot 6}{\curvearrowright}}{;} \ldots$

2) $u_1 = 1,\ r = 2 \Rightarrow 1 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 2 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 4 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 8 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 16 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} \ldots = \{$*puissances de 2*$\}$

Propriété

Le quotient de deux termes consécutifs est constant et égale à la raison : $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = q$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7.3.1 Terme général u_n

Comme pour une PA, on peut mettre en évidence un lien entre le premier terme u_1 et n'importe quel terme u_n de rang n d'une PG.
Soit une PG déterminée par son premier terme u_1 et sa raison q. Par définition, on a :

$$\begin{array}{lllll}
u_1 & & & & \text{(premier terme)} \\
u_2 & = & u_1 \cdot q & & \text{(définition)} \\
u_3 & = & u_2 \cdot q & = u_1 \cdot q^2 & \text{(définition, substitution de } u_2\text{)} \\
u_4 & = & u_3 \cdot q & = u_1 \cdot q^3 & \text{(définition, substitution de } u_3\text{)} \\
 & \vdots & & & \\
u_n & = & u_{n-1} \cdot q & = u_1 \cdot q^{n-1} & \text{(définition, substitution de } u_{n-1}\text{)}
\end{array}$$

On obtient ainsi le lien suivant :

$$\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}$$

Exemple

Soit la suite donnée par $u_1 = 3$ *et* $q = 2 \Rightarrow 3 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 6 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 12 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 24 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} 48 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{;} \ldots$
Son $18^{\text{ème}}$ *terme est* $u_{18} = 3 \cdot 2^{17} = 393'216$.

7.3.2 Somme des n premiers termes : S_n

Propriété

Dans une progression géométrique finie comportant n termes, le produit de 2 termes équidistants des extrêmes (u_1 et u_n) est égale au produit des extrêmes ($u_1 \cdot u_n$).

Exemple

Soit la PG de 6 *termes données par* $u_1 = 2$ *et* $r = 3$. *On a alors :*

$$\underbrace{2 \quad \underbrace{6 \quad \underbrace{18 \quad 54}_{18\cdot 54=972} \quad 162}_{6\cdot 162=972} \quad 486}_{2\cdot 486=972}$$

Le produit de deux termes équidistants des extrêmes est égal à 972*.*

Démonstration. Soit une PG de n termes donnée par u_1 et g. En reprenant le même schéma que pour l'exemple ci-dessus, on obtient pour le cas général :

$$\underbrace{u_1 \quad \underbrace{u_2 \quad \underbrace{u_3 \quad \dots \quad u_{n-2}}_{u_3\cdot u_{n-2}} \quad u_{n-1}}_{u_2\cdot u_{n-1}} \quad u_n}_{u_1\cdot u_n}$$

Or, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
u_1 \cdot u_n &= u_1 \cdot u_n \\
u_2 \cdot u_{n-1} &= (u_1 \cdot q) \cdot \left(\frac{u_n}{q}\right) = u_1 \cdot u_n \\
u_3 \cdot u_{n-2} &= (u_1 \cdot q^2) \cdot \left(\frac{u_n}{q^2}\right) = u_1 \cdot u_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Le produit de deux termes équidistants des extrêmes est donc bien égal à $u_1 \cdot u_n$. □

Propriété

La somme des n premiers termes d'une PG, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$, est donnée par la formule :

$$\boxed{S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}} \tag{7.1}$$

si $q \neq 1$; et par $S_n = n \cdot u_1$ si $q = 1$.

Démonstration. Soit une PG donnée par u_1 et r. On peut poser les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n &=& u_1 &+& u_2 &+& u_3 &+& \ldots &+& u_{n-1} &+& u_n & & \\
q \cdot S_n &=& & & q \cdot u_1 &+& q \cdot u_2 &+& q \cdot u_3 &+& \ldots &+& q \cdot u_{n-1} &+& q \cdot u_n
\end{array}$$

On peut réécrire ces relations de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccccccccccl} S_n & = & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & \dots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ q \cdot S_n & = & & & u_2 & + & u_3 & + & u_4 & + & \dots & + & u_n \quad + \quad q \cdot u_n \quad \ominus \\ \hline \end{array}$$

En retranchant terme par terme la deuxième relation de la première, on obtient :

$$S_n - q \cdot S_n = u_1 - q \cdot u_n$$

D'où :

$$S_n = \frac{u_1 - q \cdot u_n}{1 - q} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

□

Exemple

La somme des 15 *premières puissances de 2 :*
$S_{15} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{14} = \underbrace{2^0}_{=1} \cdot \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 32'767.$

7.3.3 Progression géométrique illimitée (PGI)

Définition 7.7
Une **progression géométrique illimitée (PGI)** est une progression géométrique comportant un nombre infini (illimité) de termes.
On note S_∞ la somme de tous ses termes.

On peut utiliser la formule 7.1 pour déterminer la valeur de $S_\infty = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$
Cette dernière dépend de la valeur de q :

- si q est plus grand que 1 ou plus petit que -1 (on note $|q| > 1$), la valeur de q^n devient très positive ou très négative (selon le signe de q et la valeur de n) lorsque n devient de plus en plus grand. La valeur de S_n fait de même. On peut dire qu'elle "explose", ou, en termes mathématiques, qu'elle tend vers l'infini.
- si $-1 < q < 1$ (on note $|q| < 1$), la valeur de q^n devient de plus en plus petite et s'approche de 0 lorsque n devient de plus en plus grand. Le terme q^n disparaît alors de la formule 7.1.

Propriété

Soit une PGI donnée par son premier terme u_1 et sa raison q.
Si $|q| < 1$, on a la formule suivante :

$$\boxed{S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{u_1}{1 - q}}$$

Remarque

$\lim_{n\to\infty} S_n$: cette écriture se lit "limite de S_n lorsque n tend vers l'infini". Ceci signifie que la valeur de S_n s'approche de S_∞ (la valeur de la limite) lorsque n devient de plus en plus grand.

Exemple

La somme de tous les termes de la PGI donnée par $u_1 = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, $S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, peut être déterminée à l'aide de la formule ci-dessus :

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

car $q = \frac{1}{2} < 1$.

7.4 Application : calculs financiers

Sur un marché économique, des acteurs peuvent prêter ou emprunter un **capital** (une somme d'argent) en contrepartie de quoi ils perçoivent ou respectivement versent un **intérêt** (une autre somme d'argent) périodique. Cet intérêt se justifie par la prise de risque que prend le créditeur (celui qui prête le capital) relativement au non-remboursement de la totalité ou d'une part du capital initial que doit rembourser le débiteur (celui qui doit rembourser le capital emprunté) et au fait que le créditeur ne peut plus utiliser à sa guise le capital immobilisé auprès du débiteur.

Ainsi, quand vous déposez de l'argent sur un compte auprès d'une banque, cette dernière vous verse à la fin de l'année un intérêt. En quelque sorte, elle vous paie pour l'argent que vous lui avez prêté afin qu'elle puisse réaliser certaines opérations financières : investissement en bourse, investissement dans l'immobilier, prêt à d'autres personnes, ... Dans cette transaction, vous êtes le créditeur et la banque le débiteur.

A l'inverse, quand vous empruntez de l'argent auprès d'une banque pour, par exemple, construire une maison, cette dernière vous demande de lui verser des intérêts en contrepartie de ce prêt. Dans ce cas, vous êtes le débiteur et la banque le créditeur.

En lien avec la notion d'intérêt, nous utiliserons souvent le **taux d'intérêt** sur une unité de temps qui est défini comme :

$$\text{taux d'intérêt} = \frac{\text{intérêt produit pendant une unité de temps}}{\text{capital}}$$

L'unité, ou période, de temps peut être, par exemple, l'année, le semestre, le trimestre, le mois, le jour, l'heure, la minute, la seconde, ... En général et sans indication contraire, nous considérerons que la période de temps est l'année et donc le **taux d'intérêt annuel**.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées dans ce chapitre :

$C =$ capital (sans autres précisions),

$C_0 =$ capital initial, au temps 0,

$C_n =$ capital après n années (ou périodes),

$n =$ nombre d'années (ou de périodes) pendant lesquelles le capital initial est investi,

$I =$ intérêt produit pendant une année (ou une période),

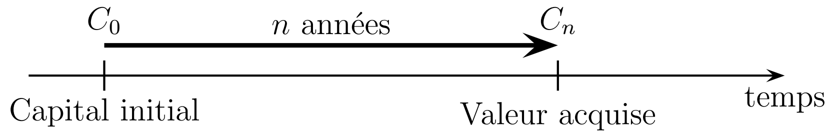
$i =$ taux d'intérêt annuel (constant), généralement exprimé en %.

Avec les définitions ci-dessus, on a les deux relations équivalentes suivantes :

$$\boxed{i = \frac{I}{C}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{I = C \cdot i}$$

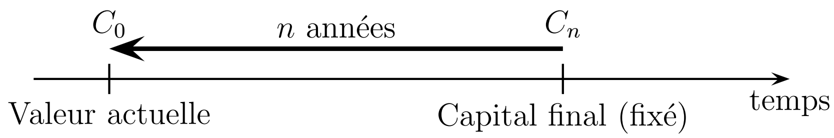
Sur la base de ces notions, deux types de réflexion sont possibles :

la capitalisation : elle permet de calculer la valeur future (ou valeur acquise) d'un capital à partir de sa valeur présente. Sous forme de schéma :



Le sens de la flèche indique qu'on déplace un capital en direction du futur.

l'actualisation : elle permet de déterminer la somme d'argent, qu'on appelle **valeur actuelle**, qui doit être investi pour obtenir, après un temps donné, un montant fixé à l'avance.



Le sens de la flèche indique qu'on déplace un capital en direction du passé.

7.4.1 Capitalisation

Un capital C placé pendant une année à un taux d'intérêt annuel produit un intérêt valant $C \cdot i$. Si ce capital est placé pendant plusieurs années, l'intérêt total produit et donc la valeur acquise dépend de la convention adoptée pour faire les calculs.

Intérêts simples

L'intérêt produit au cours d'une année n'est pas capitalisé pour l'année suivante (il n'est pas ajouté au capital). Les intérêts sont toujours calculés par rapport au capital initial, C_0. En appliquant cette convention, on trouve la suite de capitaux :

Après 1 année : $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$

Après 2 années : $C_2 = C_1 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i) + C_0 \cdot i = C_0(1 + 2i)$

Après 3 années : $C_3 = C_2 + C_0 \cdot i = C_0(1 + 2i) + C_0 \cdot i = C_0(1 + 3i)$

Après 4 années : $C_4 = C_3 + C_0 \cdot i = C_0(1 + 3i) + C_0 \cdot i = C_0(1 + 4i)$

...

Après n années (ou périodes), le capital C_n est donné par la **formule des intérêts simples** :

$$\boxed{C_n = C_0(1 + n \cdot i)}$$

Remarque

Pour tout $n \geqslant 0$, la différence $C_{n+1} - C_n$ est constante et égale à $C_0 \cdot i$. Ainsi la suite des capitaux C_n est une progression arithmétique de raison $C_0 \cdot i$ et de premier terme C_0.

Exemple

On place 500 *CHF à intérêts simples et à* 5% *pendant 20 ans. La valeur acquise (capital final) est donné par :*

$$C_{20} = C_0(1 + 20i) = 500 \cdot (1 + 20 \cdot 0.05) = 1000 \textit{ CHF}$$

Intérêts composés

L'intérêt produit au cours d'une année est capitalisé pour l'année suivante (il est ajouté au capital). Les intérêts sont calculés année par année sur la base du capital à la fin de l'année précédente. Ainsi, chaque année, le montant sur lequel l'intérêt est calculé change ! En appliquant cette convention, on trouve la suite de capitaux :

Après 1 année :	$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$
Après 2 années :	$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2$
Après 3 années :	$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1 + i) = C_0(1 + i)^3$
Après 4 années :	$C_4 = C_3 + C_3 \cdot i = C_3(1 + i) = C_0(1 + i)^4$
...	

Après n années (ou périodes), le capital C_n est donné par la **formule des intérêts composés** :

$$\boxed{C_n = C_0(1 + i)^n}$$

Remarques

1) Pour tout $n \geqslant 0$, le quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ est constant et égal à $1 + i$. Ainsi la suite des capitaux C_n est une progression géométrique de raison $1 + i$ et de premier terme C_0.
2) On appelle généralement la raison de cette progression le **facteur de capitalisation**, noté r.

Exemple

On place 500 *CHF à intérêts composés et à* 5% *pendant 20 ans. La valeur acquise (capital final) est donnée par :*

$$C_{20} = C_0(1 + i)^{20} = 500 \cdot (1 + 0.05)^{20} = 1326,65 \textit{ CHF}$$

Taux proportionnel et taux équivalent

Selon les cas, on peut considérer d'autres unités de temps que l'année : le semestre, le trimestre, le mois, ... Pour cela, on divise l'année en m périodes de longueur égale : $\frac{1}{m}$ année ($m = 2$ pour le semestre, $m = 12$ pour le mois, ...). On calcule alors les intérêts en considérant l'unité de temps choisie et non plus l'année. Les formules précédentes restent valables en utilisant un nombre de périodes et un taux d'intérêt correspondant à l'unité de temps considérée.

Exemple

On place 500 *CHF à intérêts composés mensuels et à un taux d'intérêt mensuel* $i_m = 1\%$ *pendant 2 ans. La valeur acquise (capital final) est donnée par :*

$$C_{24} = C_0(1+i_m)^{24} = 500 \cdot (1+0.01)^{24} = 634,86 \ CHF$$

On peut se poser la question suivante : quel taux d'intérêt appliquer sur m périodes (égales au total à une année) pour que la valeur, au bout d'une année, d'un capital initial C_0 soit la même que si on considérait un taux d'intérêt annuel i ? Celui-ci dépend de la convention de calcul d'intérêts adoptée.

Définition 7.8

2 cas dépendant du principe de capitalisation :

Intérêts simples : le **taux proportionnel**, noté p_m, correspondant à l'unité de temps de longueur $\frac{1}{m}$ année et au taux d'intérêt annuel i est défini par l'égalité :

$$C_0(1+i) = C_0(1+m \cdot p_m)$$

En simplifiant cette égalité, on trouve la définition équivalente :

$$\boxed{p_m = \frac{i}{m}}$$

Intérêts composés : le **taux équivalent**, noté i_m, correspondant à l'unité de temps de longueur $\frac{1}{m}$ année et au taux d'intérêt annuel i est défini par l'égalité :

$$C_0(1+i) = C_0(1+i_m)^m$$

En simplifiant cette égalité, on trouve la définition équivalente :

$$\boxed{i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1}$$

Exemple

Si le taux d'intérêt annuel est de 3% *et que l'unité de temps considéré est le mois* $(m = 12)$*, on a :*

– *taux proportionnel :* $p_{12} = \frac{0.03}{12} = 0.0025 = 0,25\%$

– *taux équivalent :* $i_{12} = \sqrt[12]{1+0.03} - 1 = 0,00247 = 0,247\%$

7.4.2 Actualisation

On considère le problème inverse de la capitalisation. On va déplacer un capital en direction du passé. Par exemple, on peut se demander quel investissement C_0 on doit placer, à un taux d'intérêt annuel i, pour obtenir après n années un capital C_n.

Formules

On peut conserver les mêmes formules que pour la capitalisation, si ce n'est qu'on connaît C_n et qu'on désire déterminer C_0. On obtient les formules suivantes :

Intérêts simples : $$\boxed{C_0 = C_n \cdot \frac{1}{1+n \cdot i}}$$

Intérêts composés : $$\boxed{C_0 = C_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Exemple

Si on souhaite posséder $10'000$ *CHF dans* 30 *ans sur un compte en banque rapportant un intérêt annuel de* 2% *(on laisse les intérêts sur le compte), on doit placer :*

$$C_0 = C_{30} \cdot \frac{1}{(1+i)^{30}} = 10'000 \cdot \frac{1}{(1+0.02)^{30}} \cong 10'000 \cdot 0.552071 \cong 5'520,71 \ \textit{CHF}$$

7.5 Exercices

1) Ecrire les cinq premiers termes des suites ci-dessous :

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} - 2} \end{cases}$

2) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite.

b) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n}{3n+1}$.

3) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$.

a) Démontrer que cette suite est croissante.

b) Démontrer que cette suite admet 1 pour majorant.

4) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Écrire les 4 premiers termes de cette suite.

b) Démontrer que cette suite est croissante.

c) Démontrer que cette suite est bornée.

d) Démontrer par récurrence que les somme des n premiers termes est $s_n = \dfrac{n^2}{n+2}$.

5) Soit la suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}^*$, définie de manière récursive par :

$$\begin{cases} u_1 & = & \sqrt{2} \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n} \end{cases}$$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite.

b) Démontrer par récurrence que cette suite est croissante et majorée.

6) Soit la suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}^*$, définie de manière récursive par :

$$\begin{cases} u_1 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n + 35} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que cette suite est croissante et majorée par 7.

7) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$.

Calculer le plus petit entier naturel p tel que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad u_n > 1000$$

8) Soit une PA avec $u_1 = 8$ et $u_3 = 18$. Calculer u_{10}.

9) Soit les PA ci-dessous :
   a) $2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ \ldots$
      Calculer r, u_{100} et S_{100}.
   b) $-7\ ;\ -4\ ;\ -1\ ;\ \ldots$
      Calculer r, u_{48} et S_{48}.

10) Calculer la somme de tous les multiples de cinq compris entre 101 et 1001.

11) La somme des 19 premiers termes d'une PA est nulle et le dernier terme 27. Définir cette progression. (*Définir une progression* : donner la raison et le premier terme de cette progression.)

12) La somme du 8ème et du 14ème d'une PA est 50. On sait également que $u_3 = 13$. Définir cette progression.

13) Dans une PA, on donne $u_1 = 3$, $S_n = 120$ et $r = 2$.
    Calculer u_n et n.

14) Dans une PA, on donne $u_3 = 3$, $u_9 = 6$ et $S_n = 42.5$.
    Calculer u_1, r et n.

15) Trouver trois nombres en PA connaissant leur somme 33 et leur produit 1287.

16) Déterminer les trois angles d'un triangle rectangle sachant qu'il sont en PA.

17) Déterminer le triangle rectangle dont les trois côtés sont en PA et dont le périmètre vaut 84.

18) Soit une PG avec $u_1 = 8$ et $u_3 = 18$. Calculer u_{10}.

19) Soit les PG ci-dessous :
    a) $2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ \ldots$
       Calculer q, u_7 et S_7.
    b) $1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \ldots$
       Calculer q, u_8 et S_8.

20) Dans une PG, on donne $S_n = 1'456$, $u_n = 972$ et $u_1 = 4$.
    Calculer q et n.

21) Le 6ème terme d'une PG est $1'215$ et le 10ème $98'415$.
    Calculer le 4ème terme.

22) Trouver 3 nombres positifs en PG connaissant leur somme 248 et la différence des extrêmes $u_3 - u_1 = 192$.

23) Les côtés d'un triangle rectangle sont en PG. Déterminer la raison de cette progression.

24) Soit la suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}^*$, définie de manière récursive par :

$$\begin{cases} u_1 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

Une seconde suite (v_n) est donnée par $v_n = u_n - 6$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Donner le terme général v_n en fonction de n ; en déduire le terme général de la suite (u_n).

c) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que

$$n > p \quad \Rightarrow \quad 6 - u_n < 10^{-10}$$

25) Déterminer les fractions irréductibles qui engendrent les nombres périodiques suivants :

a) $3,2121212121212121\ldots$

b) $-11,89090909090\ldots$

26) Un nommé Sissa, l'inventeur du jeu d'échec, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit : "Que tes serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu'à la soixante-quatrième case."

a) Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs ?

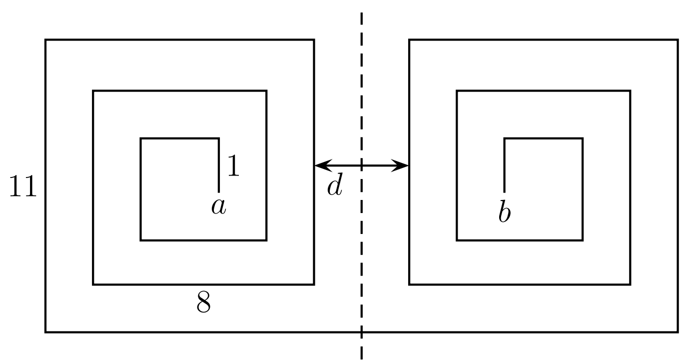
b) En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm^3, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait une surface équivalente à celle de la Suisse, soit 41'288 km^2. ?

27) Une balle de caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, elle remonte au sept dixième de la hauteur atteinte après le précédent rebond.

a) Après le 7ème rebond, quelle sera sa hauteur à l'apogée de sa trajectoire ?

b) Quelle longueur de chemin aura-t-elle parcourue quand elle se sera immobilisée sur le sol ?

28) Dans la décoration d'un palais, on peut remarquer le motif symétrique ci-dessous, composé de plusieurs segments :



Les nombres représentent la numérotation des segments

a) Les segments sont-ils en progression arithmétique ou géométrique ?

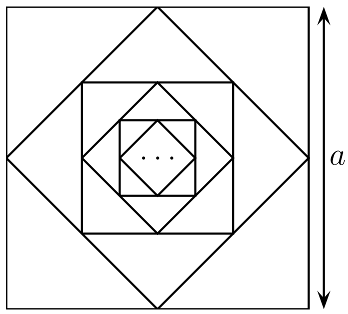
b) Sachant que la longueur du segment no 8 est $16,25$ cm et que celle du segment no 11 est $21,5$ cm, quel est la raison de la progression et la longueur du segment no 1 ?

c) Quelle distance parcourrait une fourmi du point a au point b en suivant les segments du dessin ?

d) Quelle est la distance "à vol d'oiseau" entre a et b ?

e) Que vaut d ?

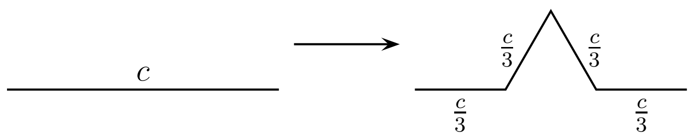
29) Dans un carré de côté a, on joint les milieux des côtés. On forme ainsi un nouveau carré dont on joint les milieux des côtés et ainsi de suite (voir figure ci-dessous). Calculer la somme des aires de tous les carrés ainsi construits.



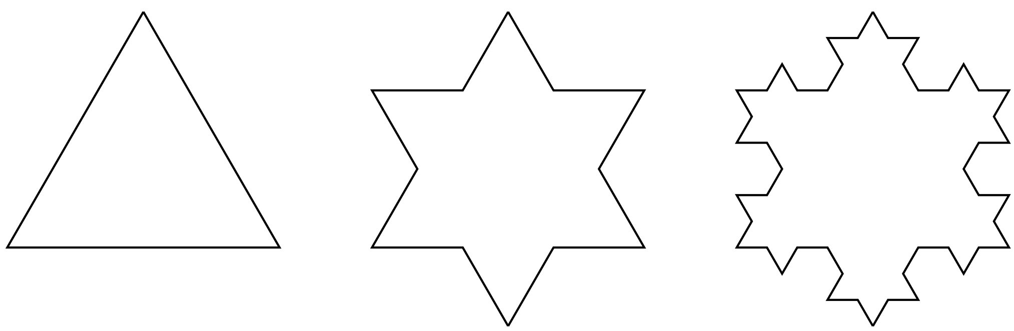
30) Un segment M_1M_2 a une longueur de 12 cm. Soit M_3 le milieu de M_1M_2, M_4 le milieu de M_2M_3, M_5 le milieu de M_3M_4, et ainsi de suite.
Calculer la longueur du segment M_1M_n quand $n \to \infty$.

31) Soit $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{11111\ldots1}_{n \text{ fois}}$. Calculer S_n.
Indication : calculer d'abord $9 \cdot S_n$ puis extraire une PG.

32) Le "flocon de neige" de von Koch est une figure fractale qui se construit de manière itérative. En partant d'un triangle équilatéral, on remplace chaque côté par :



Voici les figures obtenues après 0, 1 et 2 itérations du processus :



Quand le nombre d'itérations tend vers l'infini :

a) que vaut le périmètre du flocon si le côté du triangle équilatéral initial a une longueur c ?

b) que vaut l'aire du flocon ?

33) Que deviendront après 14 ans, $16'000$ CHF placés à intérêts composés à 4% ?

34) Que deviendront $15'000$ CHF placés à un taux annuel de $5\frac{1}{2}\%$ pendant 10 ans à intérêts composés, ceux-ci étant capitalisés tous les six mois sur la base du taux proportionnel correspondant ?

35) Quelle est la somme qui placée à intérêts composés à 6% pendant 20 ans est devenue $206'455$ CHF ?

36) On considère un taux d'intérêt annuel de 3%.

a) Si on place $2'500$ CHF le 1er janvier 2008, quel sera le capital le 1er janvier 2072 ?

b) Un 1er janvier, on constate que le capital se monte à $5'234,45$ CHF. En quelle année est-on ?

37) On place $15'000$ CHF à intérêts composés et à $4\frac{1}{2}\%$ pendant 20 ans. Pendant combien d'années aurait-il fallu placer cette somme à intérêts simples et à 5% pour qu'elle acquière la même valeur ?

38) Pour mener à bien certains travaux, une commune a dû emprunter $1'800'000$ CHF à 5% et veut amortir cette dette en 30 ans. Combien doit-elle prévoir à son budget ?

39) Une personne place à la fin de chaque année $3'000$ CHF à un taux de 4%. Que lui reviendra-t-il une année après son 25ème placement ?

40) Un fumeur dépense en moyenne 6 francs par jour et ce depuis l'âge de 16 ans. Quelle somme aurait-il accumulée le jour de ses 65 ans s'il avait placé à la fin de chaque année et à 4% ce que lui coûte ce vice ?

7.6 Solutions des exercices

1) a) 1 ; -1 ; -5 ; -13 ; -29 b) 3 ; 5 ; $\frac{7}{3}$; 13 ; $\frac{15}{11}$

2) $\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{28}; \dfrac{1}{70}; \dfrac{1}{130}$

4) $\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{13}{15}$

5) a) $\sqrt{2}; \sqrt[4]{8}; \sqrt[8]{128}; \sqrt[16]{32'768}$

7) $p = 500$

8) $u_{10} = 53$

9) a) $r = 2$, $u_{100} = 200$, $S_{100} = 10'100$ b) $r = 3$, $u_{48} = 134$, $S_{48} = 3'048$

10) Somme : $99'450$

11) $r = 3$, $u_1 = -27$

12) $r = 1.5$, $u_1 = 10$

13) $u_n = 21$, $n = 10$

14) $u_1 = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 10$

15) 9 ; 11 ; 13 et 13 ; 11 ; 9

16) $u_1 = 30°$, $u_2 = 60°$, $u_3 = 90°$

17) $u_1 = 21$, $u_2 = 28$, $u_3 = 35$

18) $u_{10} = 307.546875$ ou $u_{10} = -307.546875$

19) a) $q = 2$, $u_7 = 128$, $S_7 = 254$ b) $q = -\frac{1}{2}$, $u_8 = -\frac{1}{128}$, $S_8 = \frac{257}{384}$

20) $q = 3$, $n = 6$

21) $u_4 = 135$

22) 8 ; 40 ; 200

23) $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

24) a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$

b) $v_n = -\dfrac{1}{3^{n-2}}$ et $u_n = 6 - \frac{1}{3^{n-2}}$

c) $p = 22$

25) a) $\dfrac{106}{33}$ b) $-\dfrac{654}{55}$

26) a) $1,84 \cdot 10^{19}$ grains de blé b) environ 45 cm

27) a) $0,165$ m b) $\frac{34}{3}$ m

28) a) PA b) $r = 1.75$, 4 cm c) 327 cm
d) 21 cm e) 7 cm

29) $Aire = 2a^2$

30) 8 cm

30) $S_n = 10\frac{10^n-1}{81} - \frac{n}{9}$

32) a) ∞ b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}c^2$

33) $27'706.82$ CHF

34) $25'806.43$ CHF

35) $64'373.64$ CHF

36) a) $16'577$ CHF b) par tâtonnement : en 2033

37) 29 ans (léger dépassement de valeur)

38) environ $117'092$ CHF

39) environ $129'935$ CHF

40) environ $231'810$ CHF

Deuxième partie

Géométrie

Chapitre 8

Répétition de géométrie

8.1 Quelques définitions

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques notions de géométrie vues à l'école secondaire. Nous allons nous baser sur quelques définitions intuitives :

*"Le **point** est ce qui n'a aucune partie, la **ligne** est une longueur sans largeur, la **ligne droite** est celle qui est placée entre ses points."*

Ces définitions sont tirées des écrits d'Euclide ...

8.1.1 Notations

Dans ce cours, nous utiliserons les notations suivantes :

$A,\ B,\ C\ \ldots$	points
$a,\ b,\ c\ \ldots$	droites
$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots$	angles ou mesure d'angles
(AB)	la droite passant par A et B
$\delta(A;B)$ ou AB	la distance de A à B
$[AB]$	le segment (de droite) d'extrémités A et B
$[AB)$	la demi droite d'origine A et passant par B
$\widehat{AOB}$	angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$
$\overset{\frown}{AB}$	arc de cercle d'extrémité A et B

Rappel

Nous donnons ci-dessous l'ensemble des lettres de l'alphabet grec avec leur nom.

Alphabet grec						
Minuscule	Majuscule	Nom		Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha		ν	N	nu
β	B	bêta		ξ	Ξ	ksi ou xi
γ	Γ	gamma		o	O	omicron
δ	Δ	delta		π ou ϖ	Π	pi
ε ou ϵ	E	epsilon		ρ ou ϱ	P	rho
ζ	Z	zêta		σ ou ς	Σ	sigma
η	H	êta		τ	T	tau
θ ou ϑ	Θ	thêta		υ	Υ	upsilon
ι	I	iota		φ ou ϕ	Φ	phi
κ	K	kappa		χ	X	khi ou chi
λ	Λ	lambda		ψ	Ψ	psi
μ	M	mu		ω	Ω	oméga

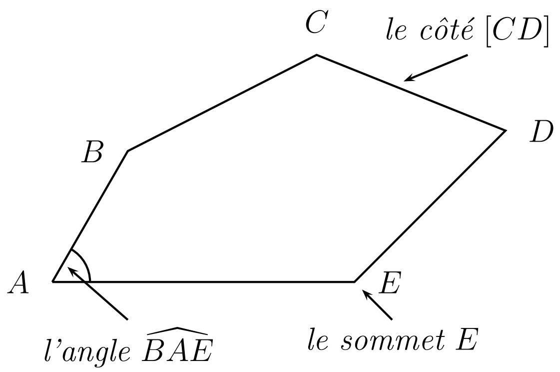
8.1.2 Les polygones

Un **polygone** est une figure plane limitée par des segments de droites consécutifs. Pour rappel, un **figure plane** est une partie du plan limitée par une ligne fermée.

Les extrémités des segments sont appelés les **sommets** du polygone. Les segments de droites entre deux sommets sont appelés les **côtés** du polygone.

En général, on nomme un polygone par l'énumération des sommets, en respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent sur le pourtour du polygone.

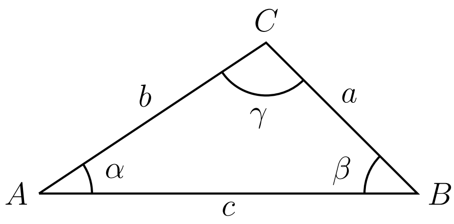
Exemple



En respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent sur le pourtour de ce polygone, on pourrait l'appeler "le polygone ABCDE", mais aussi "CDEAB" ou encore "AEDCB",... Mais, par exemple, on ne peut pas l'appeler "le polygone "ABCED".

8.1.3 Les triangles

Un **triangle** est un polygone à trois côtés.



Définition 8.1
Nous pouvons définir quelques droites remarquables dans les triangles quelconques.

- La médiane :

Droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
Chacune des trois médianes divise le triangle en deux triangles d'aires égales.

- La médiatrice :

Droite passant perpendiculairement par le milieu d'un côté du triangle.
Plus généralement, la **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
De plus, cette médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

- La hauteur :

Droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé.
L'intersection de la hauteur et du côté opposé s'appelle le **pied** de la hauteur.

- La bissectrice intérieure :

Droite passant par un sommet du triangle et coupant l'angle intérieur formé par les deux côtés en deux parties égales.
Plus généralement, la **bissectrice** d'un secteur angulaire est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure. Elle forme de ce fait l'axe de symétrie de cet angle.
De plus, la **bissectrice** de deux droites est l'ensemble des points à égale distance des deux droites.

A faire : dessiner des exemples de médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices.

Définition 8.2
On peut définir quelques familles de triangles particuliers.

- Triangle isocèle :

Triangle ayant deux côtés **isométriques** ($\equiv$ de même longueur) ou deux angles de même mesure.
Un triangle isocèle est caractérisé par un axe de symétrie et par le fait que la médiane, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives à la base et à l'angle au sommet sont confondues.

- Triangle équilatéral :

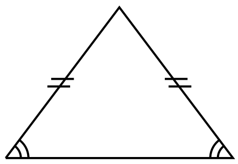
Triangle ayant ses trois côtés isométriques ou ses trois angles de même mesure.
Un triangle équilatéral est un triangle trois fois isocèle.

- Triangle rectangle :

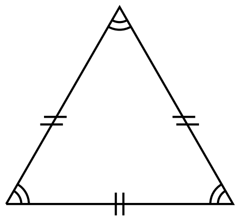
Triangle possédant un angle droit. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** et les côtés de l'angle droit les **cathètes** .

- Triangle scalène :

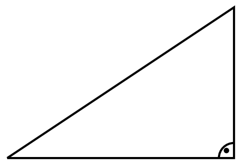
Triangle ne possédant pas de symétrie particulière.



Triangle isocèle



Triangle équilatéral



Triangle rectangle

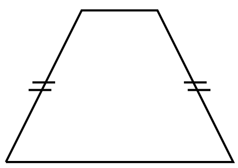
8.1.4 Les quadrilatères

Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés.

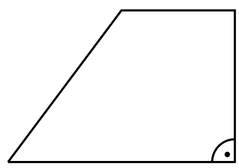
Définition 8.3
On peut définir quelques familles de quadrilatères particuliers.

- Trapèze :

Quadrilatère ayant au moins une paire de côtés parallèles.



Trapèze isocèle



Trapèze rectangle

- Parallélogramme :

Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles.

Propriétés : - les diagonales se coupent en leur milieu,
- les côtés parallèles sont isométriques,
- il possède un centre de symétrie.

- Rectangle :

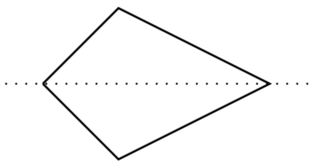
Parallélogramme ayant au moins un angle droit.

Propriétés : - les mêmes que celles du parallélogramme,
- les diagonales sont isométriques,
- il possède deux axes de symétrie.

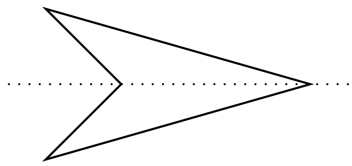
- Rhomboïde :

Quadrilatère dont au moins une des diagonales est un axe de symétrie.

Propriétés : - les diagonales sont perpendiculaires,
- il possède au moins une paire d'angles égaux,
- il possède deux paires de côtés consécutifs isométriques,
- il possède un axe de symétrie.



Cerf-volant



Fer-de-lance

- Losange :

Quadrilatère dont les deux diagonales sont des axes de symétries.

Propriétés : - les diagonales sont perpendiculaires,
- les diagonales se coupent en leur milieu,
- les quatre côtés sont isométriques,
- les angles opposés sont isométriques.

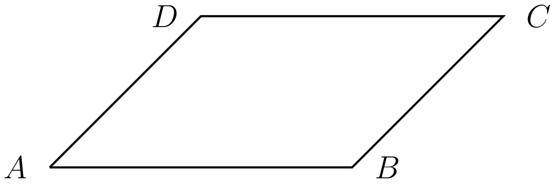
- Carré :

Losange ayant au moins un angle droit.

Propriétés : - toutes celles du losange,
- il possède quatre axes de symétries.

Théorème 8.1

1. Tout quadrilatère qui possède une paire de côtés parallèles et isométriques est un parallélogramme.
2. Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.



Démonstration.

1. Admettons que $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et isométriques. Il existe alors une translation qui déplace $[AB]$ sur $[CD]$.
   A allant sur D et B sur C, $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles et isométriques. $ABCD$ est donc un parallélogramme.
2. Soit O l'intersection des diagonales. La symétrie de centre O déplace C sur A et D sur B. Or, par symétrie centrale, tout segment est transformé en un segment parallèle et isométrique.
   $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et isométriques. $ABCD$ est un parallélogramme.

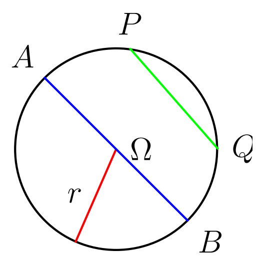
□

8.1.5 Les cercles et les disques

Un **cercle** est l'ensemble de tous les points situés à une distance fixée, appelé **rayon** et notée r, d'un point donné, appelé **centre** et noté Ω.

On appelle **disque** la surface enfermée par un cercle.

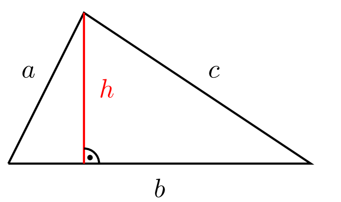
Sur le dessin :
- $[AB]$ est un **diamètre** du cercle,
- $[PQ]$ est un corde du cercle,
- $\overset{\frown}{PQ}$ est un arc de cercle.



8.1.6 Formules de calcul du périmètre et l'aire

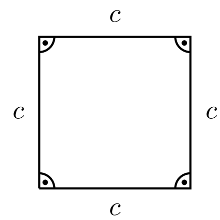
On donne ci-dessous les formules pour le calcul du périmètre, p, et de l'aire, $\mathcal{A}$, de figures planes présentées dans les pages précédentes.

Triangle



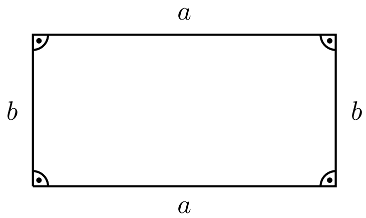
$p = a + b + c$ | $\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Carré



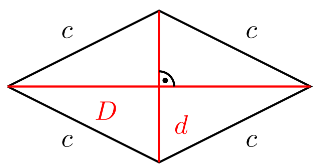
$p = 4 \cdot c$ | $\mathcal{A} = c^2$

Rectangle



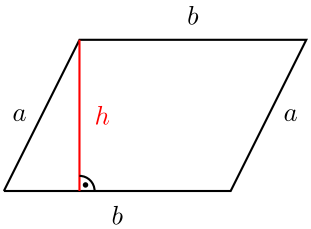
$p = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $\mathcal{A} = a \cdot b$

Losange



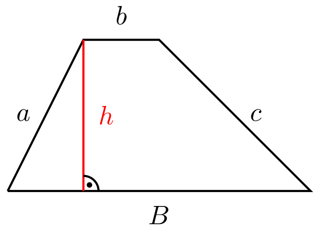
$p = 4 \cdot c$ | $\mathcal{A} = \frac{D \cdot d}{2}$

Parallélogramme



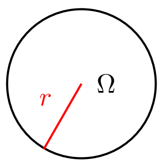
$p = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ | $\mathcal{A} = b \cdot h$

Trapèze



$p = a + B + c + b$ | $\mathcal{A} = \dfrac{B + b}{2} \cdot h$

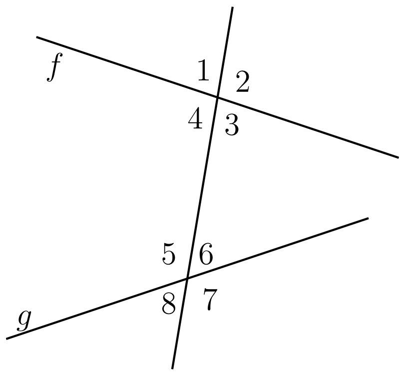
Cercle et disque



$p = 2\pi \cdot r$ | $\mathcal{A} = \pi \cdot r^2$

8.1.7 Les angles

Définition 8.4



- Les angles $1-3$ $(2-4,\ 5-7,\ 6-8)$ sont appelés **opposées par le sommet**.
- Les angles $1-5$ $(2-6,\ 3-7,\ 4-8)$ sont appelés **correspondants**.
- Les angles $3-5$ et $4-6$ sont appelés **alternes-internes**.
- Les angles $1-7$ et $2-8$ sont appelés **alternes-externes**.
- Si la somme de deux angles fait $180°$, ces deux angles sont dit **supplémentaires**. Les angles $1-2$, $3-4$, $5-6$ et $7-8$ sont supplémentaires.

Proposition 8.2

1. Les angles opposés par le sommet sont égaux.
2. Si les droites f et g sont *parallèles*, alors les angles correspondants, alternes-internes et alternes-externes, sont tous *égaux*. La réciproque est vraie.

8.2 Quelques théorèmes

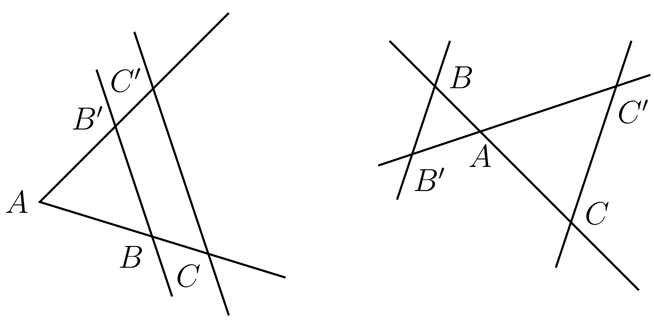
8.2.1 Théorème de Thalès

Le **Théorème de Thales** est un théorème de géométrie, attribué selon la légende au mathématicien et philosophe grec Thalès de Milet ; en réalité Thalès s'est davantage intéressé aux angles opposés dans des droites sécantes, aux triangles isocèles et aux cercles circonscrits.

Cette propriété de proportionnalité était connue des Babyloniens. Mais la première démonstration de ce théorème est attribuée à Euclide qui la présente dans ses Eléments (proposition 2 du livre IV) : il le démontre par proportionnalité d'aires de triangles de hauteur égale.

Le Théorème de Thalès sert notamment à calculer des longueurs dans un triangle, à condition d'avoir deux droites parallèles.

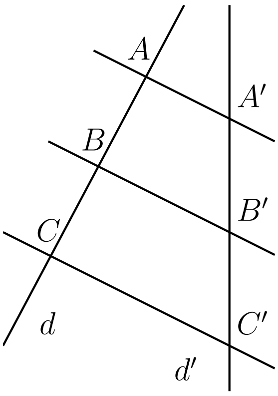
Théorème 8.3 (Théorème de Thalès)



Dans les situations ci-contre $((BB')\ //\ (CC'))$, on a :

$$\boxed{\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{BB'}{CC'}}$$

On peut permuter certains termes de ces fractions pour obtenir d'autres égalités de rapports, comme $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AB'}{AB}$.
En réalité, le théorème de Thalès concerne une propriété plus générale :



Trois droites parallèles déterminent sur deux droites sécantes (quelconques) des segments homologues proportionnels.

Autrement dit :

Si trois droites parallèles rencontrent deux droites d et d', respectivement et dans cet ordre, en A, B, C et A', B', C', alors :

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}}$$

En permutant certains termes de ces fractions, on peut faire naître d'autres égalités de rapports :

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{AC} \quad \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{BC}{AC} \quad \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

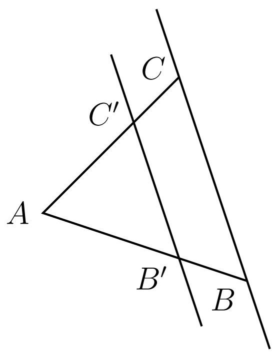
Remarque

Dans le cas général du théorème de Thalès (ci-dessus) avec $A \neq A'$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{BB'}{CC'} \qquad \text{et} \qquad \frac{A'B'}{A'C'} \neq \frac{BB'}{CC'}$$

contrairement au cas particulier du théorème avec $A = A'$ où ces rapport sont égaux.

Théorème 8.4 (Réciproque du théorème de Thalès)
Le théorème de Thalès, dans son sens direct, permet de déduire certaines proportions dès que l'on connaît un certain parallélisme. Sa réciproque permet de déduire un parallélisme dès que l'on connaît l'égalité de certains rapports.



Dans un triangle ABC, si les points A, B', B sont alignés *dans cet ordre* ($B' \in [AB]$) et les points A, C', C sont alignés *dans cet ordre* ($C' \in [AC]$) et si, de plus, les rapports $\dfrac{AB'}{AB}$ et $\dfrac{AC'}{AC}$ sont égaux $\left(\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}\right)$ alors :

les droites (BC) et $(B'C')$ sont **parallèles**.

Des théorèmes analogues existent pour des points A, B, B' alignés dans cet ordre et pour des points B', A, B alignés dans cet ordres.

8.2.2 Angle au centre

Définition 8.5
Un angle est dit **inscrit** dans un cercle quand son sommet est sur le cercle et ses côtés

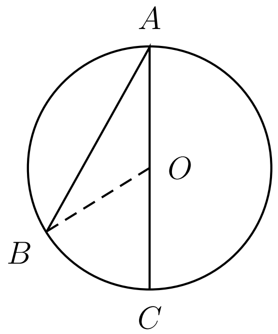
coupent le cercle.

Un angle est dit **au centre** quand son sommet est au centre d'un cercle.

Théorème 8.5
Tout angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

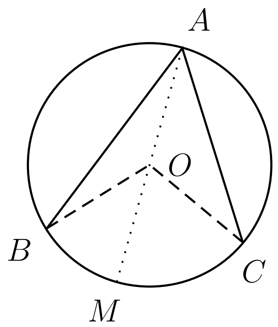
Démonstration. On désire démontrer que l'angle au centre $\widehat{BOC}$ vaut le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$: $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. On Nous distinguons trois cas :

1.



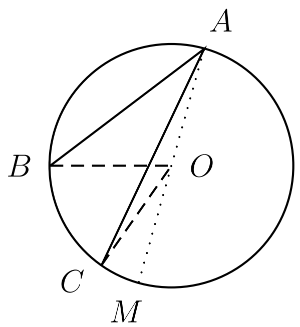
Le triangle OAB est isocèle. Nous obtenons les résultats suivant :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \alpha$
- $\widehat{AOB} = 180° - 2\alpha$
- $\widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 180°$
- et donc : $\widehat{BOC} = 180° - \widehat{AOB} = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$

2.



D'après le cas particulier ci-dessus :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{BOM} + \widehat{MOC}$
- $\widehat{BOM} = 2 \cdot \widehat{BAM}$ et $\widehat{MOC} = 2 \cdot \widehat{MAC}$
- et donc : $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAM} + 2 \cdot \widehat{MAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$

3.



D'après le cas particulier du début :
- $\widehat{BAC} = \widehat{BAM} - \widehat{MAC}$ et $\widehat{BOC} = \widehat{BOM} - \widehat{MOC}$
- $\widehat{BOM} = 2 \cdot \widehat{BAM}$ et $\widehat{MOC} = 2 \cdot \widehat{MAC}$
- et donc : $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAM} - 2 \cdot \widehat{MAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$.

□

Corollaire 8.6
1. Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.
2. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont isométriques.

8.2.3 Triangles semblables

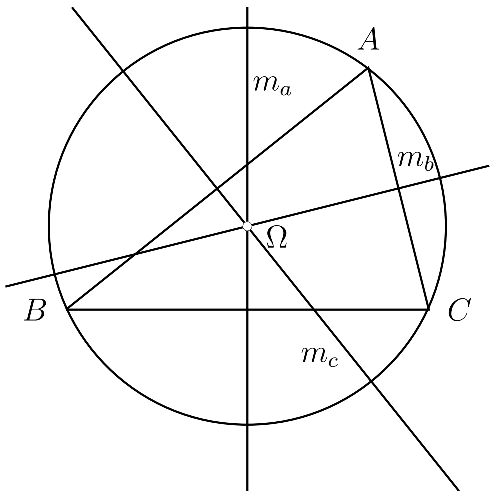
Définition 8.6
Deux triangles sont **semblables** si leurs côtés sont proportionnels. Les cotés proportionnels sont dit **analogues** ou **correspondants**.

Proposition 8.7
Deux triangles sont semblables quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre.

Proposition 8.8
Deux triangles sont semblables quand deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et les angles déterminés par ces côtés sont égaux.

8.2.4 Cercle circonscrit à un triangle

Théorème 8.9
Les médiatrices d'un triangle sont **concourantes** ($\equiv$ se coupent au même point).



Démonstration.

Hyp. : m_a est la médiatrice de BC, m_b la médiatrice de AC et m_c la médiatrice de AB

Concl. : $m_a \cap m_b = \{\Omega\}$ et $\Omega \in m_c$

Démo. : m_a et m_b ne sont pas parallèles, sinon $[BC]$ et $[AC]$ le seraient aussi. Donc m_a et m_b se coupent en un point Ω.

$$\left.\begin{array}{lll} \Omega \in m_a & \Rightarrow & B\Omega = C\Omega \\ \Omega \in m_b & \Rightarrow & C\Omega = A\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow A\Omega = B\Omega$$

Donc $\Omega \in m_c$.

□

Conséquence

A tout triangle, on peut associer un et un seul point équidistant des sommets du triangle. Par suite, on peut associer un et un seul cercle passant par les 3 sommets. Ce cercle est appelé **cercle circonscrit au triangle**.

Cas particulier

Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A. Soit Ω le milieu de $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à Ω. $ABA'C$ est un rectangle.

Donc Ω est équidistant de A, A', B, C. Par suite, le cercle de centre Ω passe par ABC.

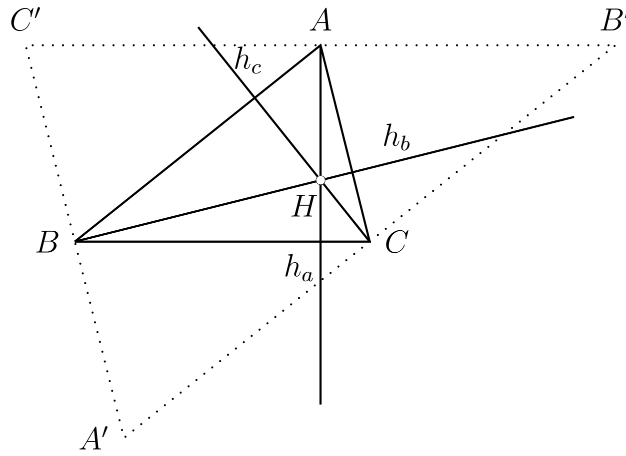
En d'autres termes : dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit admet l'hypothénuse comme diamètre.

La réciproque est aussi vraie : lorsque le cercle circonscrit d'un triangle ABC admet le côté BC comme diamètre, le triangle est rectangle en A.

Définition 8.7
Le **cercle de Thalès** d'un segment est le cercle admettant ce segment comme diamètre.

8.2.5 Orthocentre d'un triangle

Théorème 8.10
Les hauteurs d'un triangle sont **concourantes**.



Démonstration.

Hyp. : $A \in h_A$, $h_A \perp [BC]$, $B \in h_B$, $h_B \perp [AC]$, $C \in h_C$, $h_C \perp [AB]$.

Concl. : $h_A \cap h_B = h_A \cap h_C = h_B \cap h_C = H$.

Démo. : Traçons $[B'C'] \mathbin{//} [BC]$ par A et $[A'C'] \mathbin{//} [AC]$ passant par B.

Le quadrilatère $ACBC'$ est un parallélogramme. AC' et BC sont donc isométriques.

Pour la même raison, BC et AB' sont isométriques. A est donc le milieu de $B'C'$.

Donc $h_A \perp B'C'$ est la médiatrice de $B'C'$. De même, h_B est la médiatrice de $A'C'$ et h_C celle de $A'B'$.

Donc, d'après le théorème précédent, H existe et est le point d'intersection des trois hauteurs.

□

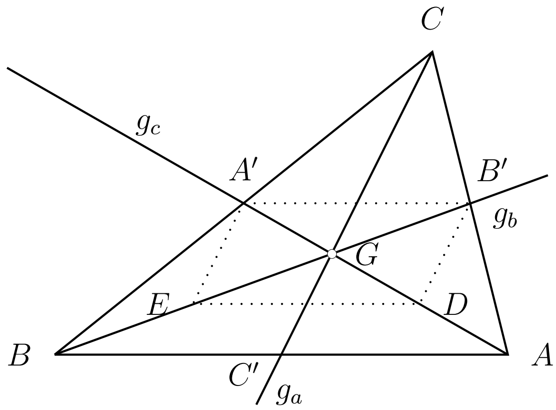
Définition 8.8
L'**orthocentre** d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.

Remarque

L'orthocentre est donc le centre du cercle circonscrit au triangle **augmenté**.

8.2.6 Centre de gravité

Théorème 8.11
Les médianes d'un triangle se coupent en un point intérieur du triangle, situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir des sommets correspondants.



Démonstration.

Hyp. : $A'B = A'C, \quad A' \in [BC]$
$B'C = B'A, \quad B' \in [AC]$
$C'A = C'B, \quad C' \in [AB]$

Concl. : 1. $g_A \cap g_B \cap g_C = G$
2. $GA = 2GA'$
$GB = 2GB'$
$GC = 2GC'$

Démo. : $[AA']$ et $[BB']$ se coupent à l'intérieur de ABC. Soit G ce point, D le milieu de $[GA]$ et E le milieu de $[GB]$.

1. Le quadrilatère $A'B'DE$ est un parallélogramme. En effet, $[A'B'] \,//\, [AB]$ et $A'B' = \frac{1}{2}AB$. De même que $[DE] \,//\, [AB]$ et $DE = \frac{1}{2}AB$ (segments de ABG).
2. Donc $\left.\begin{array}{r} GA' = DG \\ AD = DG \end{array}\right\} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AA'$ et de même, on voit que $BG = \dfrac{2}{3}BB'$.

   En remplaçant $[BB']$ par $[CC']$, il existe un point G' avec $G'A = 2G'A'$. On aurait donc

$$\begin{array}{rcc} GA = 2GA' & \text{avec} & G \in AA' \\ \text{et } G'A = 2G'A' & \text{avec} & G' \in AA'. \end{array}$$

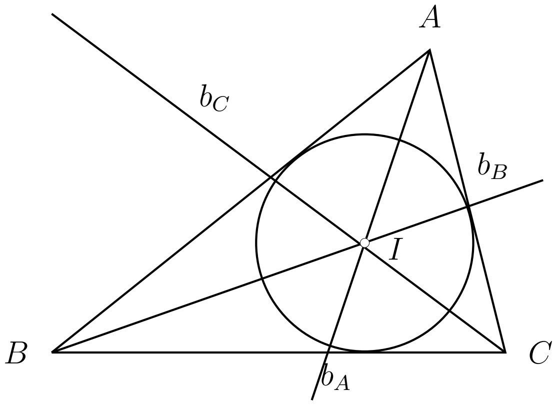
   Par suite $G = G'$

□

Définition 8.9
Le **centre de gravité** ou **barycentre** d'un triangle est le point d'intersection des médianes de ce triangle.

8.2.7 Cercle inscrit dans un triangle

Théorème 8.12
Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.



Démonstration.

Hyp. : b_A, b_B, b_C sont les bissectrices intérieures.

Concl. : $b_A \cap b_B \subset b_C$, $(b_A \cap b_B \cap b_C = \{I\})$.

Démo. : b_A coupe le côté opposé au sommet d'où elle est issue. Il en est de même pour b_B.

Donc $b_A \cap b_B = \{I\}$, un point intérieur de ABC.

$$\left.\begin{array}{lll} I \in b_A & \Rightarrow & \delta(I;[AB]) = \delta(I;[AC]) \\ I \in b_B & \Rightarrow & \delta(I;[AB]) = \delta(I;[BC]) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta(I;[AC]) = \delta(I;[BC])$$

Donc I appartient à la bissectrice intérieure issue de C, donc appartient à b_C.

□

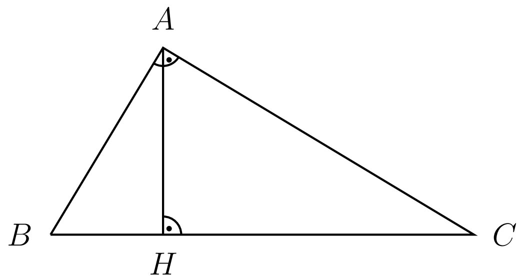
Conséquence

A tout triangle, on peut associer un et un seul point équidistant des côtés du triangle. Par suite, on peut associer un et un seul cercle tangent aux 3 côtés du triangle. Ce cercle est appelé **cercle inscrit au triangle**.

8.2.8 Théorèmes relatifs au triangle rectangle

Nous allons énoncer ci-dessous trois théorèmes importants liés au triangle rectangle : les théorèmes **de la hauteur, d'Euclide et de Pythagore**. Les démonstrations de ces théorèmes seront effectuées en exercices.

On considère un triangle rectangle en A. Le point H désigne le pied de la hauteur issue du sommet A.



Rappel

La **moyenne arithmétique** de deux nombres x et y est donnée par $\dfrac{x+y}{2}$.

La **moyenne géométrique** de deux nombres x et y est donnée par $\sqrt{x \cdot y}$.

Théorème 8.13 (Théorème de la hauteur)
La hauteur d'un triangle rectangle est la moyenne géométrique entre les 2 segments qu'elle détermine sur l'hypothénuse. Autrement dit :

$$\boxed{AH^2 = BH \cdot CH}$$

Théorème 8.14 (Théorème d'Euclide)
Dans un triangle rectangle, chaque cathète est la moyenne géométrique entre sa projection sur l'hypothénuse et l'hypothénuse entière. Autrement dit :

$$\boxed{AB^2 = BH \cdot BC} \qquad et \qquad \boxed{AC^2 = CH \cdot CB}$$

Théorème 8.15 (Théorème de Pythagore)
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux cathètes. La réciproque est encore vraie. Autrement dit :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

8.3 Exercices

1) Dans un triangle ABC, tel que l'angle en A égale deux fois l'angle en B, on prend sur $[AB]$ un point quelconque M ; on prolonge $[CA]$ d'une longueur AM et on place D à l'extrémité du segment obtenu ($AD = AM$). Enfin, on mène la droite (DM) qui coupe $[BC]$ en N.

   a) Comparer les angles $\widehat{ADM}$ et $\widehat{AMD}$ avec l'angle $\widehat{BAC}$.

   b) Montrer que $MN = NB$.

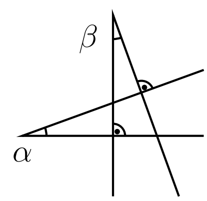
   c) Montrer que l'angle $\widehat{CND}$ et que l'angle $\widehat{BAC}$ sont isométriques.

2) Sur les côtés d'un angle de sommet O, on prend des longueurs égales $OA = OB$. En A, on élève la perpendiculaire à (OA) qui coupe la droite (OB) en C. En B, on élève la perpendiculaire à (OB) qui coupe la droite (OA) en D. Ces perpendiculaires se coupent en I.

   a) Montrer que l'on a : i) $OC = OD$
   ii) $IC = ID$
   iii) $IA = IB$

   b) Montrer que $[OI)$ est la bissectrice de l'angle de sommet O.

3) Montrer que deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont isométriques.



4) Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle ; la bissectrice intérieure de l'angle en A coupe le cercle en M ; la bissectrice intérieure de l'angle en B coupe le cercle en N et rencontre (AM) en I.
   Comparer les angles $\widehat{BIM}$ et $\widehat{IBM}$ et montrer que $IM = BM$.

5) On trace les hauteurs $[AA']$, $[BB']$ d'un triangle ABC. Elles se coupent en H. La hauteur $[AA']$ recoupe le cercle circonsrcit en H'.

   a) Comparer les angles $\widehat{CAA'}$ et $\widehat{CBB'}$.

   b) Comparer les angles $\widehat{CBH'}$ et $\widehat{CAH'}$.

   En déduire une propriété remarquable des symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux trois côtés du triangle.

6) Un **lieu géométrique** désigne l'ensemble des points du plan ou de l'espace possédant une certaine propriété.

   Exemple : *le lieu géométrique des points M dont la distance à un point fixe A est égale à R est le cercle de centre A et de rayon R.*

   Construire le lieu géométrique des points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de 90° et celui d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de 30°.

7) Montrer que la hauteur $[AH]$ d'un triangle rectangle en A détermine deux triangles rectangles semblables au triangle donné. En déduire les théorème de la hauteur, d'Euclide et de Pythagore.

8) Construire les longueurs données par les expressions suivantes dans lesquels a, b et c sont des longueurs données.

   a) $x = \sqrt{a^2 + 4b^2}$ b) $x = a\sqrt{7}$ c) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

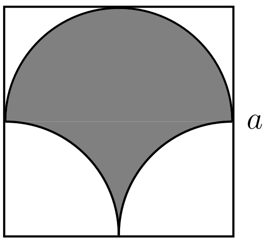
9) Quelle est la valeur de la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a ? Que vaut son aire ?

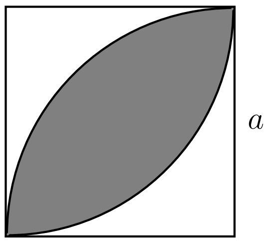
10) Partager un segment donné en n parties de même longueur ; prendre $n = 4$ puis $n = 7$.

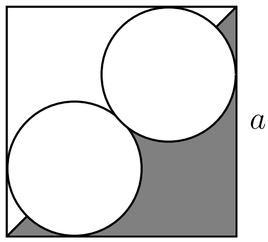
11) Construire un triangle ABC, connaissant α, b et b_A (la longueur de la bissectrice intérieure issue de A).

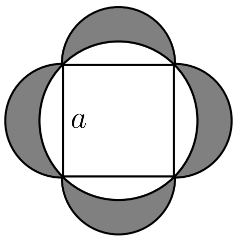
12) Construire un triangle ABC, connaissant c, h_B (la longueur de la hauteur issue de B) et β.

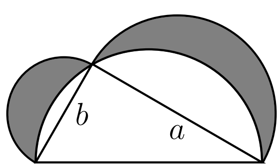
13) Calculer les aires des domaines grisés ci-dessous :

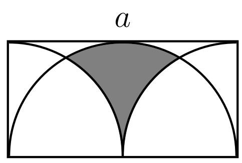
a)


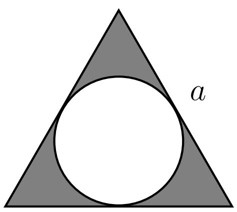
b)


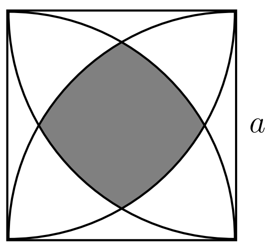
c)


d)


e)


f)


g)


h)


14) Entourez un ballon de football d'une ficelle rouge. Allongez la ficelle de manière à entourer le ballon tout en restant à 1 mètre de sa surface. Entourez alors la Terre (supposée sphérique) entière avec une ficelle bleue et allongez cette ficelle de façon à entourer la Terre tout en restant à 1 mètre de sa surface. Quel est, selon vous, le plus grand des deux allongements ? Celui de la ficelle rouge autour du ballon ou celui de la ficelle bleue entourant la Terre ?

15) Le jour du solstice d'été, le fond d'un puits situé en Haute-Egypte à Syrène (l'actuel Assouan) est éclairé par le soleil. Au même moment, à Alexandrie, distant de 800 km et sur le même méridien, on voit le soleil sous un angle de 7° par rapport à la verticale du lieu. Déduire le rayon de la terre de cette observation.

16) Soit un cube d'arête a.
   a) Calculer le volume de la sphère inscrite au cube.
   b) Calculer l'aire de la sphère tangente aux douze arêtes du cube.
   c) Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube.

17) On dispose d'une corde de longueur $l = \pi$. Parmi les trois figures géométriques suivantes, laquelle doit-on former avec la corde pour couvrir la plus grande surface : un triangle équilatéral, un carré ou un cercle ?

8.4 Solutions des exercices

9) $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

13) a) $\frac{a^2}{2}$ b) $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$ c) $\frac{3 + 2\sqrt{2} - \pi}{6 + 4\sqrt{2}}a^2$ d) a^2

e) $\frac{ab}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}a^2$ g) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}a^2$ h) $\left(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) a^2$

15) $6548\ km$

16) a) $V = \frac{\pi}{6}a^3$ b) $A = 2\pi a^2$ c) $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}a^3$

Chapitre 9

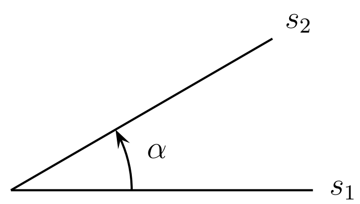
Trigonométrie

9.1 Mesure d'un angle

9.1.1 Angles et degrés

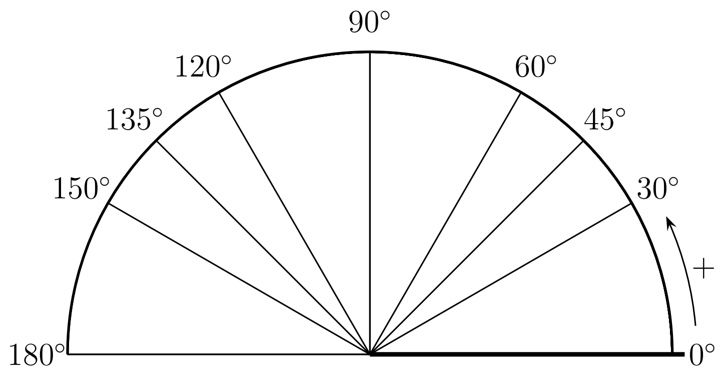
Inventée par les Grecs il y a plus de 2000 ans, la trigonométrie est une partie des mathématiques qui s'occupe des relations entre les longueurs et les angles des triangles. Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

Un angle est une grandeur permettant de décrire l'amplitude d'une rotation. On utilise très souvent des lettres grecques α (alpha), β (bêta), γ (gamma), ϕ (phi) ou θ (thêta) pour nommer les angles (voir les conventions de notation sous 8.1.1).

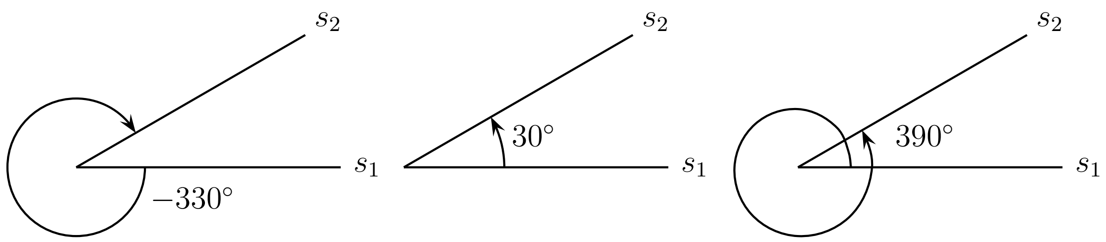


Afin de résoudre des problèmes ayant trait à l'astronomie, les Babyloniens ont divisé le disque en 360 parties égales identifiant un **degré**[°]. On mesure le nombre de degrés depuis la demi-droite de référence du 0° dans le **sens trigonométrique** (sens contraire de celui des aiguilles d'une montre).

Ce choix se justifiait par le fait que 360 a un grand nombre de diviseurs. En effet, 360 est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 et 180.



A une même situation peuvent correspondre plusieurs angles (une infinité !). En effet, on peut faire autant de tours que l'on veut dans un sens comme dans l'autre. Par exemple, voici trois façons d'amener le segment s_1 sur le segment s_2 par une rotation.



Voici quelques-uns des angles correspondant à la situation ci-dessus.

$$\ldots, -1050°, -690°, -330°, 30°, 390°, 750°, 1100°, \ldots$$

Ces angles sont les mêmes à un multiple de 360° près, ce qui correspond à un tour.

Définition 9.1
Un angle α est dit :

- **aigu** si $\alpha > 0°$ et $\alpha < 90°$.
- **droit** si $\alpha = 90°$.
- **obtus** si $\alpha > 90°$ et $\alpha < 180°$.
- **plat** si $\alpha = 180°$.

9.1.2 Angles et radians

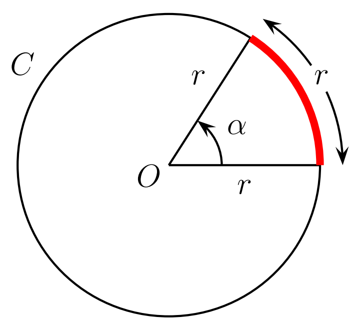
Jusqu'à présent, vous avez toujours représenté les angles en degrés. C'est la manière la plus courante de se représenter les angles, mais ce n'est pas toujours la plus pratique en mathématiques. Une autre façon de mesurer un angle serait de prendre la longueur de l'arc correspondant. Toutefois cette longueur dépend du rayon du cercle.

Définition 9.2
Soit C un cercle de centre O et de rayon r. Soit encore α un angle de sommet O.

Si la longueur de l'arc de cercle intercepté par l'angle α est égale à r, on dit que l'angle α mesure un **radian** (de radius = rayon).

Comme la circonférence du cercle vaut $2\pi r$, il en découle que :

$$1 \text{ tour} = 2\pi \text{ radians}$$



Or, 1 tour correspond également à 360°. On a donc la correspondance suivante :

$$\boxed{360° \longleftrightarrow 2\pi \qquad \text{ou} \qquad 180° \longleftrightarrow \pi}$$

On prononce "2 pi radians correspond à 360 degrés".

Exemple

$$180° \longleftrightarrow \pi \ radians \ \cong 3.14 \ radians$$

$$1° \longleftrightarrow \frac{\pi}{180} \ radians \ \cong 0.0175 \ radian$$

Un angle de 1 *radian correspond à un angle de* $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \cong 57.2958°$.

Ainsi, pour convertir des degrés en radians, il faut multiplier le nombre de degrés par $\frac{\pi}{180}$. Inversement, pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier le nombre de radians par $\frac{180}{\pi}$.

A vous :

degrés	0°	15°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
radians						$\frac{\pi}{2}$			

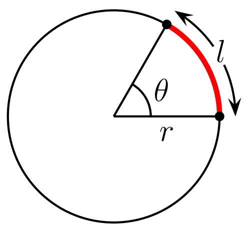
Par convention, quand on ne précise pas l'unité d'un angle, il est exprimé en **radians**. Si vous voulez travailler en degrés, n'oubliez pas le °.

9.1.3 Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire

Considérons un cercle de rayon r et un angle au centre de θ radians.

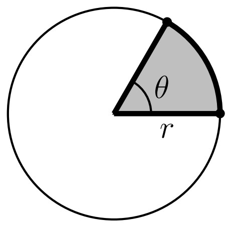
D'après la définition du radian, la longueur l de l'arc correspondant à l'angle θ est donnée par

$$\boxed{l = r\theta}$$



De même, l'aire S du secteur circulaire correspondant à l'angle θ est donnée par

$$\boxed{S = \frac{1}{2}r^2\theta}$$



9.2 Le cercle trigonométrique

Définition 9.3
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère orthonormé.

Dans ce cas, un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur 1 et un angle de θ radians correspond à un arc de longueur θ.

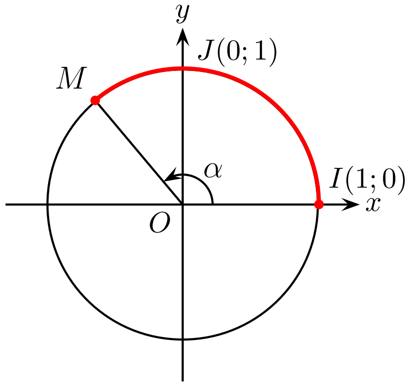
Nous allons "enrouler la droite réelle autour du cercle trigonométrique" de manière à visualiser tout nombre réel comme la mesure en radians d'un angle.

Plus précisément, à tout nombre réel $\alpha > 0$, on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique tel que :

l'arc $\overset{\frown}{IM}$ a une longueur égale à α et est orienté positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Si $\alpha < 0$, l'arc est orienté négativement.

Le nombre α est donc une **mesure en radians** de l'angle $\widehat{IOM}$. Cette mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc correspondant sur le cercle trigonométrique et s'écrit sans unité.



Un angle possède plusieurs mesures en radians qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π.

9.2.1 Les fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus

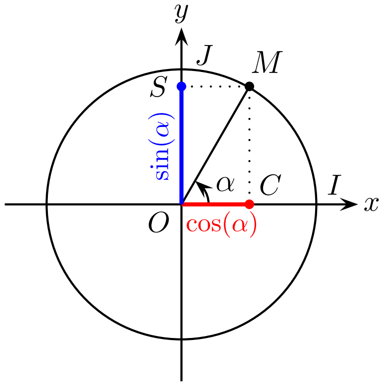
Définition 9.4

Soit $P(1;0)$ sur le cercle trigonométrique. Soit encore M, l'image de P par une rotation de centre O et d'angle α.

On appelle **cosinus** de l'angle α, noté $\cos(\alpha)$, la première coordonnée ou abscisse de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OC, où C est la projection de M sur l'axe des abscisses.

On appelle **sinus** de l'angle α, noté $\sin(\alpha)$, la seconde coordonnée ou ordonnée de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OS, où S est la projection de M sur l'axe des ordonnées.

On note : $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$



Remarques

- Si le point S est au-dessus de O, le sinus est positif ; si S est au-dessous de O, le sinus est négatif.
- Si le point C est à droite de O, le cosinus est positif ; si C est à gauche de O, le cosinus est négatif.
- Des valeurs approximatives de $\sin(\alpha)$ et de $\cos(\alpha)$, pour tout angle α, peuvent être facilement obtenues au moyen d'une machine à calculer.

  Exemple : $\sin(35°) = 0,5735\ldots$; $\cos(3) = -0,9899\ldots$

Propriétés

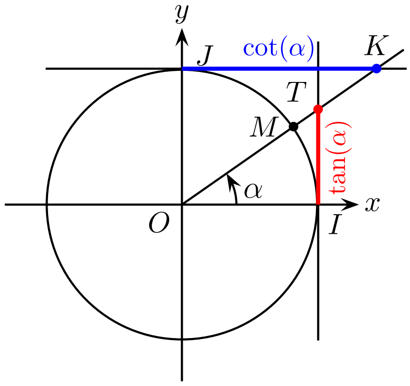
Il découle de la définition que :

$$\boxed{-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1}$$

Les fonctions tangente et cotangente

Définition 9.5
Soit $M(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ sur le cercle trigonométrique. On définit le point T comme l'intersection entre la droite passant par $(0; 0)$ et M et la droite verticale tangente au cercle au point $I(1; 0)$.

On définit encore le point K comme l'intersection entre la droite passant par $(0; 0)$ et M (la même que ci-dessus) et la droite horizontale tangente au cercle au point $J(0; 1)$.



On appelle **tangente** de l'angle α, noté $\tan(\alpha)$, l'ordonnée de T. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment IT.

On appelle **cotangente** de l'angle α, noté $\cot(\alpha)$, l'abscisse de C. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment JK.

On note : $T(1; \tan(\alpha))$ et $K(\cot(\alpha); 1))$.

Remarques

- Si T est au-dessus de I, la tangente est positive ; si T est au-dessous de I, la tangente est négative.
- Si K est à droite de J, la cotangente est positive ; si K est à gauche de J, la cotangente est négative.

Relations fondamentales entre les fonctions trigonométriques d'un même arc

Les trois relations suivantes permettent de déterminer le sinus, le cosinus, la tangente ou la cotangente d'un angle lorsqu'une seule de ces valeurs est connue. Elles sont très importantes. Il faut donc les connaître par cœur.

Proposition 9.1
Soit un angle α. On a l'égalité

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

et, si toutes les expressions sont bien définies (si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ pour la première et si $\alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ pour la seconde), les égalités

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

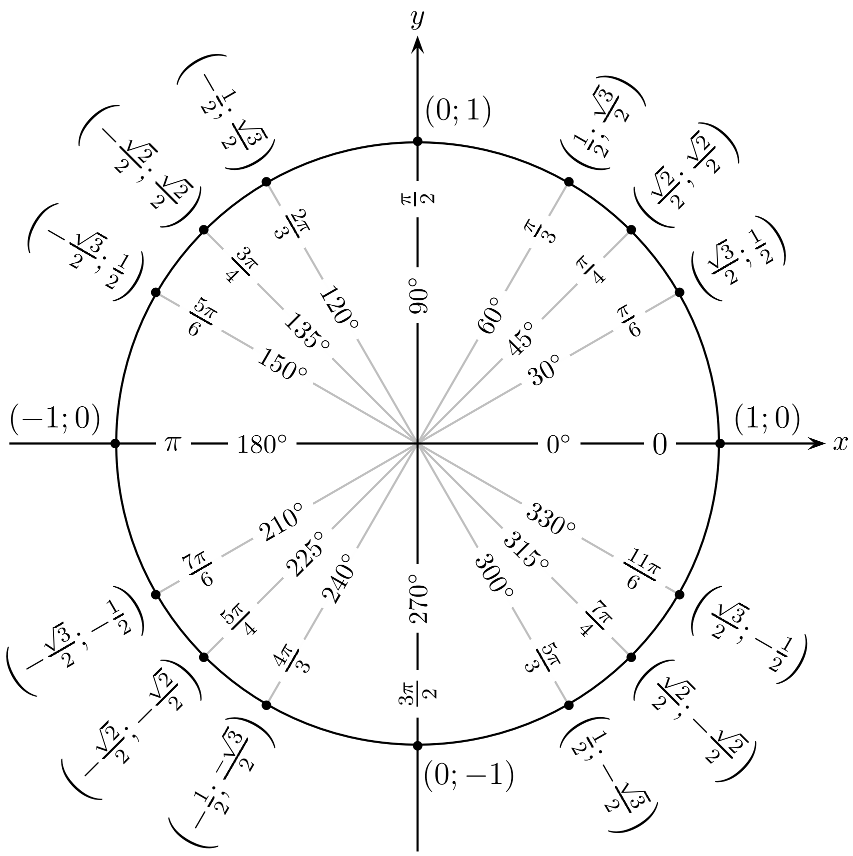
Ces égalités seront établies en exercices.

9.2.2 Valeurs exactes des fonctions trigonométriques

Il est bon de connaître par cœur les valeurs exactes des fonctions trigonométriques de quelques angles particuliers qu'on retrouve fréquemment.

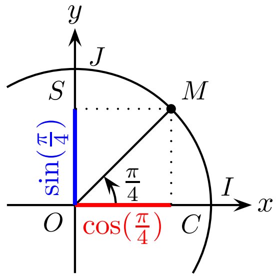
α (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
α (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$
$\cot(\alpha)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	0

Au lieu de représenter ces valeurs sous forme d'un tableau, on peut également utiliser le cercle trigonométrique.



Démonstration. Nous allons déterminer les valeurs du sinus et du cosinus pour les angles $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. Les valeurs de la tangente et de la cotangente s'obtiennent ensuite aisément en utilisant les relations : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$.

– $\underline{\alpha = \dfrac{\pi}{4} \quad (= 45°)}$



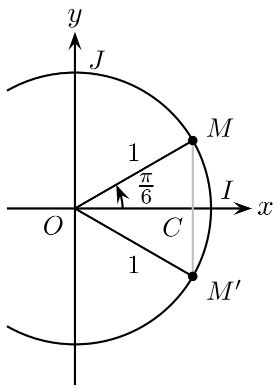
On sait que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. En effet le triangle OMC est isocèle ($\widehat{MOC} = \widehat{OMC} = \dfrac{\pi}{4}$, voir le dessin).

Donc $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a donc : $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

– $\underline{\alpha = \dfrac{\pi}{6} \quad (= 30°)}$



Dans le dessin ci-contre, on voit que comme l'angle $\widehat{COM}$ vaut $\dfrac{\pi}{6}$, l'angle $\widehat{OMC}$ vaut $\dfrac{\pi}{3}$, de même que l'angle $\widehat{OM'C}$ (par symétrie). Le triangle OMM' est donc équilatéral et la longueur de chacun de ses côtés vaut 1 (rayon du cercle).

On en déduit que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = CM = \dfrac{1}{2}$.
De plus, le théorème de Pythagore écrit dans le triangle OMC permet d'écrire $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{4}$. Ainsi $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On a finalement : $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

– $\underline{\alpha = \dfrac{\pi}{3} \quad (= 60°)}$

On peut montrer que $\cos(\alpha) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\sin(\alpha) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (voir le chapitre sur les fonctions trigonométriques en analyse) .

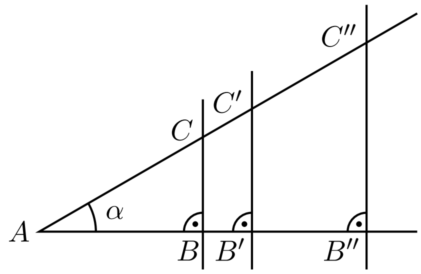
On a alors que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

□

9.3 Les triangles rectangles

Définition 9.6 (Rappel)
Un **triangle rectangle** est un triangle possédant un angle droit. Dans ce cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** et les côtés de l'angle droit les **cathètes**.

Une particularité intéressante des triangles rectangles est le fait que tous ces triangles qui ont un angle aigu α de même mesure sont semblables : leur côtés sont donc proportionnels. Le théorème de Thalès nous permet d'écrire pour les triangles ABC, $AB'C'$ et $AB''C''$ (angle aigu α commun) :



$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}.$$

Ce rapport ne dépend que de la mesure de α. On peut donc définir le rapport :

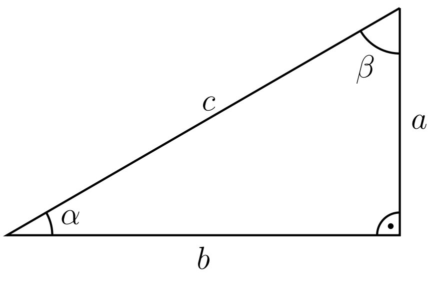
sinus défini par $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète opposée à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$

On utilise les notations définies par la figure ci-dessous.

On définit également les deux autres rapports :

cosinus défini par $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète adjacente à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$

tangente défini par $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur de la cathète opposée à } \alpha}{\text{longueur de la cathète adjacente à } \alpha} = \frac{a}{b}}$

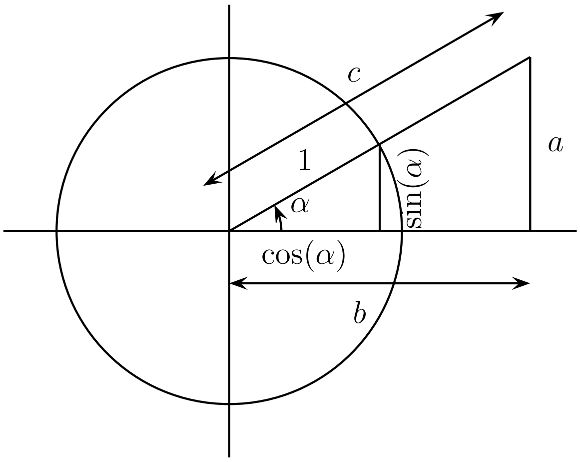


On peut, de la même manière, définir le sinus, le cosinus et la tangente pour le second angle aigu du triangle rectangle, l'angle β.

Proposition 9.2
Les rapports sinus, cosinus et tangente définis ci-dessus correspondent bien aux définitions des fonctions trigonométriques pour les angles aigus.

Démonstration. A chaque angle aigu α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, on peut associer un triangle rectangle de côtés de longueur 1 pour l'hypothénuse et $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ pour les deux cathètes.

Tout triangle rectangle avec un angle α de même mesure est semblable au triangle rectangle défini ci-dessus. On oriente ce triangle pour obtenir la figure représentée ci-dessous.



En utilisant le théorème de Thalès, on trouve :

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{a}{c}.$$

De plus, on a bien que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. □

9.3.1 Résolution de triangles rectangles

Définition 9.7
Résoudre un triangle consiste à calculer les éléments non donnés (côtés et angles)

On pourra s'aider de la machine pour le calcul des fonctions trigonométriques.

Exemple

Résoudre le triangle ABC rectangle en C dont on donne le côté $c = 4.25$ et l'angle $\beta = 67.2°$.

On obtient d'abord $\alpha = 90° - \beta = 22.8°$.
Comme $\cos(67.2°) = \frac{a}{4.25}$, *on obtient avec la machine :*

$$a = 4.25 \cdot \cos(67.2°) \cong 1.65$$

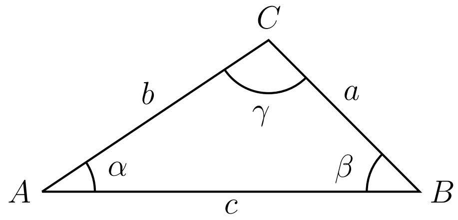
Comme $\sin(67.2°) = \frac{b}{4.25}$, *on obtient avec la machine :*

$$b = 4.25 \cdot \sin(67.2°) \cong 3.92$$

Pour résoudre un triangle rectangle (i.e. déterminer toutes ses caractéristiques), il faut connaître :
- la longueur d'au moins deux côtés de ce triangle, ou
- la longueur d'un côté de ce triangle et un angle.

9.4 Les triangles quelconques

Dans ce paragraphe, on considère un triangle quelconque ABC. On note ses sommets dans le sens positif par A, B et C. Les angles associés aux sommets seront notés α, β et γ et les côtés opposés aux sommets a, b et c.



Cette convention doit être respectée dans le but de pouvoir appliquer les théorèmes qui suivent.

Lorsqu'on a parlé des triangles rectangles, la connaissance de deux caractéristiques (angle ou longueur de côté) nous permettait de trouver toutes ses caractéristiques. Dans le cas d'un triangle quelconque, c'est au moins trois caractéristiques qu'il faut connaître pour pouvoir déterminer toutes les autres. Les théorèmes ci-dessous nous permettront de résoudre un triangle quelconque.

9.4.1 Théorème du sinus

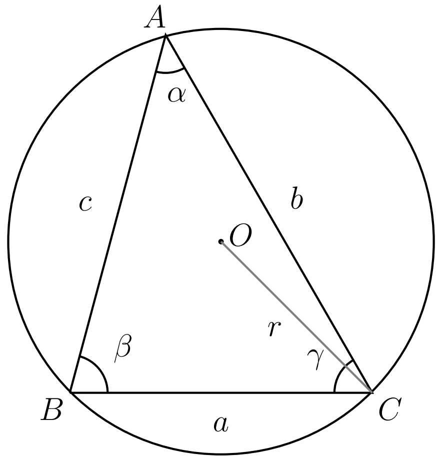
Théorème 9.3

Considérons un triangle quelconque ABC inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r.

On a les relations suivantes :

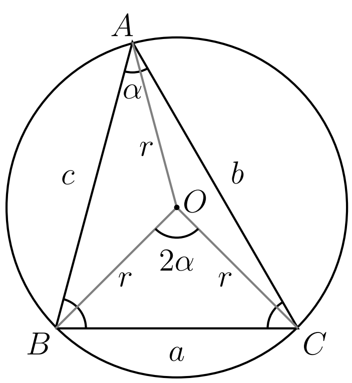
$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r}$$

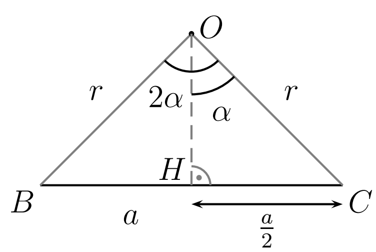
où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.



Autrement dit : dans un triangle quelconque, le rapport entre le côté opposé à un angle et le sinus de cet angle est égal au rapport entre le côté opposé à un autre angle et le sinus de cet autre angle. Ce rapport est aussi égal au double du rayon du cercle circonscrit.

Démonstration. Considérons un triangle quelconque ABC inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O.





Le triangle OBC est isocèle en O, car les côtés $[OB]$ et $[OC]$ sont d'égale longueur.

On en déduit que $[OH]$ est en même temps bissectrice de l'angle en O et hauteur issue de O.

Or l'angle en O vaut 2α ; et l'angle $\widehat{COH} = \alpha$. On a donc $\dfrac{CH}{OC} = \sin(\alpha)$.

Or $CH = \dfrac{a}{2}$ et $OC = r$. On peut donc réécrire l'égalité précédente sous la forme : $\sin(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$.

Finalement, en transformant cette égalité, on a :

$$2r = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

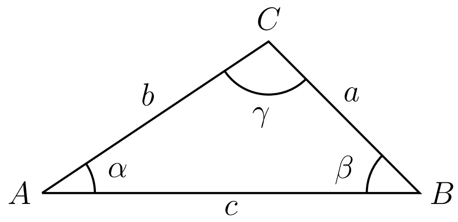
Pour achever la démonstration, il suffit de choisir les triangles OAC et OAB et appliquer le même raisonnement. □

9.4.2 Théorème du cosinus

Théorème 9.4
Considérons un triangle quelconque ABC.

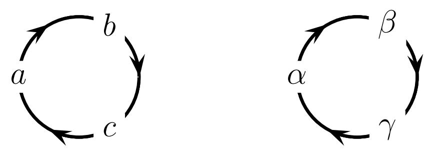
On a les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 & = & c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{array}}$$



Autrement dit : le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés moins deux fois le produit des longueurs des deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle entre eux.

Pour passer d'une relation à l'autre, on fait les permutations circulaires suivantes.



Cela nous permet de ne mémoriser qu'une seule relation.

Démonstration. Considérons un triangle quelconque ABC. Nous allons démontrer la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Pour cela, nous allons examiner la hauteur partant du sommet C. On doit distinguer trois cas suivant où se situe le pied de cet hauteur : entre A et B, à gauche de A ou à droite de B.

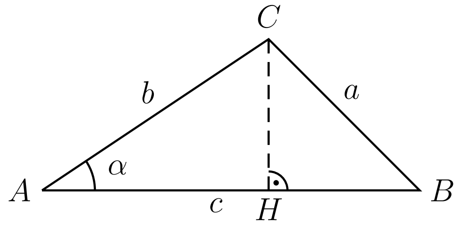
1. Premier cas : la hauteur "tombe" entre A et B : les trois angles du triangle sont aigus.

En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

– $\sin(\alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\alpha)$

– $\cos(\alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\alpha)$

De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = c - AH = c - b\cos(\alpha)$.



Pour obtenir a^2, on peut maintenant utiliser le théorème de Pythagore sur le triangle CHB :

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & CH^2 + HB^2 \\ & = & b^2\sin^2(\alpha) + (c - b\cos(\alpha))^2 \\ & = & b^2\sin^2(\alpha) + c^2 + b^2\cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\ & = & b^2\underbrace{(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))}_{1} + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{array}$$

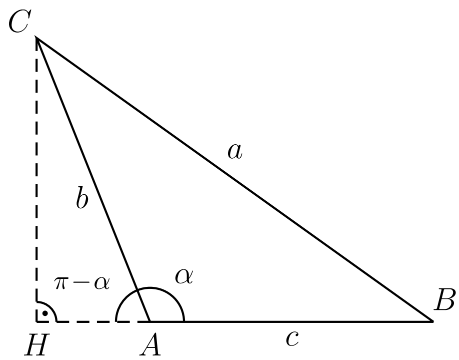
2. Deuxième cas : la hauteur "tombe" à gauche de A : l'angle α est obtus.

En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

– $\sin(\pi - \alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\pi-\alpha) = b\sin(\alpha)$

– $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\pi-\alpha) = -b\cos(\alpha)$

De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = c + AH = c - b\cos(\alpha)$.



Comme pour le cas 1, on utilise le théorème de Pythagore sur le triangle CHB pour obtenir a^2. On peut reprendre ici la démonstration du cas 1, puisque HB à la même forme qu'en 1.

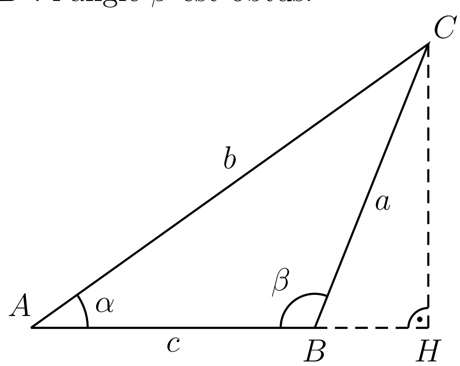
3. Troisième cas : la hauteur "tombe" à droite de B : l'angle β est obtus.

En appliquant des résultats de trigonométrie sur le triangle ACH, on obtient :

– $\sin(\alpha) = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b\sin(\alpha)$

– $\cos(\alpha) = \dfrac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cos(\alpha)$

De plus, le segment $[HB]$ a pour longueur $HB = AH - c = b\cos(\alpha) - c$.



Comme pour le cas 1, on utilise le théorème de Pythagore sur le triangle CHB pour obtenir a^2. On peut reprendre ici la démonstration du cas 1, puisque HB pour 3 est l'opposé de HB pour 1 et que l'on considère le carré de HB dans le développement.

On peut, de la même manière, montrer les relations pour b^2 et c^2. □

9.4.3 Résolution de triangles quelconques

A partir de ces deux théorèmes, les informations minimales que l'on doit connaître pour résoudre un triangle quelconque (i.e. déterminer toutes ses caractéristiques) sont :
– la longueur des trois côtés de ce triangle, ou
– la longueur de deux côtés de ce triangle et un angle, ou
– la longueur d'un côté de ce triangle et deux angles.

Exemple

Résoudre le triangle ABC dont on donne le côté $a = 70.24$*, le côté* $b = 82.12$ *et l'angle* $\gamma = 30.69°$*.*

Par le théorème du cosinus, on obtient que le carré du côté c vaut

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma) = (70.24)^2+(82.12)^2-2\cdot 70.24\cdot 82.12\cos(30.69°) \cong 1756.88$$

Et donc que $c \cong 41.92$

Avec cette information, on peut utiliser le théorème du sinus pour déterminer α*. On sait que* $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$*. On en déduit que*

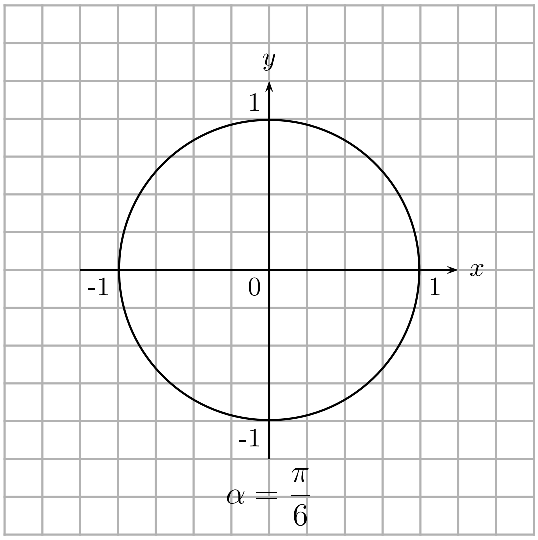
$$\sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c} = \frac{70.24\cdot\sin(30.69°)}{41.92} \cong 0.8552$$

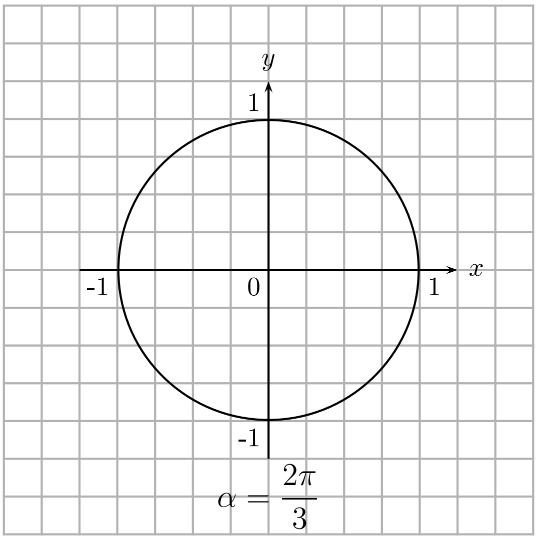
A l'aide de la machine à calculer, on détermine l'angle α *qui a pour sinus* 0.8552 *:* $\alpha \cong 58.79°$*.*

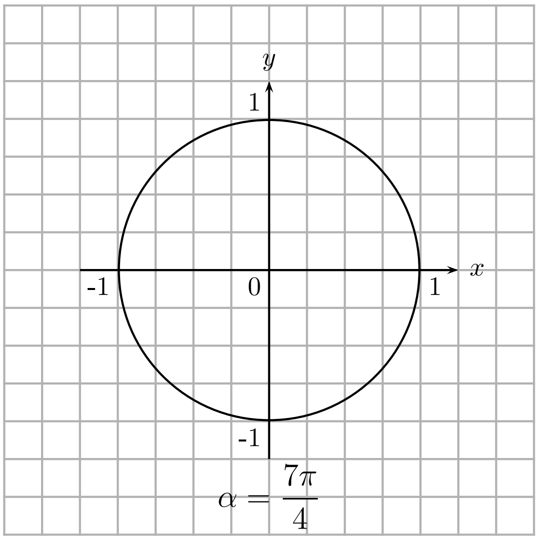
Finalement, on trouve que $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 90.52°$*.*

9.5 Exercices

1) Sur les trois cercles trigonométriques ci-dessous, représenter graphiquement le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles indiqués sous le cercle ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{4}$). Pour chaque dessin, évaluer ensuite les valeurs de ces quatre mesures et les contrôler à l'aide d'une machine à calculer.
(Pour dessiner les angles, les convertir au préalable en degrés)







2) En utilisant une machine à calculer, trouver les valeurs de :

a) $\sin(128°)$	b) $\cos(315°)$	c) $\tan(123°)$
d) $\sin(2)$	e) $\cos(0.7)$	f) $\tan(4)$

3) En utilisant le cercle trigonométrique et des théorèmes de géométrie élémentaire, prouver les relations suivantes :

a) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

b) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c) $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

4) Construire les angles aigus ayant

   a) 0.43 pour sinus b) $\frac{2}{3}$ pour cosinus,

   puis les mesurer.

5) Est-il possible de construire un angle α tel que

   a) $\sin(\alpha) = 1.4$ b) $\cos(\alpha) = 1.2$ c) $\tan(\alpha) = 2.5$

6) Utiliser les relations fondamentales entre $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ (voir exercice 3) pour résoudre (sans machine) les questions suivantes.

   a) Si α est un angle du deuxième quadrant tel que $\sin(\alpha) = 0.8$ que vaut $\cos(\alpha)$?

   b) Le cosinus d'un angle du quatrième quadrant vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Que vaut son sinus ?

   c) Trouver $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sachant que α est un angle du deuxième quadrant et que $\tan(\alpha) = -\sqrt{8}$.

   d) Trouver $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sachant que α est un angle du quatrième quadrant et que $\tan(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$.

   e) Montrer que : $1 + \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

7) Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

   a) $\dfrac{1 - \cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)}$ b) $\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$

   c) $\dfrac{\sin^2(\alpha) - \sin^4(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \cos^4(\alpha)}$ d) $\tan(\alpha)\cos(\alpha)$

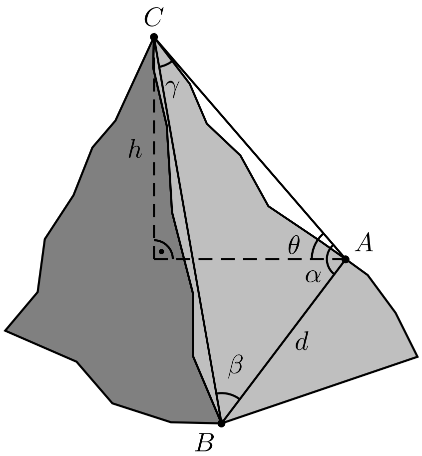
   e) $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\tan^2(\alpha)$ f) $\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\tan(\alpha)$

8) Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ? (Rayon de la Terre : 6370 km)

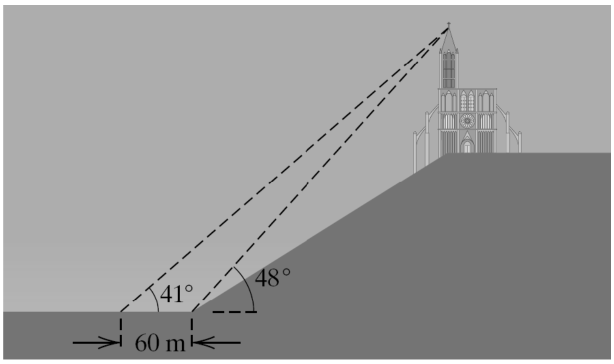
9) Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55°W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70°E à 28.5 km/h.
   Calculer la distance séparant les bateaux à 15h00.

10) Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux point A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet. A et B ne sont pas forcément à la même altitude mais ils sont séparés d'une distance d. On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A (angle entre AC et l'horizontale).
    Quelle est l'altitude de C si celle de A est h_A ?

    Application numérique :
    $d = 450$ m, $h_A = 920$ m, $\alpha = 35.4°$, $\beta = 105.8°$, $\theta = 23.5°$.



11) Une cathédrale est située au sommet d'une colline (voir schéma ci-dessous). En observant le sommet de sa flèche depuis le pied de la colline, l'angle d'élévation est de 48°. Si on l'observe à 60 m de la base de la colline, l'angle d'élévation de la flèche est de 41°. La pente de la colline forme un angle de 32°. Calculer la hauteur de la cathédrale.

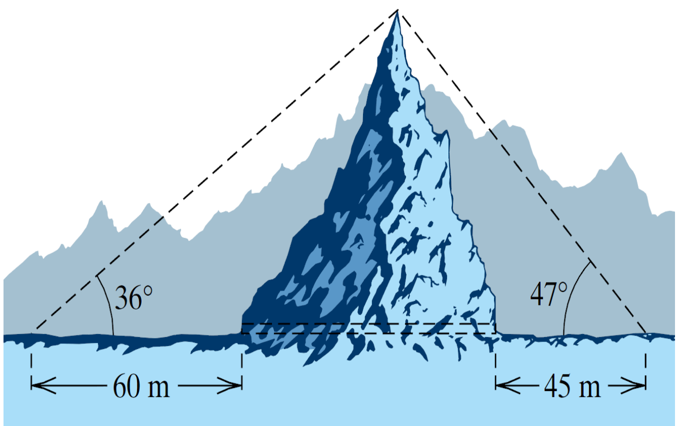


12) Un triangle ABC est donné par $b = 35,2$, $c = 26,2$ et $\alpha = 123,2°$.

Calculer la longueur du segment $[AP]$, où P est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et le côté $[BC]$.

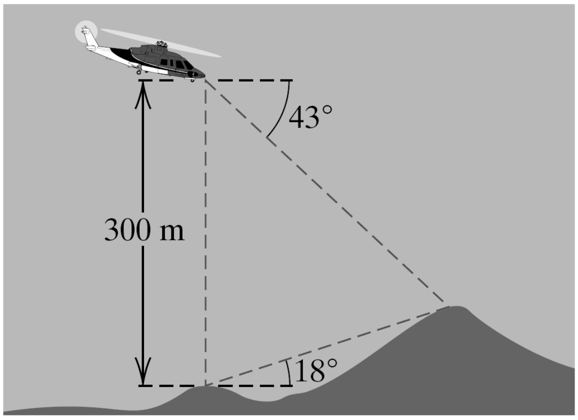
13) On doit percer un tunnel pour une nouvelle autoroute à travers une montagne de 80 m de haut. A une distance de 60 m de la base de la montagne, l'angle d'élévation est de 36° (voir figure). Sur l'autre face, l'angle d'élévation à une distance de 45 m est de 47°.

Calculer la longueur du tunnel au mètre près.



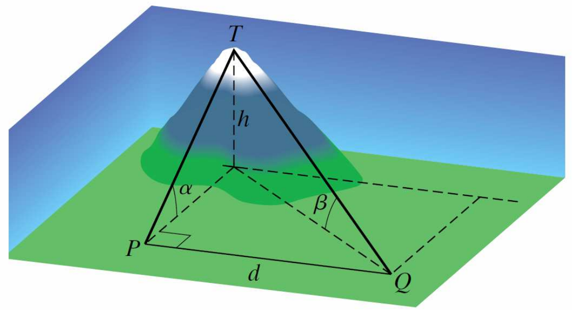
14) Un hélicoptère est en vol stationnaire à 300 m au-dessus du sommet d'une montagne qui culmine à 1560 m, comme le montre la figure. Du sommet de cette montagne ou de l'hélicoptère, on peut voir un deuxième pic, plus élevé. Vu de l'hélicoptère, son angle de dépression est de 43° et vu du petit sommet, son angle d'élévation est de 18°.

    Calculer l'altitude du sommet le plus élevé et la distance séparant l'hélicoptère de ce sommet.



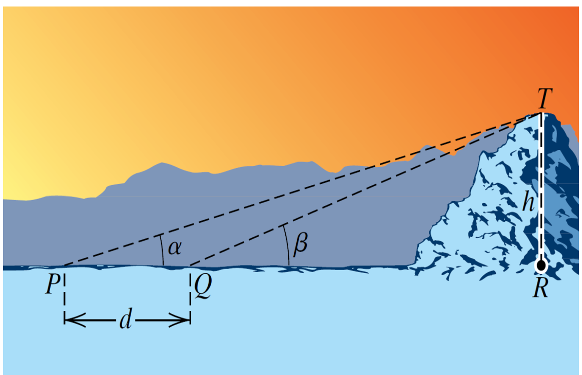
15) En observant le sommet d'une montagne à partir d'un point P au sud de la montagne, l'angle d'élévation est α (voir figure). L'observation à partir d'un point Q, situé à d km à l'est de P, donne un angle d'élévation β.

    Déterminer la hauteur h de la montagne si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$ et $d = 16$ km.



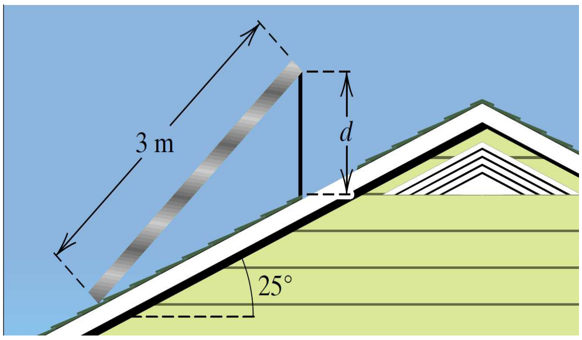
16) Si on observe le sommet d'une montagne à partir du point P représenté dans la figure, l'angle d'élévation est de $\alpha = 15°$. A partir du point Q, plus proche de la montagne de $d = 3$ km, l'angle d'élévation est de $\beta = 20°$.

    Calculer la hauteur de la montagne.



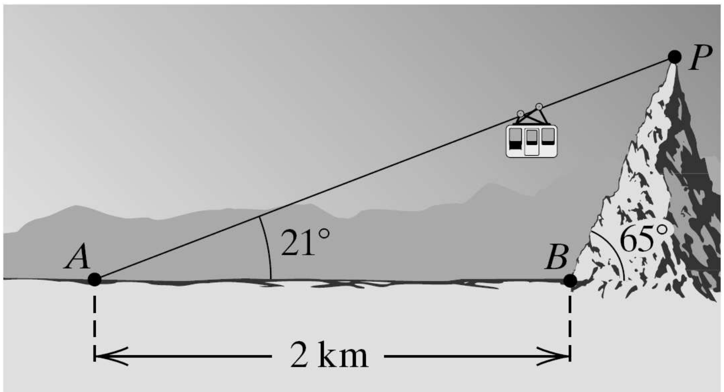
17) La figure ci-dessous représente un panneau solaire de 3 m de large qui doit être fixé sur un toit qui forme un angle de 25° avec l'horizontale.

Calculer la longueur d du support afin que le panneau fasse un angle de 45° avec l'horizontale.

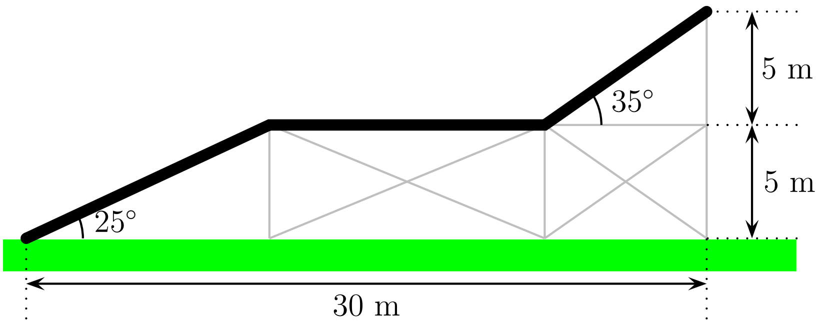


18) La figure ci-dessous représente un téléphérique transportant des passagers d'un point A, qui se trouve à 2 km du point B situé au pied de la montagne, à un point P au sommet de la montagne. Les angles d'élévation de P aux points A et B sont respectivement de 21° et 65°.

Calculer la hauteur de la montagne (par rapport au point B).



19) La figure ci-dessous représente une partie d'un plan de toboggan d'une piscine. Trouver la longueur totale du toboggan.



20) Un géomètre, situé à une altitude de 912 m, observe une antenne de communication située sur une colline en face de lui. Il mesure, au moyen d'un théodolite, les angles

d'élévation du sommet et du pied de l'antenne et détermine comme valeurs pour ces angles : respectivement 17.15° et 14.03°.

Si la hauteur de l'antenne est de 35 m, à quelle altitude se trouve le pied de cette dernière ?

21) Un ingénieur se promène sur le Champ-de-Mars en direction de la tour Eiffel, qui culmine à une hauteur de 324 mètres. Il remarque alors que l'angle d'élévation sous lequel il voit le sommet de la tour est de 32.8°. 5 minutes plus tard, il constate que cet angle est passé à 52°.

A quelle vitesse l'ingénieur s'est-il déplacé entre ses deux observations du sommet de la tour Eiffel ? *La réponse doit être donnée en km/h.*

(On suppose que le sommet de la tour et les points où sont effectués les observation sont dans le même plan vertical. On suppose également que la vitesse, à laquelle l'ingénieur se déplace, est constante.)

9.6 Solutions des exercices

2) a) $0,788$ b) $0,707$ c) $-1,539$
d) $0,909$ e) $0,765$ f) $1,158$

6) a) $\cos(\alpha) = -0,6$ b) $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$
c) $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$; $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{8}}{3}$ d) $\cos(\alpha) = \frac{5}{6}$; $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

7) a) $\frac{1}{\sin(\alpha)}$ b) $\sin(\alpha)$ c) 1
d) $\sin(\alpha)$ e) 1 f) $\frac{1}{\cos(\alpha)}$

8) 1183 km

9) $106,5$ km

10) 1196 m

11) 105 m

12) $14,28$

13) 80 m

14) $1637,5$ m et $326,21$ m

15) $7,50$ km

16) $3,05$ km

17) $1,13$ m

18) 935 m

19) $32,69$ m

20) 1061 m

21) environ 3 km/h

Troisième partie

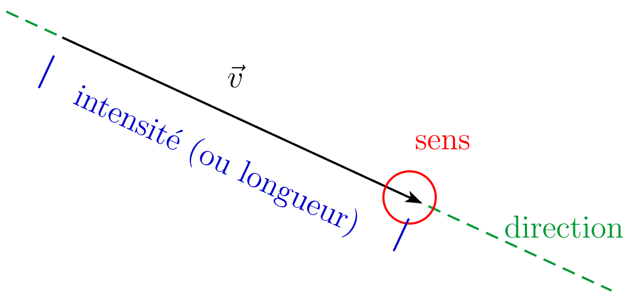
Géométrie vectorielle et analytique plane

Chapitre 10

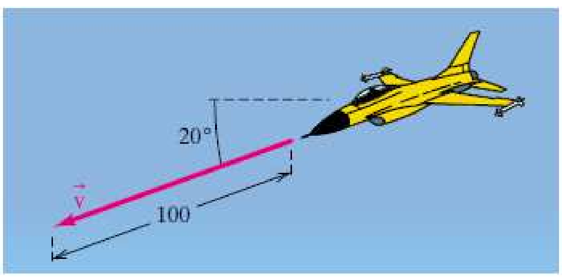
Vecteurs dans le plan

10.1 Introduction

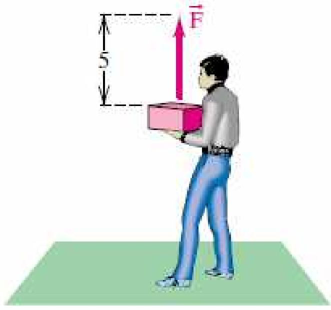
Des quantités comme l'aire, le volume, la longueur, la température et le temps n'ont qu'une intensité et peuvent être entièrement représentées par un nombre réel (accompagnées de l'unité de mesure adéquate, comme cm^2, m^3, cm, $^\circ$ ou s). Une grandeur de ce type est une **grandeur scalaire** et le nombre réel correspondant est un **scalaire**. Des concepts tels que la vitesse ou la force ont à la fois *une intensité, un sens et une direction* et sont souvent représentés par un **segment de droite orienté** (ou, "plus simplement", une flèche). On nomme aussi ce segment de droite orienté un **vecteur**. On donne ci-dessous la représentation d'un vecteur $\vec{v}$ (on désignera un vecteur par une lettre ou un groupe de lettres surmonté d'une flèche).



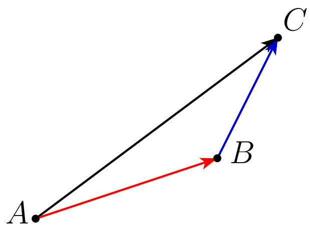
On peut représenter beaucoup de concepts physiques par des vecteurs. A titre d'exemple, on considère un avion qui descend à une vitesse constante de 100 km/h et dont la ligne de vol rectiligne forme un angle de 20° avec l'horizontale. Ces deux faits sont représentés à la figure ci-dessous par le vecteur $\vec{v}$ d'intensité 100. Le vecteur $\vec{v}$ est un **vecteur vitesse**.



Un vecteur qui représente une action sur un objet par une cause quelconque est un **vecteur force**. La figure ci-dessous illustre la force exercée par une personne qui tient une masse de 5 kg ; cette force est représentée par le vecteur $\vec{F}$ d'intensité environ 5. Cette force a la même intensité que la force exercée par l'attraction terrestre sur cette masse, mais elle est de sens opposé. Le résultat est qu'il n'y a mouvement ni vers le haut, ni vers le bas.



On utilise parfois la notation $\overrightarrow{AB}$ pour représenter le chemin de A vers B parcouru par un point (ou une particule) le long d'un segment de droite. On se réfère alors à $\overrightarrow{AB}$ comme étant la **trajectoire** de ce point (ou de cette particule). Dans la représentation ci-dessous, une trajectoire $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une trajectoire $\overrightarrow{BC}$ amène au même point qu'une trajectoire $\overrightarrow{AC}$. On verra par la suite que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ correspond à la **somme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$. On écrira : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



A l'origine, en mathématiques, un vecteur est un objet de la géométrie euclidienne. A deux points, Euclide associe leur distance. Or, un couple de points porte une charge d'information plus grande : ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise ces informations.

La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.

Dans la suite de ce cours, nous allons définir précisément la notion de vecteur dans le plan et étudier les opérations (somme et produit) que l'on peut associer à cette notion.

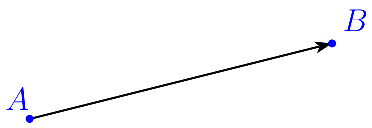
10.2 Définitions

On note π l'ensemble des points du plan.

Définition 10.1
On appelle **bipoint** du plan tout couple de points du plan.

$(A; B)$ est un bipoint d'**origine** A et d'**extrémité** B.

On représente un bipoint $(A; B)$ par une flèche joignant A à B. On appelle souvent **flèche** $(A; B)$ le bipoint $(A; B)$.



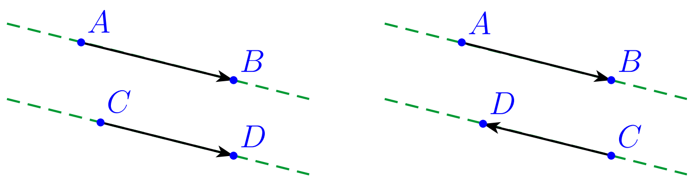
Remarque

Si A et B sont deux points distincts, les bipoints $(A; B)$ et $(B; A)$ sont distincts.

Définition 10.2
Si A et B sont deux points distincts, la droite (AB) est appelée support du bipoint $(A; B)$.

Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ ont la **même direction** si leurs supports sont parallèles ou confondus.

Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ de même direction peuvent être de **même sens** (figure de gauche) ou de **sens contraire** (figure de droite).



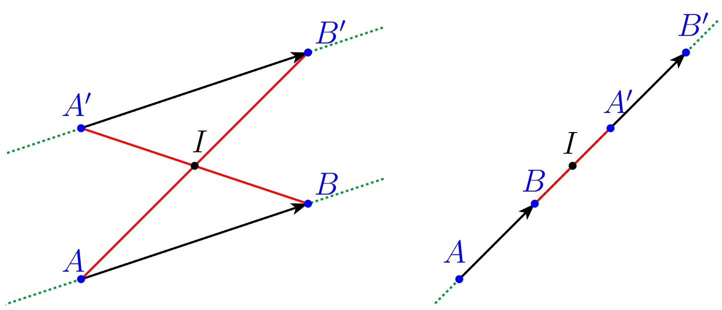
La **longueur** d'un bipoint $(A; B)$ est la distance $\delta(A; B)$ (distance qui sépare A et B).

Remarque

Si A et B sont deux points distincts, les bipoints $(A; B)$ et $(B; A)$ sont de même direction, de même longueur et de sens contraire.

Définition 10.3
Deux bipoints $(A; B)$ et $(A'; B')$ sont **équipollents** si les segments $[AB']$ et $[A'B]$ ont le même milieu.

Dans ce cas, on note : $(A; B) \sim (A'; B')$



De manière équivalente, deux bipoints sont équipollents s'ils sont de :
– même direction,
– même sens,
– même longueur.

Propriété

Dans l'ensemble des bipoints du plan (noté $\pi \times \pi$), la relation "est équipollent à" est réflexive, symétrique et transitive.

La relation d'équipollence de bipoints est donc une relation d'**équivalence**.

Par conséquent, cette relation induit dans l'ensemble des bipoints une partition en classes d'équivalence. Chacune de ces classes regroupe l'ensemble des bipoints qui sont équipollents.

Définition 10.4
Soit $(A;B)$ un bipoint du plan. L'ensemble des bipoints $(M;N)$ équipollents au bipoint $(A;B)$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A;B)$, appelée **vecteur** et notée $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{(M;N) \mid (M;N) \sim (A;B)\}$$

Le bipoint $(A;B)$, ou tout autre bipoint $(M;N)$ de la classe d'équivalence du bipoint $(A;B)$, est un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En d'autres termes, le bipoint $(A;B)$ définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$(A;B) \sim (C;D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

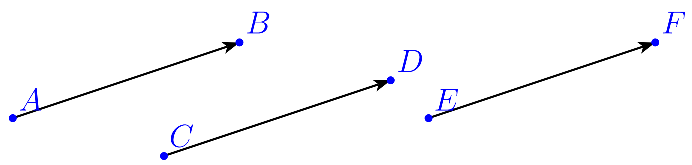
Un vecteur, sans référence à un représentant, se note $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

L'ensemble des vecteurs du plan est appelé **plan vectoriel** et se note $\mathbf{V}_2$.

Remarques

1. On représente un vecteur $\vec{u}$ en dessinant l'une quelconque des flèches $(A;B)$ telle que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

   Les trois bipoints de la figure ci-dessous représentent *le même vecteur*, car les trois bipoints (ou flèches) ont la même direction, le même sens et la même longueur. Ainsi, un vecteur n'est pas déterminé par sa position et peut être représenté par un bipoint *choisi* dans le plan (de direction, sens et longueur adéquate).

2. Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point P quelconque du plan π, il existe un unique point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

Définition 10.5
L'ensemble des bipoints dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$:

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

On appelle **opposé** du vecteur $\vec{u}$ de représentant $(A;B)$ le vecteur $-\vec{u}$ de représentant $(B;A)$:

$$\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$$

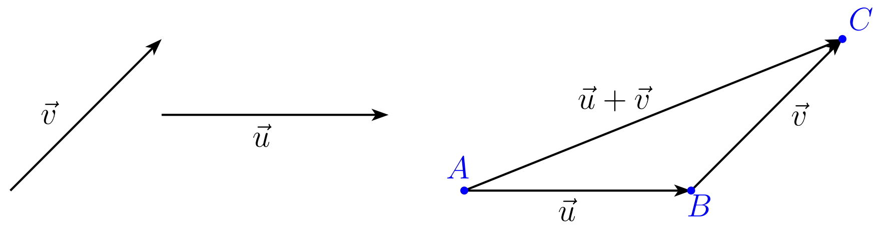
10.3 Opérations sur les vecteurs du plan

10.3.1 Addition de vecteurs

Définition 10.6
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel $\mathbf{V}_2$. A partir du point A quelconque du plan π, on construit les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Le bipoint $(A; C)$ définit un vecteur appelé **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note :

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$



L'application

$$\begin{array}{rccl} s: & \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_2 & \to & \mathbf{V}_2 \\ & (\vec{u}; \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

est une loi de composition interne dans $\mathbf{V}_2$, appelée **addition vectorielle**.

Remarque

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée **relation de Chasles**.

Propriétés de l'addition

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbf{V}_2$.

1) L'addition est **commutative** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) L'addition est **associative** : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) $\vec{0}$ est l'**élément neutre** : $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4) $-\vec{u}$ est l'élément **opposé** à $\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Remarque

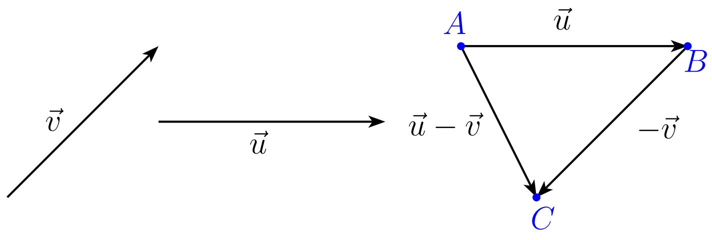
Il résulte des quatre propriétés ci-dessus que $(\mathbf{V}_2; +)$ est un groupe commutatif.

Soustraction de vecteurs

Définition 10.7
On appelle **soustraction** l'application qui associe aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} - \vec{v}$, qui est défini par :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est appelé **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Proposition 10.1
Soient A, B et O trois points du plan π. On a l'égalité suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$

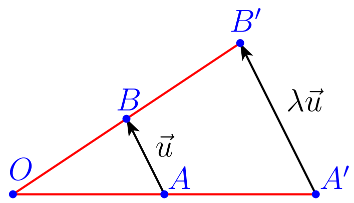
Démonstration. Soient A, B et O trois points du plan π. Par la relation de Chasles, la commutativité de l'addition, la définition de l'opposé d'un vecteur et la définition de la différence, la suite d'égalité suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AB} \overset{Chas.}{=} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \overset{com.}{=} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} \overset{op.}{=} \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) \overset{diff.}{=} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

□

10.3.2 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 10.8
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\mathbf{V}_2$ et λ un nombre réel. A partir d'un point A quelconque du plan π, on construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis les images A' et B' des points A et B par une homothétie de centre O quelconque et de rapport λ. Le bipoint $(A'; B')$ définit un vecteur appelé **produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel** λ. On le note $\lambda \cdot \vec{u}$.



L'application

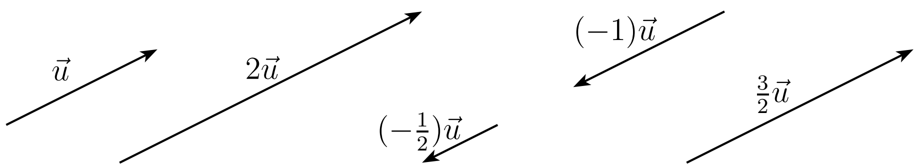
$$\begin{array}{rccl} m: & \mathbb{R} \times \mathbf{V}_2 & \to & \mathbf{V}_2 \\ & (\lambda; \vec{v}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

est une loi de composition externe, appelée **multiplication d'un vecteur par un réel**.

Proposition 10.2
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\lambda \neq O$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\lambda \cdot \vec{u}$ ont la même direction. Ils sont de même sens si $\lambda > 0$ et de sens contraire si $\lambda < 0$. La longueur de $\lambda \cdot \vec{u}$ est égale à $|\lambda|$ fois celle de $\vec{u}$.

Exemple

On donne ci-dessous quelques multiples d'un vecteur $\vec{u}$.



Propriétés de la multiplication

Soient les nombres réels λ et μ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
2) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
3) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
4) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$

Conséquences

Les propriétés données ci-dessous découlent directement des propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Soient un nombre réel λ et un vecteur $\vec{u}$. On a :

1) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
2) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
3) $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

10.4 Combinaison linéaire et colinéarité

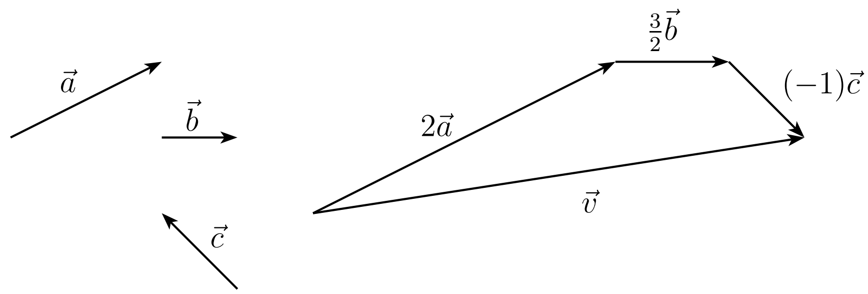
Dans ce qui suit, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …sont des vecteurs du plan vectoriel $\mathbf{V}_2$ et λ, β, γ, …des nombres réels.

Définition 10.9
On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …, $\vec{m}$, de coefficients respectifs α, β, γ, …, μ, le vecteur

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m}$$

Exemple

On donne ci-dessous un représentation du vecteur $\vec{v} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + (-1)\vec{c}$, combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.



Définition 10.10
Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …, $\vec{m}$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des nombres α, β, γ, …, μ non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0}$$

Ceci signifie que l'un des vecteurs au moins peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{m}$, sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} + \ldots + \mu \cdot \vec{m} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \ldots = \mu = 0$$

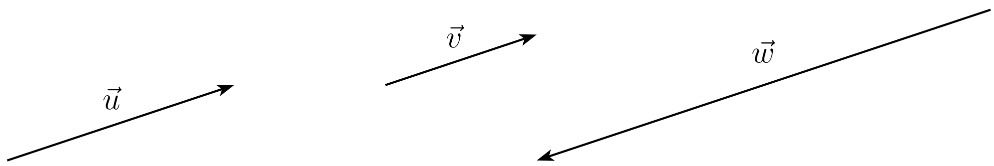
Ceci signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 10.11
Deux vecteurs $\vec{u}$ ($\neq \vec{0}$) et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Exemple

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnés ci-dessous sont colinéaires au vecteur $\vec{u}$ car $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u}$ (ici $\lambda = \frac{2}{3}$) et $\vec{w} = -2\vec{u}$ (ici $\lambda = -2$).



Remarques

1. Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
2. Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

10.5 Espace vectoriel

Définition 10.12
Un **espace vectoriel réel** est un triplet $(E; +; \cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une opération interne dans E, appelée addition et notée $+$, et d'une loi de composition externe, appelée multiplication par un réel et notée $\cdot$, satisfaisant aux quatre propriétés de l'addition et aux quatre propriétés de la multiplication par un nombre réel décrites dans les paragraphes précédents (en remplaçant les vecteurs de $\mathbf{V}_2$ par les éléments de E).

Proposition 10.3
$(\mathbf{V}_2; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Il existe beaucoup d'autres espaces vectoriels, comme par exemple l'ensemble des polynômes de degré 2 muni de l'addition usuelle des polynômes et de la multiplication usuelle d'un polynôme par un nombre réel. Nous étudierons quelques-uns de ces espaces vectoriels notamment dans le cours "Algèbre linéaire".

Cette structure d'espace vectoriel possède quelques caractéristiques intéressantes qui permettent de travailler efficacement, comme la notion de base et l'écriture des éléments de l'espace vectoriel comme combinaisons linéaires des éléments de la base.

Définition 10.13
On appelle **base** d'un espace vectoriel réel V tout sous-ensemble $\mathcal{B}$ de V tel que **chaque élément** v de V peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés **composantes scalaires** de l'élément v dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque

Pour un espace vectoriel donné, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel V est appelé **dimension** de V.

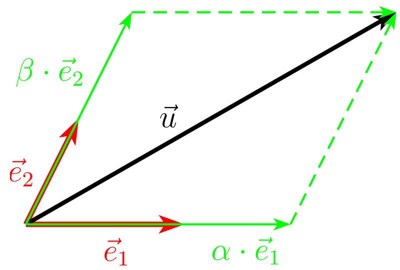
Proposition 10.4
Une **base** de $\mathbf{V}_2$ est constituée d'un couple de vecteurs linéairement indépendants ou, de manière équivalente, d'un couple de vecteurs non colinéaires. $\mathbf{V}_2$ est donc un espace vectoriel réel de dimension 2.

Une base de $\mathbf{V}_2$ se note généralement $(\vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Propriétés

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbf{V}_2$, alors tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbf{V}_2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire *unique* de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Il existe un couple $(\alpha; \beta)$ de nombres réels, et un seul, tel que

$$\boxed{\vec{u} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2}$$



α et β sont les composantes scalaires de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note alors

$$\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

Opérations sur les composantes

Soient une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbf{V}_2$, un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires relativement à la base $\mathcal{B}$. On a :

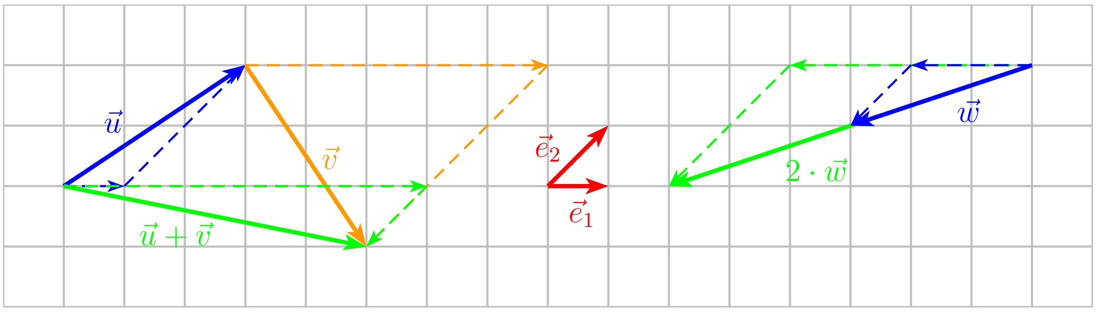
$$\boxed{\begin{array}{rcccl} \vec{u} + \vec{v} & = & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ \lambda \cdot \vec{u} & = & \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Exemple

On donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *de* $\mathbf{V}_2$. *On peut réaliser les opérations suivantes sur ces vecteurs.*

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \vec{w} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette situation est représentée ci-dessous.



Test du déterminant

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbf{V}_2$, soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ donnés par leurs composantes scalaires.

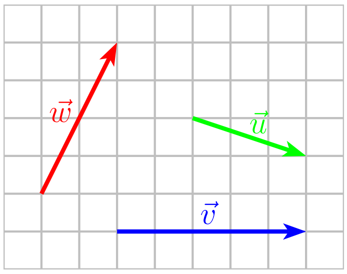
$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement indépendants} \iff Det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0}$$

Remarque

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbf{V}_3$, $Det(\vec{a}, \vec{b})$, est égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

10.6 Exercices

1) Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessous pour dessiner, sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants :



a) $\vec{v}+\vec{w}$ b) $\vec{u}+\vec{v}$ c) $3\cdot\vec{v}$ d) $(-4)\cdot\vec{w}$

e) $\vec{v}-\vec{w}$ f) $\vec{u}-\vec{v}$ g) $3(\vec{v}+\vec{u})-\vec{w}$ h) $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

i) $3\vec{u}-\dfrac{1}{2}\vec{v}$ j) $\dfrac{7}{3}\vec{u}-\dfrac{3}{4}\vec{w}$ k) $-2\vec{u}+3\vec{v}-\dfrac{3}{2}\vec{w}$ l) $\dfrac{3}{7}\vec{u}-\dfrac{4}{5}\vec{u}$

2) On donne trois points A, B et C non alignés.

Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

c) $\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ d) $\vec{d}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$

e) $\vec{e}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}$

3) Soient cinq points quelconques A, B, C, D et E. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

a) $\vec{a}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ b) $\vec{b}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AE}$

c) $\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$ d) $\vec{d}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$

e) $\vec{e}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$ f) $\vec{f}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$

4) On donne trois points A, B et C non alignés.

Construire les points D, E, F et G tels que :

a) $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

c) $3\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{FC}$ d) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CG}-3\overrightarrow{GA}$

5) On donne trois points A, B et C non alignés.

Soit le point G défini par la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

a) Construire le point G.

b) Démontrer que pour tout point O : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

6) On donne trois points A, B et C non alignés.

Construire les ensembles de points suivants :

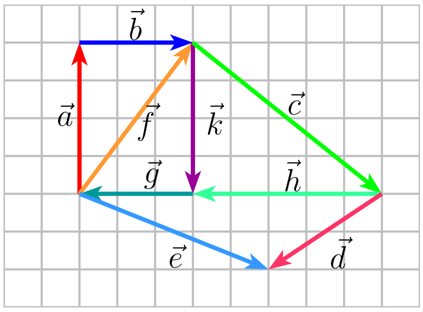
a) $E=\{M\mid \overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}, k\in\mathbb{R}\}$

b) $F = \{M \mid \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} + k \cdot \overrightarrow{AC}, k \in [-2; 3[\}$

c) $G = \{M \mid 2\overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{CA}, k \in \mathbb{R}_+, m \in \{-1; 4\}\}$

d) $H = \{M \mid \overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{BC} + k \cdot \overrightarrow{CA} - t \cdot \overrightarrow{BA}, k \in [-2; 1], t \in [-1; 4]\}$

7) Utiliser les vecteurs de la figure ci-dessous pour répondre aux questions.



a) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{b} = \vec{f}$?

b) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} + \vec{d} = \vec{e}$?

c) Exprimer $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.

d) Exprimer $\vec{g}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{k}$.

e) Exprimer $\vec{e}$ comme combinaison linéaire de $\vec{d}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$.

f) Exprimer $\vec{e}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

g) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{k} + \vec{g}$?

h) Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{h}$?

8) Montrer que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication habituelles est un espace vectoriel réel.

9) Montrer que l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 2 muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles est un espace vectoriel réel.

10) Montrer que l'ensemble des fonctions muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituelles est un espace vectoriel réel.

11) On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ d'un espace vectoriel V et un nombre réel λ. Montrer que :

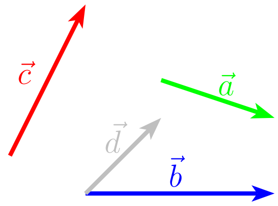
a) Si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.

b) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

c) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

d) $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

12) Dans le plan, on donne quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.



a) Est-il possible d'exprimer $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$?

b) Est-il possible d'exprimer $\vec{c}$, $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

c) Est-il possible d'exprimer $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$?

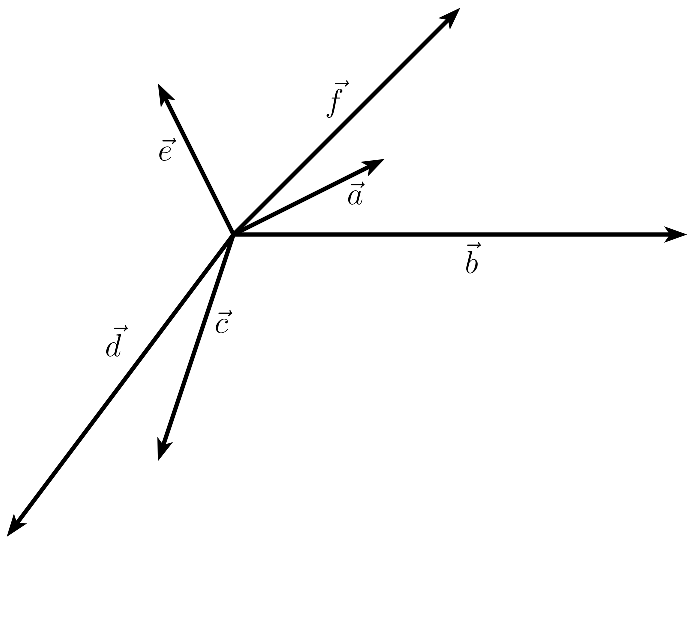
d) Donner les conditions permettant d'exprimer tous les vecteurs du plan comme combinaison linéaire d'un ensemble de vecteurs du plan.

e) À quelle(s) condition(s) la combinaison linéaire est-elle unique ? Comme appelle-t-on dans ce cas l'ensemble de vecteurs permettant d'exprimer tous les vecteurs du plan sous forme d'une combinaison linéaire unique ?

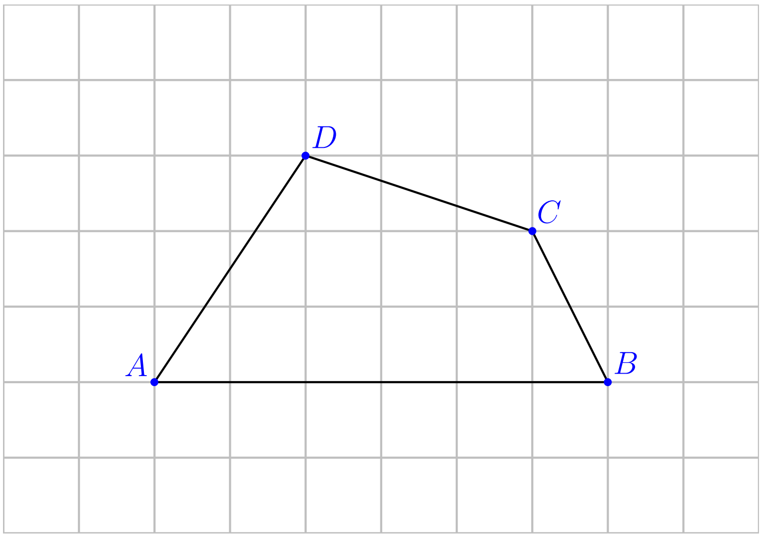
13) Dans le plan, on donne six vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$.

Dans la base $(\vec{a}, \vec{c})$, déterminer, par constructions et mesures, les composantes scalaires (valeurs approchées) des vecteurs suivants :

a) $\vec{a}$	b) $\vec{b}$	c) $\vec{c}$	d) $\vec{d}$
e) $\vec{e}$	f) $\vec{f}$	g) $\vec{b}+\vec{e}$	h) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$



14) Soit le quadrilatère $ABCD$ suivant.



Par constructions et mesures, déterminer une valeur approximative des composantes des vecteurs

a) $\overrightarrow{CA}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$

b) $\overrightarrow{BD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

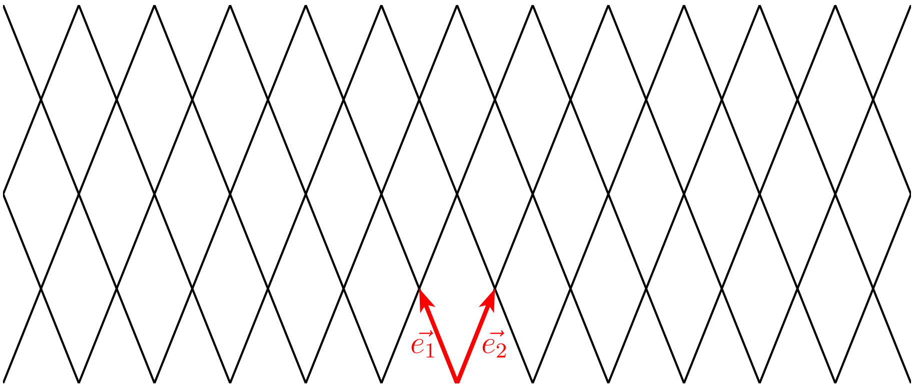
c) $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

d) $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$

e) $\overrightarrow{CD}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})$

f) $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC})$

15) On considère la figure suivante :



a) Représenter, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b}+\vec{c}$ et $3\vec{b}+2\vec{c}$ et donner leurs composantes scalaires dans la base $\mathcal{B}$.

16) Relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_2$, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

17) Relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_2$, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes scalaires des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$ c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

18) Relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_2$, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux nombres α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

19) Relativement à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}_2$, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base du plan.

b) Calculer les composantes scalaires des vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

20) Relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbf{V}_2$, on donne les vecteurs :

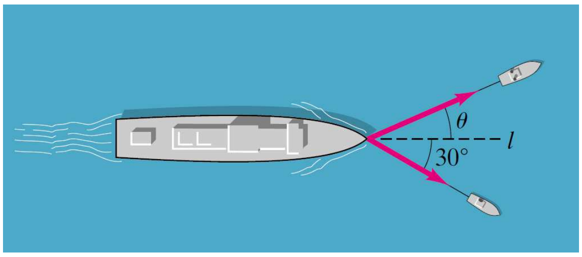
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les composantes scalaires du vecteur $\vec{b}$ dans la base $(\vec{a}, \vec{c})$.

b) Calculer les composantes scalaires du vecteur $\vec{c}$ dans la base $(\vec{j}, \vec{a})$.

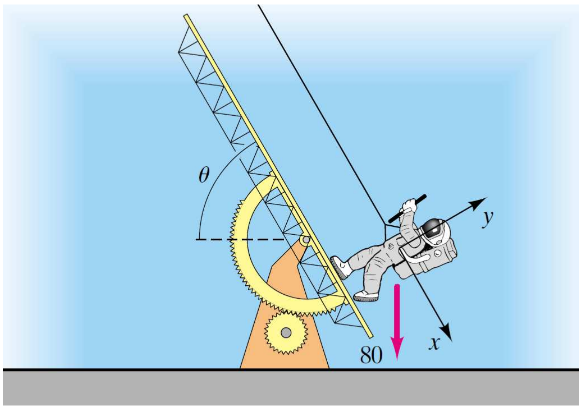
21) Vu du sol, un avion se déplace vers le nord-ouest à une vitesse constante de 250 miles par heure, poussé par un vent d'est de 50 miles par heure. Quelle serait la vitesse de l'avion s'il n'y avait pas de vent ?

22) La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port.



Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 N sur un câble, le plus petit une force de 16'000 N. Si le navire suit une ligne droite l, calculer l'angle que forme le plus puissant des remorqueurs avec la droite l.

23) La figure ci-dessous représente un appareillage servant à simuler les conditions de gravité sur d'autres planètes. Une corde est attachée à un astronaute manoeuvrant sur un plan incliné qui forme un angle de θ degrés avec l'horizontale.



a) Si l'astronaute pèse 80 kg, calculer les composantes selon les directions x et y de la force de pesanteur (voir figure).

b) La composante de la partie a) selon y "est la force de pesanteur" de l'astronaute par rapport au plan incliné. La force de pesanteur de l'astronaute serait de 140 N sur la lune et de 300 N sur mars. Calculer les angles (à $0,01°$ près) que devrait faire le plan incliné avec l'horizontale pour simuler une marche sur ces surfaces.

10.7 Solutions des exercices

3) a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{CE}$ c) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$
d) $\vec{d} = \overrightarrow{DC}$ e) $\vec{e} = \overrightarrow{DA}$ f) $\vec{f} = \vec{0}$

7) a) $\vec{a}$ b) $-\vec{g} - \vec{h}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ...
c) $\vec{c} = -\vec{f} + \vec{e} - \vec{d}$ d) $\vec{g} = -\vec{k} + \vec{c} + \vec{d} - \vec{e}$
e) $\vec{e} = -\vec{g} - \vec{h} + \vec{d}$ f) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
g) $\vec{0}$ h) $-\vec{g}$

13) a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} \cong \begin{pmatrix} -1,0 \\ -1,0 \end{pmatrix}$ f) $\vec{f} \cong \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}$
g) $\begin{pmatrix} 2,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -6,2 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

14) a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) $\overrightarrow{AB} \cong \begin{pmatrix} 1,64 \\ -1,09 \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 3,6 \end{pmatrix}$
e) $\overrightarrow{CD} \cong \begin{pmatrix} -0,28 \\ 0,61 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AD} \cong \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,78 \end{pmatrix}$

15) b) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

16) $\vec{e}$ est colinéaire à tous ; $\vec{a}$, $\vec{d}$ et $\vec{h}$; $\vec{b}$ et $\vec{i}$; $\vec{c}$ et $\vec{g}$

17) a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

18) $\alpha = 3, \quad \beta = 2$

19) b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{26} \\ -\frac{9}{26} \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ \frac{24}{13} \end{pmatrix}$

20) a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} \\ -\frac{22}{23} \end{pmatrix}$
b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

21) 217.54 mph

22) $23,6°$

23) a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 80g \cdot \sin(\theta) \\ 80g \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$

b) Lune : $79,72°$; Mars : $67,53°$

Chapitre 11

Plan affine

11.1 Repère du plan π

Soit π l'ensemble des points du plan.

Dans cet ensemble, nous n'avons pas défini d'opérations. Pour résoudre un problème faisant intervenir des points du plan, on se ramène à un problème équivalent dans l'ensemble des vecteurs $\mathbf{V}_2$ dans lequel on dispose d'opérations. Dans cette optique on choisit un point O de π et on définit la bijection :

$$\begin{array}{rccc} f: & O \times \pi & \longrightarrow & \mathbf{V}_2 \\ & (O, M) & \longmapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

On dit alors que π est le plan affine associé au plan vectoriel $\mathbf{V}_2$.

Définition 11.1
On appelle **repère** du plan affine π tout triplet $(O; E_1; E_2)$ de points non alignés.

Si $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ est un repère de π, les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ déterminent une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan vectoriel $\mathbf{V}_2$, appelée **base associée** au repère $\mathcal{R}$.
Le point O est appelé **origine**, les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ **vecteurs de base** du repère $\mathcal{R}$.

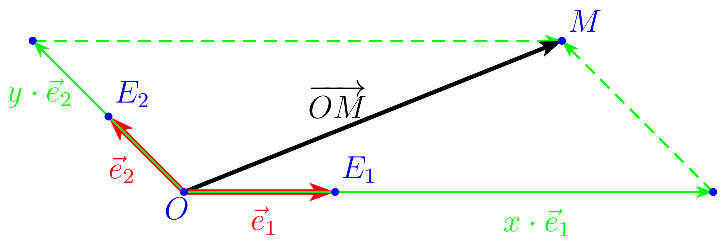
On note également ce repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Coordonnées d'un point relativement à un repère

Soit $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$ un repère du plan π.

Les **coordonnées** x et y relativement à $\mathcal{R}$ d'un point M de π sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ relativement à la base associée $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$. On note $M(x; y)$.

$$\boxed{M(x; y) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OE_1} + y \cdot \overrightarrow{OE_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$



x, la première coordonnée du point M, est appelée **abscisse** de M.
y, la deuxième coordonnée du point M, est appelée **ordonnée** de M.

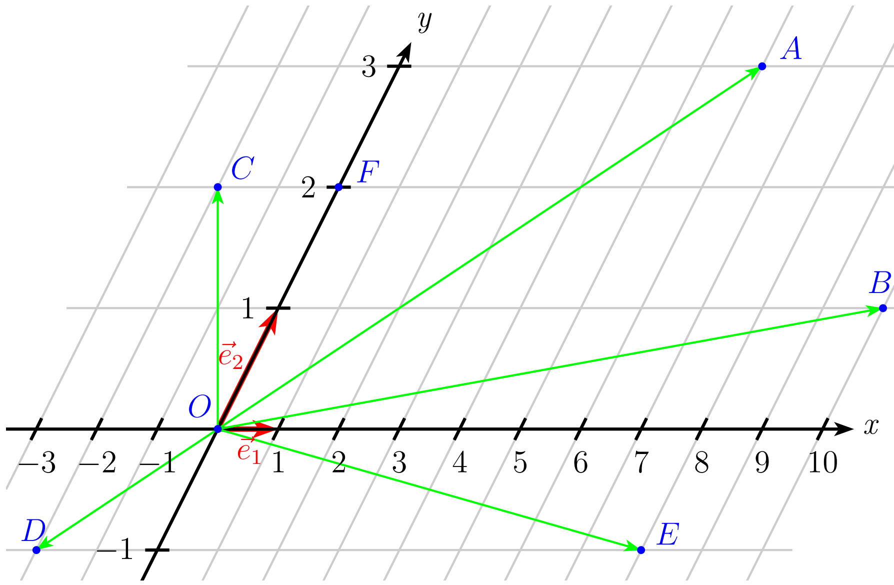
Remarque

On peut associer un système d'axes de coordonnées à un repère du plan affine π.
Le premier vecteur de la base associée, $\vec{e}_1$, donne la direction et le sens du premier axe de coordonnées ou axe des x. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\vec{e}_1$.
Le deuxième vecteur de la base associée, $\vec{e}_2$, donne la direction et le sens du deuxième axe de coordonnées ou axe des y. L'échelle sur cet axe est définie par la longueur de $\vec{e}_2$.

Exemple

On donne ci-dessous un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ du plan affine π, ainsi que les axes de coordonnées associés. Dans ce repère, les coordonnées des points représentés ci-dessous sont les suivantes :

$$A(6;3), \quad B(10;1), \quad C(-2;2), \quad D(-2;-1), \quad E(8,-1), \quad F(0;2)$$



11.2 Calculs avec les coordonnées

Dans un repère $(O; E_1; E_2)$ du plan affine π, on donne les points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

11.2.1 Composantes d'un vecteur

Comme on a vu au chapitre précédent que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (proposition 10.1), on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

11.2.2 Milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$, noté $M_{[AB]}$, sont :

$$\boxed{M_{[AB]}\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$

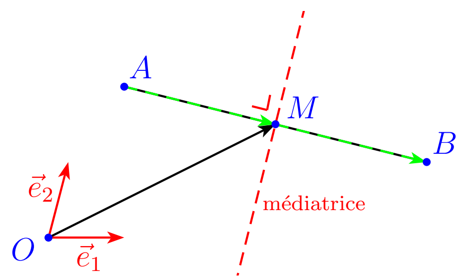
Les coordonnées du milieu du segment sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des extrémités du segment.

Démonstration. Soit $M_{[AB]}$, ou plus simplement M pour cette démonstration, le milieu du segment $[AB]$. Dans ce cas, les deux égalités suivantes sont vraies :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_A\\ y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B\\ y_B\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$



□

11.2.3 Centre de gravité d'un triangle

Les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, noté G, sont :

$$\boxed{G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)}$$

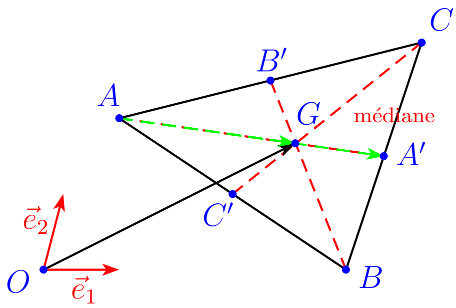
Les coordonnées du centre de gravité d'un triangle sont les **moyennes arithmétiques** des coordonnées correspondantes des sommets du triangle.

Démonstration. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Dans ce cas, l'égalité suivante est vraie :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

où A' est le milieu du segment $[BC]$. On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} x_A\\ y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B\\ y_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_C\\ y_C\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



$\square$

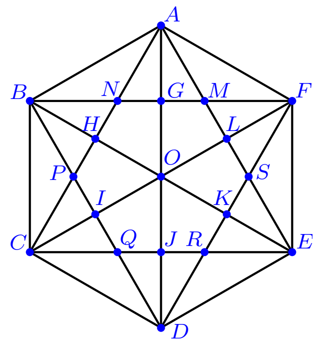
11.3 Exercices

1) Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O.

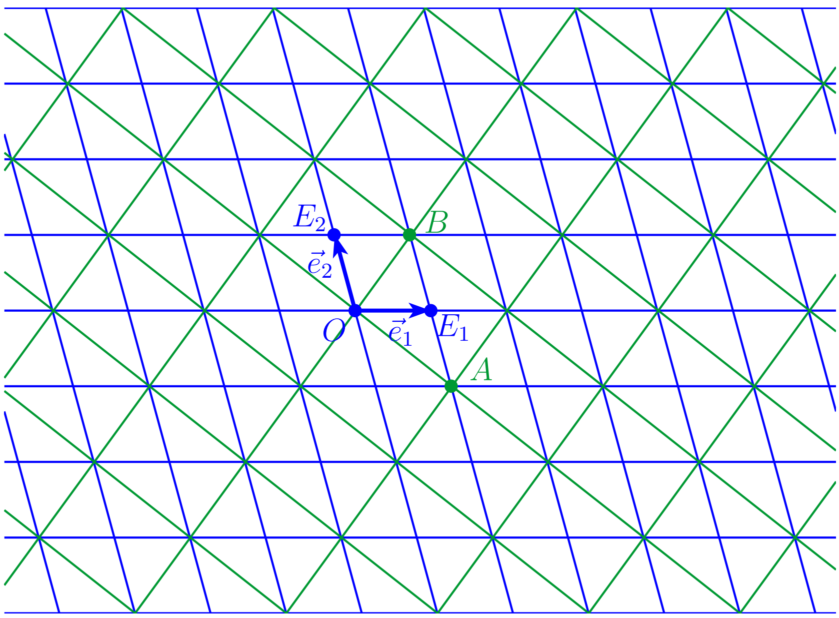
   Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R et S

   a) relativement au repère du plan : $\mathcal{R}_1 = (O; E; F)$.

   b) relativement au repère du plan : $\mathcal{R}_2 = (O; A; C)$.



2) On considère la figure suivante :



   a) Représenter les points dont les coordonnées sont données relativement au repère $\mathcal{R}_1 = (O; E_1; E_2)$:

$M(4;2)$	$N(-3;3)$	$P(-4;-4)$	$Q(2;3)$	$R(1;-3)$
$S(0;-3)$	$T(5;0)$	$U(-1;-4)$	$V(-2;3)$	$W(1;-1)$

   b) Trouver les coordonnées de ces points relativement au repère $\mathcal{R}_2 = (O; A; B)$

   c) Calculer les composantes scalaires, relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, des vecteurs :

   $$\overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{MP}, \quad \overrightarrow{NP}, \quad \overrightarrow{PM}, \quad \overrightarrow{ST}, \quad \overrightarrow{UP}, \quad \overrightarrow{PS}$$

   d) Calculer, dans le repère $\mathcal{R}_1 = (O; E_1; E_2)$, les coordonnées des points C et D tels que :

   $$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NP} \qquad\qquad \overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{AT} = 3\overrightarrow{DS} - 2\overrightarrow{US}$$

3) Dans un repère du plan, soit le triangle de sommets $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$.

   a) Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC.

   b) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

4) Dans un repère du plan, on donne un triangle ABC par deux sommets $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

   Calculer les coordonnées du troisième sommet C.

5) Dans un repère du plan, on donne les points $A(2;3)$, $B(-3;1)$ et $C(8;-1)$.
   a) Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b) Calculer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

6) Dans un repère du plan, dessiner les ensembles de points suivants :

$A = \{M(x;y) \mid x = 5\}$ $\qquad$ $B = \{M(x;y) \mid |y| = 2\}$

$C = \{M(x;y) \mid x = 2y\}$ $\qquad$ $D = \{M(x;y) \mid 2x + y = 6\}$

11.4 Solutions des exercices

1) a)

$A(-1;1)$	$B(-1;0)$	$C(0;-1)$	$D(1;-1)$	$E(1;0)$
$F(0;1)$	$G(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	$H(-\frac{1}{2};0)$	$I(0;-\frac{1}{2})$	$J(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$
$K(\frac{1}{2};0)$	$L(0;\frac{1}{2})$	$M(-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$	$N(-\frac{2}{3};\frac{1}{3})$	$O(0;0)$
$P(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$	$Q(\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$	$R(\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$	$S(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$	

b)

$A(1;0)$	$B(1;1)$	$C(0;1)$	$D(-1;0)$	$E(-1;-1)$
$F(0;-1)$	$G(\frac{1}{2};0)$	$H(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	$I(0;\frac{1}{2})$	$J(-\frac{1}{2};0)$
$K(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$	$L(0;-\frac{1}{2})$	$M(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$	$N(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$	$O(0;0)$
$P(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$	$Q(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$	$R(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$	$S(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$	

2) b)

$M(1;3)$	$N(-3;0)$	$P(0;-4)$	$Q(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$	$R(2;-1)$
$S(\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$	$T(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$	$U(\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$	$V(-\frac{5}{2};\frac{1}{2})$	$W(1;0)$

c) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{UP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $C(3;-5)$, $\quad D(-\frac{7}{2};-8)$

3) a) $M_{[AB]} = (-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, $\quad M_{[AC]} = (-1;\frac{7}{2})$, $\quad M_{[BC]} = (\frac{3}{2};4)$

b) $G(-\frac{1}{3};\frac{10}{3})$

4) $C(5;7)$

5) a) $D(13;1)$

b) centre : $(5;1)$

Chapitre 12

La droite

12.1 Définitions

Définition 12.1
Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Droite déterminée par deux points

Soient deux points distincts A et B.

Définition 12.2
La **droite** (AB) est l'ensemble des points M du plan π alignés avec A et B :

$$(AB) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB},\ k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB).

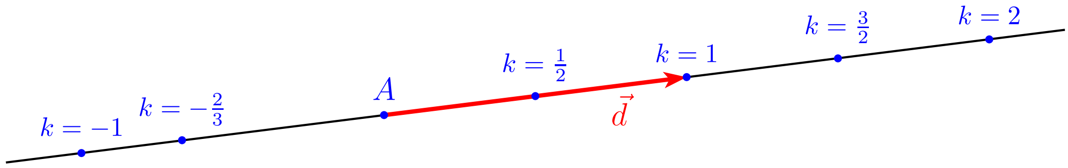
Droite déterminée par un point et une direction

Soient un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul.

Définition 12.3
La **droite** passant par A (appelé **point d'ancrage**) et de direction $\vec{d}$, notée $d(A;\vec{d})$, est l'ensemble des points M du plan π tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires :

$$\boxed{d(A,\vec{d}) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{d},\ k \in \mathbb{R}\}}$$

Le vecteur $\vec{d}$ est un **vecteur directeur** de la droite $d(A,\vec{d})$.



Remarque

A chaque valeur du nombre réel k correspond un unique point de la droite.
A chaque point de la droite correspond un unique nombre réel k.

12.2 Equations paramétriques d'une droite

Le plan π est muni d'un repère $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

Soit la droite d passant par le point $A(x_A;y_A)$ et le vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

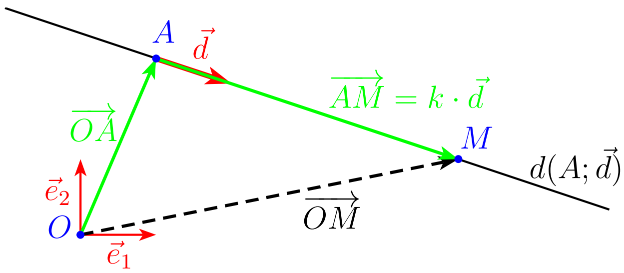
Un point $M(x;y)$ appartient à la droite d si et seulement s'il existe un nombre $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=k\cdot\vec{d}$. Ainsi, pour tout point M de la droite d, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+k\cdot\vec{d} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}$$

où $k\in\mathbb{R}$. Cette équation est une **représentation paramétrique** de la droite d. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de d :

$$\boxed{d:\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & x_A & + & k\cdot d_1 \\ y & = & y_A & + & k\cdot d_2 \end{array}\right.}$$

où $k\in\mathbb{R}$.



Exemple

Soient les points $A(-3;2)$ et $B(-1;3)$. Nous allons déterminer les équations paramétriques de la droite (AB).

1. *Un vecteur directeur de la droite (AB) :*

$$\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Les équations paramétriques de (AB) sont (une représentation possible parmi l'infinité des représentations possibles de la droite (AB)) :*

$$(AB):\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & -3 & + & k\cdot 2 \\ y & = & 2 & + & k\cdot 1 \end{array}\right.$$

On peut maintenant donner des points appartenant à la droite (AB) en choisissant une valeur de k. Par exemple, pour $k=5$, on obtient le point

$$C:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & + & 5\cdot 2 & = & 7 \\ y & = & 2 & + & 5\cdot 1 & = & 7 \end{array}\right. \Rightarrow C(7;7)$$

De plus, on peut déterminer si un point appartient ou non à la droite (AB) en déterminant s'il existe une valeur unique de k telle que les équations paramétriques sont vérifiées pour les coordonnées du point. Par exemple, pour le point $D(-9;8)$, on a

$$D : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -9 & = & -3 & + & k \cdot 2 & \Rightarrow & k = -3 \\ 8 & = & 2 & + & k \cdot 1 & \Rightarrow & k = 6 \end{array} \right.$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

12.3 Equation cartésienne d'une droite

Soit la droite d passant par le point d'ancrage $A(x_A; y_A)$ et admettant comme vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x;y)$ appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Or, ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $Det(\overrightarrow{AM}; \vec{d}) = 0$ ou :

$$Det(\overrightarrow{AM}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} x - x_A & d_1 \\ y - y_A & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient successivement les équations :

$$\begin{aligned} (x - x_A) \cdot d_2 - (y - y_A) \cdot d_1 &= 0 \\ d_2 \cdot x - d_1 \cdot y + (d_1 \cdot y_A - d_2 \cdot x_A) &= 0 \end{aligned}$$

En posant $d_2 = a$, $-d_1 = b$ et $(d_1 \cdot y_A - d_2 \cdot x_A) = c$, la relation ci-dessus s'écrit

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

où a, b et c sont trois nombres réels. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.

Proposition 12.1
Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Comme $d_2 = a$ et $-d_1 = b$,

$$\boxed{\text{le vecteur } \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d}$$

Exemple

Soient les points $A(5;2)$ et $B(1;-3)$. Nous allons déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

1. *Un vecteur directeur de la droite (AB) :*

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient $a = -5$ et $-b = -4$. L'équation cartésienne partielle de (AB) est : $-5x + 4y + c = 0$.

2. Comme $A \in (AB)$, on peut déterminer c en résolvant l'équation

$$(-5) \cdot 5 + 4 \cdot 2 + c = 0 \quad \to \quad c = 17$$

L'équation cartésienne de (AB) est : $-5x + 4y + 17 = 0$

12.3.1 Equation cartésienne résolue et pente

Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$.

Dans ce cas, on peut expliciter y en transformant cette équation :

$$ax + by + c = 0 \quad \to \quad by = -ax - c \quad \to \quad y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$$

En posant $\frac{-a}{b} = m$ et $\frac{-c}{b} = h$, cette équation s'écrit

$$\boxed{y = mx + h}$$

Sous cette forme, l'équation cartésienne de d est dite **résolue**.

Définition 12.4
Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Si la première composante scalaire de $\vec{d}$ est différente de zéro, $d_1 = -b \neq 0$, le rapport

$$\boxed{m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{-a}{b}}$$

est appelé **pente** (ou **coefficient directeur**) de la droite d.

Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, tels que $x_A \neq x_B$, la pente de d est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarques

Soit la droite d d'équation cartésienne résolue $y = mx + h$.

1. La droite d passe par le point $A(0; h)$ (en effet : $h = m \cdot 0 + h$). Elle coupe l'axe des y en h. On dit que h est l'**ordonnée à l'origine** de la droite d.
2. L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire $mx - y + h = 0$. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Exemple

Soient les points $A(5; 2)$ et $B(1; -3)$. L'équation cartésienne de la droite (AB) est $-5x + 4y + 17 = 0$, selon l'exemple précédent.

L'équation cartésienne de (AB) peut s'écrire sous forme résolue :

$$-5x + 4y + 17 = 0 \quad \to \quad 4y = 5x - 17 \quad \to \quad y = \frac{5}{4} \cdot x - \frac{17}{4}$$

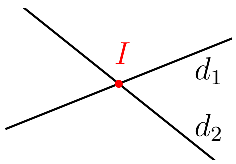
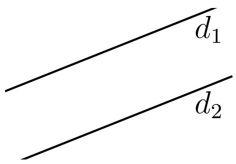
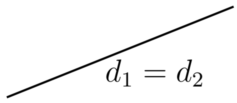
La pente de cette droite vaut donc :

$$m = \frac{5}{4} = \frac{-(-5)}{4} = \frac{-3-2}{1-5}$$

(AB) *admet comme vecteur directeur* $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ *et comme ordonnée à l'origine le nombre* $h = -\frac{17}{4}$

12.4 Position relative de deux droites dans le plan

On donne dans le tableau ci-dessous les positions relatives possibles de deux droites d_1, de vecteur directeur $\vec{d_1}$ et d_2, de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

Sécantes	Parallèles	
	distinctes	confondues
		
Un unique point I d'intersection	Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (droites)
$\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas colinéaires	$\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont colinéaires	

Equations cartésiennes de deux droites parallèles

Théorème 12.2
Soient les droites, données par leurs équations cartésiennes, $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (avec $a_1, b_1 \neq 0$) et $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (avec $a_2, b_2, c_2 \neq 0$).

Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** si et seulement si les coefficients a et b sont proportionnels :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}} \begin{cases} \neq \dfrac{c_1}{c_2} & \text{pour } d_1 \text{ et } d_2 \text{ parallèles distinctes} \\ = \dfrac{c_1}{c_2} & \text{pour } d_1 \text{ et } d_2 \text{ parallèles confondues} \end{cases}$$

Remarque

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement si $\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$ (en transformant l'égalité donnée ci-dessus) ou si $m_1 = m_2$. Ainsi, deux droites parallèles ont la **même pente**.

12.4.1 Calcul du point d'intersection de deux droites sécantes

On donne ici des méthodes pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Droites sous formes paramétriques

On écrit les équations paramétriques des deux droites en désignant leurs paramètres par des lettres différentes.

En posant l'égalité des coordonnées de même rang, on obtient un système de deux équations à deux inconnues (les paramètres).

On résout ce système.

Si celui-ci admet une solution unique, les droites sont sécantes et on obtient le point d'intersection en injectant la valeur obtenue d'un des paramètres dans les équations de la droite correspondante.

Droites sous formes cartésiennes

Un point $I(x;y)$ appartient à deux droites d_1 et d_2 si et seulement si ses coordonnées x et y vérifient les équations cartésiennes de d_1 et d_2.

On obtient donc les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 en résolvant le système de deux équations à deux inconnues formé par les équations de d_1 et d_2.

Exemple

Nous allons déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection des droites d_1 et d_2, données tout d'abord sous forme paramétrique puis données sous forme cartésienne.

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & -3 & + & k \cdot 2 \\ y & = & 2 & + & k \cdot 1 \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 6 & + & s \cdot 1 \\ y & = & -1 & + & s \cdot (-1) \end{array} \right.$$

ou

$$d_1 : x - 2y + 7 = 0 \qquad d_2 : x + y - 5 = 0$$

Sous forme paramétrique

On pose le système suivant d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3 + 2k & = & 6 + s \\ 2 + k & = & -1 - s \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, on peut isoler s dans la première équation et trouver $s = -9 + 2k$. En injectant ceci dans la deuxième équation, on trouve

$$2 + k = -1 - (-9 + 2k) \quad \to \quad 2 + k = 8 - 2k \quad \to \quad 3k = 6 \quad \to \quad k = 2$$

On obtient alors $s = -9 + 2 \cdot 2 = -5$.

Maintenant, pour trouver le point I d'intersection, on utilise les équations paramétriques d'une des deux droites et la valeur du paramètre associé.

$$I : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & = & -3 & + & 2 \cdot 2 & = & 1 \\ y & = & 2 & + & 2 \cdot 1 & = & 4 \end{array} \right. \Rightarrow I(1;4)$$

Sous forme cartésienne

On pose le système suivant d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 7 & = & 0 \\ x + y - 5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, on peut soustraire ces deux équations et trouver la nouvelle équation $-3y + 12 = 0$*. On en tire immédiatement que* $y = 4$*. En injectant cette valeur dans la première équation, on trouve*

$$x - 2 \cdot 4 + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

Le point d'intersection des droites d_1 *et* d_2 *est* $I(1; 4)$*.*

12.5 Exercices

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont relatives à un repère $(O; I; J)$ de π et les composantes des vecteurs relatives à la base $(\vec{i}, \vec{j}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de $\mathbf{V}_2$ associée.

1) Les points A, B et C donnés ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(2;3)$, $B(1;6)$, $C(4;-3)$

b) $A(1;-1)$, $B(3;1)$, $C(-2;3)$

c) $A(-56;84)$, $B(16;-24)$, $C(-8;12)$

2) On donne une droite d par ses équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 + k \cdot 3 \\ y = 3 + k \cdot (-2) \end{cases}$$

Représenter les points de d correspondant aux valeurs suivantes du paramètre k : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

3) Représenter graphiquement les quatre droites suivantes, données par leurs équations paramétriques :

a) $a : \begin{cases} x = -4 + 4k \\ y = 5 - 3k \end{cases}$ b) $b : \begin{cases} x = -4 - 8k \\ y = 5 + 6k \end{cases}$

c) $c : \begin{cases} x = 8 + 4k \\ y = -4 - 3k \end{cases}$ d) $d : \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - \frac{3}{2}k \end{cases}$

4) Soit la droite d passant par le point $A(5;4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les coordonnées de trois autres points B, C et D de la droite d.

b) Par calcul, déterminer si les points $E(101;70)$ et $F(-40;-26)$ appartiennent à d.

c) Construire la droite d.

5) Soit la droite d d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = -4 + k \end{cases}$.

a) Déterminer deux points A et B situés sur la droite d.

b) Les points $C(1;-1)$, $D(0;0)$, $E(5;-5)$ et $F(-139;43)$ sont-ils sur la droite d ?

c) Déterminer sur la droite d le point K d'abscisse -3.

d) Déterminer sur la droite d le point L d'ordonnée 4.

e) Déterminer sur la droite d le point N dont l'abscisse vaut le double de l'ordonnée.

6) Trouver une représentation paramétrique de la droite :

a) qui passe par $A(3;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) qui passe par $A(-3;-2)$ et $B(4;-5)$;

c) qui passe par $A(2;-4)$ et a pour pente $m = -\dfrac{3}{4}$;
d) qui passe par $A(5;2)$ et est parallèle au segment $[BC]$, où $B(1;1)$ et $C(-3;2)$;
e) qui passe par $A(0;-2)$ et est parallèle à (OI) ;
f) qui passe par $A(8;12)$ et est parallèle à (OJ).

7) On donne le triangle ABC de sommets $A(-4;1)$, $B(2;-3)$ et $C(5;4)$.
   a) Déterminer les équations paramétriques de la médiane passant par le sommet A.
   b) Déterminer les équations paramétriques de la droite d passant par A et parallèle à (OJ).
   c) Déterminer les équations paramétriques de la droite g passant par B et parallèle à (AC).

8) Soit la droite d donnée par la représentation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Représenter la droite d.
   b) Colorer en rouge les points pour lesquels $k \in [-1;2[$.
   c) Colorer en bleu les points pour lesquels $k \geqslant 3$.

9) Trouver quelques points situés sur chacune des droites suivantes, données par leurs équations cartésiennes. Représenter ces droites.

   a) $x + 2y - 12 = 0$
   b) $3x - 15y + 15 = 0$
   c) $4x - 3y = 0$
   d) $y - 4 = 0$
   e) $2x + 7 = 0$
   f) $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{3}$

10) Représenter graphiquement les quatre droites suivantes, données par leurs équations cartésiennes :

   a) $a : 3x + 4y - 8 = 0$
   b) $b : -6x - 8y = -16$
   c) $c : 12y = -9x + 24$
   d) $d : y = -\dfrac{3}{4}x + 2$

11) Quelle particularité possède la droite d d'équation $ax + by + c = 0$, lorsque :

   a) $a = 0$
   b) $b = 0$
   c) $c = 0$

12) Soit la droite d donnée par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7 - 2k \\ y = -3 + 5k \end{cases}$.

   Écrire une représentation cartésienne de cette droite.

13) Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites données à l'exercice 6.

14) Soit la droite passant par les points $A(1;4)$ et $B(3;-2)$.
   a) Donner une représentation cartésienne de la droite (AB).

b) Donner une autre équation cartésienne de la droite (AB).

c) Existe-t-il une équation cartésienne de la droite (AB) qui contienne le terme $7x$?

d) Déterminer deux points C et D situés sur cette droite.

e) Les points $E(0;0)$, $F(2;1)$, $G(5;8)$ et $H(\frac{5}{7};\frac{34}{7})$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

f) Déterminer sur la droite (AB) le point J d'abscisse -12.

g) Déterminer sur la droite (AB) le point K d'ordonnée 555.

h) Déterminer sur la droite (AB) le point L dont l'ordonnée vaut quatre de plus que l'abscisse.

15) Soit la droite $d : 3x + 2y - 5 = 0$.

a) Donner un vecteur directeur de la droite d.

b) Déterminer le vecteur directeur de la droite d ayant pour première composante 7.

16) Soit la droite $d : 2x - 3y + 6 = 0$.

a) Écrire l'équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par l'origine.

b) Écrire l'équation cartésienne de la droite d'' parallèle à d et passant par le point $A(-4;1)$.

17) Soit le point $A(5;-2)$.

a) Écrire l'équation de la droite d parallèle à l'axe des x et passant par le point A.

b) Écrire l'équation de la droite d parallèle à l'axe des y et passant par le point A.

18) Représenter dans un même repère les droites :

a)	$y = 2x - 5$	$y = 2x$	$y = 2x + 4$
b)	$y = -x + 2$	$y = \frac{3}{5}x + 2$	$y = 4x + 2$

19) Représenter, dans un même repère, les droites passant par $A(2;5)$ et de pente :

a) $m = -2$ b) $m = -\dfrac{8}{3}$ c) $m = 0$ d) $m = \dfrac{9}{5}$ e) $m = 2$

20) Écrire l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;6)$ et de pente $m = 4$.

21) Soit la droite passant par les points $A(3;-5)$ et $B(-1;-2)$.

Calculer sa pente et son ordonnée à l'origine.

22) Soit la droite $d : y = -3x + 7$.

Écrire un vecteur directeur de la droite d.

23) Déterminer, lorsque cela est possible, l'équation cartésienne résolue de chacune des droites données à l'exercice 6.

24) Soit la droite $d : y = -5x + 2$.

Écrire l'équation cartésienne résolue de la droite d' parallèle à d et passant par $A(3; -4)$.

25) On donne les points $A(1; -2)$, $B(-5; 2)$, $C(-4; -1)$, $D(1; -1)$ et $E(61; -40)$.

a) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

b) Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ?

26) a) Représenter graphiquement les quatre droites suivantes, données par leurs équations cartésiennes :

$a : x + 2y + 1 = 0$ $\qquad$ $b : -3x + 4y + 7 = 0$

$c : -2x - 4y - 5 = 0$ $\qquad$ $d : 6x + 12y + 6 = 0$

b) Déterminer graphiquement les points d'intersections entre la droite a et les trois autres droites b, c et d.

27) Indiquer les positions relatives des droites d et e (sécantes avec le point d'intersection, strictement parallèles ou confondues) dans les cas suivants :

a) $d : 4x - 2y - 1 = 0$ $\qquad$ $e : -2x + y - 5 = 0$

b) $d : 3x + y - 8 = 0$ $\qquad$ $e : 6x - 2y - 3 = 0$

c) $d : 8x - 4y - 2 = 0$ $\qquad$ $e : -4x + 2y + 1 = 0$

d) $d : -x + 2y - 3 = 0$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$

e) $d : 3x + 2y - 7 = 0$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 - 3k \end{cases}$

f) $d : 6x + y - 9 = 0$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$

g) $d : \begin{cases} x = 7 + k \\ y = 8 - k \end{cases}$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 10 + 3t \end{cases}$

h) $d : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = k \end{cases}$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

i) $d : \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$ $\qquad$ $e : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

28) On donne les droites $d : 2x + 7y + 13 = 0$ et $g : 5x + by + c = 0$.

a) Calculer b et c tels que les droites d et g soient confondues.

b) Calculer b et c tels que les droites d et g soient strictement parallèles.

29) Soit la droite d passant par les points $A(45;-206)$ et $B(712;4)$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées. *Travailler sous forme paramétrique.*

30) Soit la droite $d : 9x - 7y - 4 = 0$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées.

31) On donne les quatre points $A(1;5)$, $B(13;-1)$, $C(8;4)$ et $D(-2;-4)$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD). *Travailler sous forme paramétrique.*

32) On donne la quadrilatère $ABCD$ par ses sommets : $A(-5;-3)$, $B(12;-1)$, $C(9;4)$ et $D(-2;6)$.

Calculer les coordonnées du point E tel que E soit sur la diagonale (BD) et le quadrilatère $ABCE$ soit un trapèze. *Travailler sous forme paramétrique.*

33) On donne le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A(-2;3)$, $B(8;-1)$, $C(10;3)$ et $D(1;9)$.
   a) Ce quadrilatère est-il un trapèze ?
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère. *Travailler sous forme cartésienne.*

34) Un parallélogramme $ABCD$ est donné par un de ses sommets, $A(3;-1)$, et les droites support de deux de ses côtés : $2x + 3y - 5 = 0$ et $x - 4y + 14 = 0$.

Calculer les coordonnées des sommets B, C et D, ainsi que celles du point d'intersection I des diagonales.

35) On donne les milieux des côtés d'un triangle : $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$.

Déterminer les coordonnées des sommets du triangle. *Travailler sous forme cartésienne.*

36) Soit le triangle ABC de sommets $A(3;1)$, $B(-2;5)$ et $C(5;-3)$.
   a) Établir une équation cartésienne de chaque médiane.
   b) Vérifier que les trois médianes sont concourantes.

37) Soit la droite $d : 2x - 3y + 4 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite image de d par :
   a) la translation t de vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.
   b) la symétrie s de centre $A(-2;4)$.
   c) l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{1}{3}$.

38) Représenter l'ensemble E des points $M(x;y)$ tels que $3x - 4y + 2 > 0$.

39) Représenter graphiquement l'ensemble E des points $M(x;y)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+4 & < & 0 \\ 2x+y-1 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

40) Écrire un système d'inéquations à deux variables tel que l'ensemble des solutions soit l'intérieur strict du triangle de sommet $A(3;1)$, $B(7;0)$ et $C(1;-3)$.

12.6 Solutions des exercices

1) a) oui b) non c) oui

4) b) E : non, F : oui

5) a) $A(2;-4)$, $B(-1;-3)$ par exemple
   b) C : non, D : non, E : oui, F : oui
   c) $K(-3;-\frac{7}{3})$
   d) $L(-22;4)$
   e) $N(-4;-2)$

6) a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 4k \\ y & = & 5 & + & k \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -3 & + & 7k \\ y & = & -2 & - & 3k \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4k \\ y & = & -4 & + & 3k \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & - & 4k \\ y & = & 2 & + & k \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & & & k \\ y & = & -2 & & \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 8 & & \\ y & = & 12 & + & k \end{array}\right.$

7) a) $m : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -4 & + & 15t \\ y & = & 1 & - & t \end{array}\right.$
   b) $d : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -4 & & \\ y & = & 1 & + & s \end{array}\right.$
   c) $g : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3u \\ y & = & -3 & + & u \end{array}\right.$

11) a) La droite est parallèle à (OI).
    b) La droite est parallèle à (OJ).
    c) La droite passe par l'origine.

12) $d : 5x + 2y - 29 = 0$ par exemple

13) a) $x + 4y - 23 = 0.$ b) $3x + 7y + 23 = 0$
    c) $3x + 4y + 10 = 0$ d) $x + 4y - 13 = 0$
    e) $y + 2 = 0$ f) $x - 8 = 0$

14) a) $3x + y - 7 = 0$ par exemple
    b) $21x + 7y - 49 = 0$ par exemple
    c) Oui : $7x + \frac{7}{3}y - \frac{49}{3} = 0$
    d) $C(0;7)$, $D(\frac{7}{3};0)$ par exemple
    e) E : non, F : oui, G : non, H : oui
    f) $J(-12;43)$
    g) $K(-\frac{548}{3};555)$
    h) $L(\frac{3}{4};\frac{19}{4})$

15) a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par exemple

b) $\vec{d'} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$

16) a) $d' : 2x - 3y = 0$

b) $d'' : 2x - 3y + 11 = 0$

17) a) $y + 2 = 0$

b) $x - 5 = 0$

20) $y = 4x + 10$

21) Pente : $-\frac{3}{4}$, ordonnée à l'origine : $-\frac{11}{4}$

22) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ par exemple

23) a) $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{23}{4}$

b) $y = -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{23}{7}$

c) $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{2}$

d) $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$

e) $y = -2$

f) impossible

24) $d' : y = -5x + 11$

25) a) Oui

b) Non

26) b) Avec b : $I_1(1; -1)$, avec c : $I_2(0,4; -1,45)$, avec d : infinité de points d'intersection

27) a) strictement parallèles

b) sécantes : $I(\frac{19}{12}; \frac{13}{4})$

c) confondues

d) confondues

e) strictement parallèles

f) sécantes : $I(1; 3)$

g) confondues

h) strictement parallèles

i) sécantes : $I(\frac{4}{19}; \frac{67}{19})$

28) a) $b = \frac{35}{2}$ et $c = \frac{65}{2}$

b) $b = \frac{35}{2}$ et $c \neq \frac{65}{2}$

29) Axe des x : $(699,3; 0)$, axe des y :$(0; -220,2)$

30) Axe des x : $(\frac{4}{9}; 0)$, axe des y : $(0; -\frac{4}{7})$

31) $I(\frac{79}{13}; \frac{32}{13})$

32) $E(\frac{10}{3}; \frac{10}{3})$

33) a) Oui

b) $I(\frac{26}{5};3)$

34) $B(\frac{41}{11};-\frac{9}{11})$, $C(-2;3)$, $D(-\frac{30}{11};\frac{31}{11})$, $I(\frac{1}{2};1)$

35) Sommets : $(-5;7)$, $(3;1)$, $(1;-3)$

36) a) $x+y-3=0$, $12x+9y-33=0$, $y-1=0$

b) $I(2;1)$

37) 1) $2x-3y-16=0$

2) $2x-3y+28=0$

3) $2x-3y+20=0$

40) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-5 & > & 0 \\ x+4y-7 & < & 0 \\ x-2y-7 & < & 0 \end{array}\right.$

Quatrième partie

Fonctions d'une variable

Chapitre 13

Ensembles

13.1 Ensembles et sous-ensembles

13.1.1 Ensembles, définitions

Définition 13.1
Une collection d'objets est un **ensemble** lorsqu'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection. Ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.

N'importe quel objet (mathématique ou non) peut être considéré comme un élément d'un ensemble (y compris un ensemble !).

Notation

1. On représente généralement un ensemble par une lettre latine majuscule : E.
2. Les éléments d'un ensemble sont notés entre accolades et séparés par des points-virgules.
3. Si l'élément x **appartient** à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.
4. Si l'élément x **n'appartient pas** à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

Exemples

– *L'ensemble des nombre de 0 à 6 y compris :* $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Ici, on a :

$$0 \in E, \qquad 4 \in E, \qquad 10 \notin E.$$

– *L'ensemble des élèves d'une classe :* $F = \{\text{Aline}; \text{Bernard}; \ldots\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières différentes :

1. en énumérant ses éléments, $G = \{5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$.
2. en donnant une condition d'appartenance. La notation est alors légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\text{"}\underbrace{\text{H est}}_{H=}\ \underbrace{\text{l'ensemble}}_{\{...\}}\ \text{des}\ \underbrace{\text{éléments de } E}_{\substack{n\in E \\ \text{on donne un nom} \\ \text{général aux éléments} \\ \text{de l'ensemble}}}\ \underbrace{\text{tels que}}_{|}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 15}}_{\substack{n^2\geqslant 15 \\ \text{on écrit la condition à l'aide d'une formule} \\ \text{grâce au fait qu'on a donné un nom aux éléments}}}\text{"}$$

par

$$H = \{n \in E \mid n^2 \geqslant 15\}$$

Cas particulier

Si un ensemble E ne contient aucun élément, on l'appelle **ensemble vide** et on le note $\{\}$ ou $\varnothing$.

Définition 13.2
On appelle **cardinal** d'un ensemble E, noté $Card(E)$, le nombre d'éléments que contient E.

Exemple

- *Le cardinal de l'ensemble* $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *est 6 :* $Card(B) = 6$.
- *Le cardinal de l'ensemble constitué des élèves de la classe est :* ______ .

13.1.2 Sous-ensembles et appartenance

Définition 13.3
Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B.

Exemple

$A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *et* $C = \{3; 4; 5; 6\}$

L'ensemble A est un sous-ensemble de B, mais A n'est pas un sous-ensemble de C.

Définition 13.4
Soit A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. On dit que

1. A est **inclus dans** B si tout élément de A appartient à B. On note $A \subset B$. Dans ce cas, A est un sous-ensemble de B.
2. A **contient** B, lorsque tout élément de B appartient à A. On note $A \supset B$. Dans ce cas, B est un sous-ensemble de A.
3. A est **égal** à B, lorsque tout élément de A appartient à B et que tout élément de B appartient à A. On note $A = B$.

Syntaxe

Nous venons de rencontrer deux signes mathématiques qu'il s'agit de ne pas confondre :

Nom	Terme de gauche	Symbole	Terme de droite
Appartenir à	Elément	$\in$	Ensemble
Etre inclus dans	Ensemble	$\subset$	Ensemble
Etre égal à	Elément	$=$	Elément
Etre égal à	Ensemble	$=$	Ensemble
Contenir	Ensemble	$\ni$	Elément
Contenir	Ensemble	$\supset$	Ensemble

On a l'équivalence suivante lorsque A est un ensemble.

$$\boxed{x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A}$$

Remarques

1. $A \not\subset B$ signifie qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B.
2. Soit un ensemble $E = \{a; b; c\}$.
   $a \in E$ et $\{a\} \subset E$ sont des notations correctes, $a \subset E$ ne l'est pas.
3. L'ensemble vide est contenu dans tous les ensembles. En termes mathématiques, cela revient à écrire $\emptyset \subset A$ pour tout ensemble A.

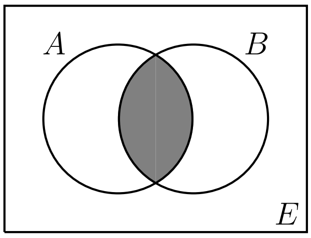
13.2 Opérations sur les ensembles

Définition 13.5
Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit "A inter B". Symboliquement :

$$A \cap B = \{e \in E | e \in A \text{ et } e \in B\}$$

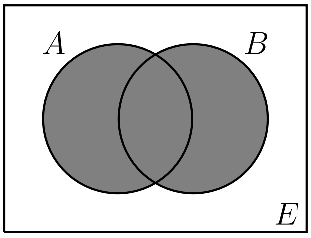
$A \cap B$



La **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B (ou au deux). On note cet ensemble $A \cup B$ et on lit "A union B". Symboliquement :

$$A \cup B = \{e \in E | e \in A \text{ ou } e \in B\}$$

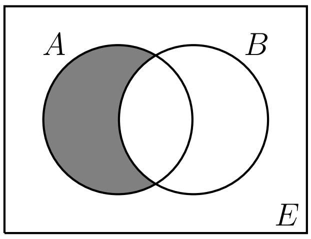
$A \cup B$



La **différence** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais non à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \setminus B$ et on lit "A moins B". Symboliquement :

$$A \setminus B = \{e \in E | e \in A \text{ et } e \notin B\}$$

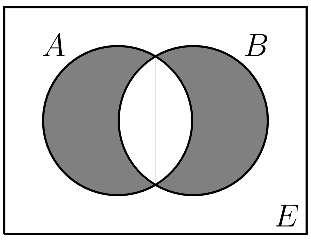
$A \setminus B$



La **différence symétrique** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais non à l'ensemble B ou qui appartiennent à l'ensemble B mais non à l'ensemble A. On note cet ensemble $A \triangle B$. Symboliquement :

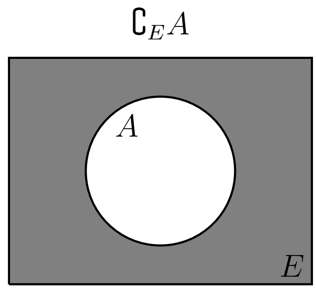
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$A \triangle B$



Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On note cet ensemble $\complement_E A$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté quant au référentiel, $\overline{A}$. Symboliquement :

$$\complement_E A = \{e \in E | e \notin A\}$$



Exemple

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ *et les sous-ensembles de* E *:* $A = \{2; 4; 6; 8\}$ *et* $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

$A \cap B = \{2; 4\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, $A \setminus B = \{6; 8\}$, $A \triangle B = \{1; 3; 6; 8\}$, $\overline{A} = \{1; 3; 5; 7\}$.

Définition 13.6
Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

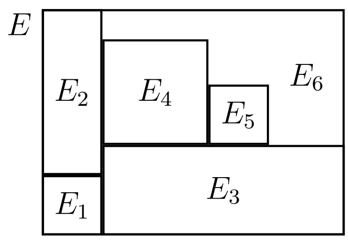
13.3 Partition, ensemble des parties

Définition 13.7
Soit $P = \{E_1; E_2; \ldots; E_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ un ensemble de sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble P est une **partition** finie de l'ensemble E si :

$$\begin{cases} E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = E, \\ E_i \neq \emptyset \text{ pour tout } i \text{ de 1 à } n, \\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ pour tous les } i \text{ et } j \text{ de 1 à } n, \text{ avec } i \neq j \end{cases}$$

Exemple

1. *On peut illustrer la partition d'un ensemble de manière graphique :*



2. *Soit l'ensemble F des élèves du lycée.*
   – *Partition 1 :*
     a) *F_1 : ensemble des élèves de première année,*
     b) *F_2 : ensemble des élèves de deuxième année,*
     c) *F_3 : ensemble des élèves de troisième année.*
   – *Partition 2 :*
     a) *F_1 : ensemble des garçons,*
     b) *F_2 : ensemble des filles.*
   – …

Définition 13.8
Soit un ensemble E. L'**ensemble des parties** de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles possibles de E. Symboliquement, on définit cet ensemble par : $\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}$.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble de ces parties est :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; E\}$$

Remarque

Pour un ensemble E quelconque, l'ensemble vide, $\emptyset$, et l'ensemble E lui-même sont toujours des sous-ensembles de E. Ils font donc partie de $\mathcal{P}(E)$.

13.4 Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit un ensemble E et trois ensembles A, B et C appartenant à $\mathcal{P}(E)$ (trois sous-ensembles de E). Les opérations réunion, $\cup$, et intersection, $\cap$, ont ls propriétés suivantes :

Associativité	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Commutativité	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) =$	$A \cup (B \cap C) =$
	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elément neutre	$A \cap E = A$	$A \cup \emptyset = A$
Complémentaire	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = E$

On peut encore énoncer deux relations entre les trois opérations de base consistant à former des unions, des intersections ou des complémentations, qui sont connues sous le nom de **lois de De Morgan** et sont très utilisées, surtout en probabilités.

Proposition 13.1
Soit un ensemble E et deux ensembles A et B de $\mathcal{P}(E)$. On a alors les propriétés suivantes sur les complémentaires :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}} \qquad \textbf{Lois de De Morgan}$$

Ces formules seront démontrées en exercice.

Note

Pour tout ensemble E, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ muni des opérations de réunion, d'intersection, ainsi que la notion de complémentaire, a une **structure d'algèbre de Boole**.

13.5 Intervalles réels

Les **intervalles** sont des notations simples et efficaces pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Ils sont notamment utilisés lors de la résolution d'inéquations.

Définition 13.9
Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On a les définitions suivantes :

1. On appelle **intervalle fermé**, noté $[a; b]$, l'ensemble de tous les réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
2. On appelle **intervalle ouvert**, noté $]a; b[$ ou $(a; b)$, l'ensemble de tous les réels x tels que $a < x < b$.
3. On appelle **intervalle semi-ouvert** à gauche, noté $]a; b]$ ou $(a; b]$, (respectivement à droite, noté $[a; b[$ ou $[a; b)$) l'ensemble de tous les réels x tels que $a < x \leqslant b$ (resp. $a \leqslant x < b$).

Exemple

1) $[2; 5]$ *est l'ensemble de tous les nombres réels situés entre* 2 *et* 5 *;* 2 *et* 5 *compris.*

2) $]2; 5[$ *est l'ensemble de tous les nombres réels situés entre* 2 *et* 5 *;* 2 *et* 5 *non compris.*

3) $[2; 5[$ *est l'ensemble de tous les nombres réels situés entre* 2 *et* 5 *;* 2 *compris et* 5 *non compris.*

On peut représenter les intervalles sur la droite réelle, ce qui est fait dans le tableau ci-dessous. On y considère deux nombre réels a et b tels que $a < b$. Chacune des lignes décrit le même sous-ensemble de trois façons équivalentes.

Les huit types d'intervalles		
Sous-ensemble	Intervalle	Représentation graphique
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	$[a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$	$[a; b[$ ou $[a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$	$]a; b]$ ou $(a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a; b[$ ou $(a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$]a; +\infty[$ ou $(a; +\infty)$	

Sous-ensemble	Intervalle	Représentation graphique
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$	$[a; +\infty[$ ou $[a; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$]-\infty; b[$ ou $(-\infty; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$	$]-\infty; b]$ ou $(-\infty; b]$	

13.6 Produit cartésien

Définition 13.10
Soit deux ensembles A et B.
Un élément a de A et un élément b de B, pris dans cette ordre, forment un **couple** noté $(a; b)$.
On peut considérer le couple comme une "paire ordonnée".
Soit encore un élément c de A et un élément d de B. L'axiome suivant définit l'égalité de couples :

$$(a; b) = (c; d) \Longleftrightarrow (a = c \text{ et } b = d)$$

a est l'**abscisse** ou la première coordonnée (composante) du couple $(a; b)$.
b est l'**ordonnée** ou la deuxième coordonnée (composante) du couple $(a; b)$.
Le **produit cartésien** de A et B, pris dans cet ordre, est l'ensemble des couples ayant leur première coordonnée dans A et leur deuxième coordonnée dans B. On note :

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ } et \text{ } y \in B\}$$

On lit "A cross B" (ou "A croix B").
Cas particulier : Si $A = B$, on pose : $A \times A = A^2$.

Remarques

1) **Attention !** $A \times B \neq B \times A$: l'ordre joue un rôle important.
2) Ne pas confondre
   – $(a; b)$, élément du produit cartésien,
   – $\{a; b\}$, ensemble comprenant a et b comme éléments,
   – $[a; b]$, intervalle fermé de a à b.
3) On peut généraliser la notion de produit cartésien et l'appliquer à un nombre quelconque d'ensembles. Par exemple, un produit cartésien de trois ensembles est un ensemble de triplets.

Exemple

Soit $A = \{0; 1\}$ *et* $B = \{a; b; c; d\}$
alors $A \times B = \{(0; a); (0; b); (0; c); (0; d); (1; a); (1; b); (1; c); (1; d)\}$
$(1; b)$ *est un couple de* $A \times B$ *où* 1 *est la première coordonnée ou abscisse et* b *la deuxième coordonnée ou ordonnée.*

13.6.1 Le plan $\mathbb{R}^2$

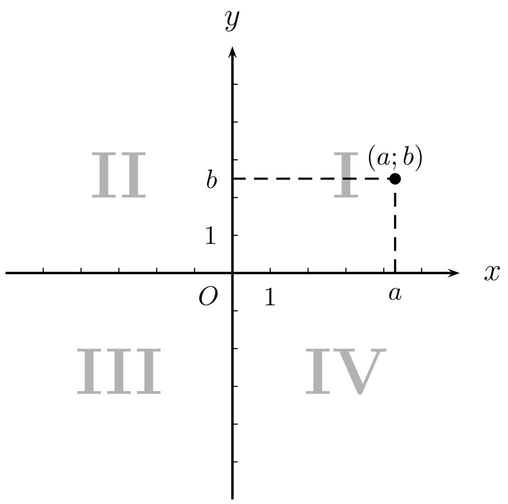
Dans le chapitre "Notions fondamentales" en algèbre, nous avons défini l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et avons montré qu'on peut le représenter par la droite réelle. Nous allons maintenant montrer comment associer l'ensemble des couples $(a;b)$ de nombres réels

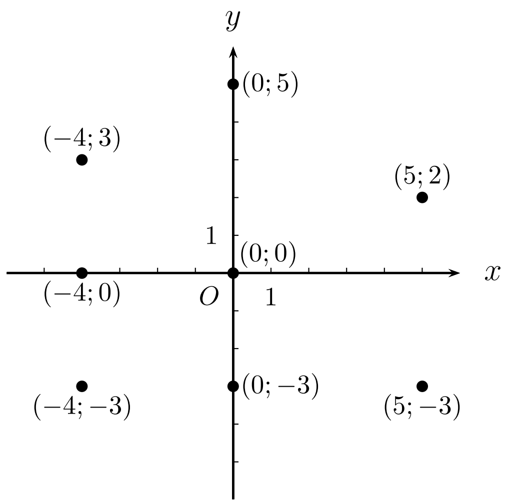
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a;b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

à chaque point d'un plan.

Un **système de coordonnées orthogonale** ou système cartésien dans un plan est formé de deux droites de coordonnées perpendiculaires appelées **axes de coordonnées**, qui se coupent à l'origine O, comme le montre la figure ci-dessous. On appelle la droite horizontale l**axe des** x et la droite verticale l'**axe des** y, et on les note respectivement Ox et Oy. Le plan est alors un **plan de coordonnées** ou **plan** Oxy. Les axes de coordonnées divisent le plan en quatre secteurs appelés le **premier**, le **deuxième**, le **troisième** et le **quatrième quadrant**, et notés respectivement I, II, III et IV. Les points sur les axes n'appartiennent à aucun quadrant.

Chaque point P d'un plan Oxy peut être associé à un couple $(a;b)$ comme le montre la figure ci-dessous. On appelle a la coordonnée en x (*ou abscisse*) et b la coordonnée en y (*ou ordonnée*). On dit que P *a les coordonnées* $(a;b)$ et on parle du point $(a;b)$ ou du point $P(a;b)$. Réciproquement, chaque couple $(a;b)$ détermine un point P de coordonnées a et b. On repère un point en mettant un point rond. Quelques exemples de points sont données dans la figure de droite.





Dans la suite de ce cours, nous allons largement utiliser le plan Oxy pour représenter des ensembles de couples de nombres réels sous forme de points. Nous présentons ci-dessous deux exemples de cette utilisation.

On peut représenter dans le plan l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues x et y. En effet, une solution particulière d'une telle équation est un couple $(a;b)$ qui vérifie l'énoncé si $x = a$ et $y = b$.

> ***Exemple***
>
> $(2,3)$ *est une solution de* $y^2 = 5x - 1$ *puisque si* $x = 2$ *et* $y = 3$ *on a :*
> – *MG :* $3^2 = 9$
> – *MD :* $5 \cdot 2 - 1 = 9$

Définition 13.11
A chaque solution $(a;b)$ d'une équation en x et y correspond un point $P(a;b)$. L'ensemble de tous ces points est appelé la **représentation graphique** de l'équation.

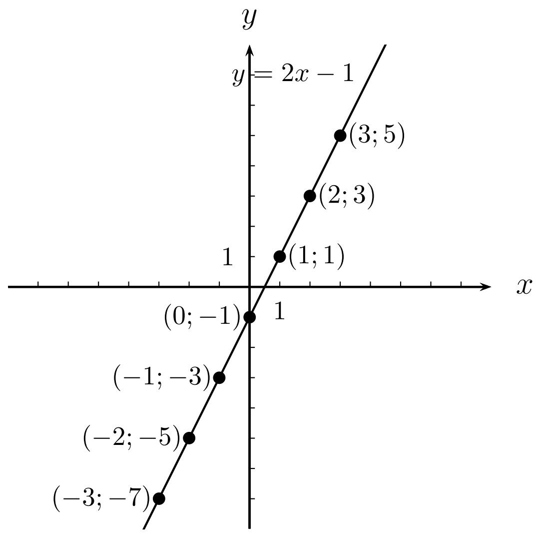
Dans les cas simples, la représentation graphique peut être obtenue en reportant quelques points. Pour une équation compliquée, reporter des points ne donne que peu d'informations au sujet de la représenation graphique. Dans un tel cas, on devra employer des techniques que nous étudierons dans la suite du cours.

Exemple

Représentation graphique de l'équation $y = 2x - 1$.
On donne ci-dessous quelques points $(x;y)$ du plan qui satisfont cette équation.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

On observe que les points qui ont ces coordonnées sont sur une droite (représentée ci-dessous). En général, aussi peu de points ne suffisent pas pour représenter graphiquement une équation ; cependant, dans ce cas élémentaire, on peut raisonnablement être sûr que la représentation graphique est une droite.



On peut également représenter graphiquement le produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ en utilisant certaines conventions qui seront illustrées par l'exemple ci-dessous.

Exemple

Soit les ensembles $A = [2;4[$ et $B = \{1\} \cup [2;5]$.
La représentation graphique du produit cartésien de A et B

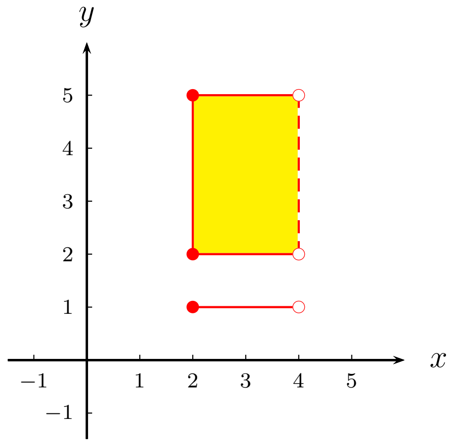
$$A \times B = [2;4[\times (\{1\} \cup [2;5])$$

est donnée ci-dessous.
On utilise les conventions suivantes pour la représentation graphique :
disque : *le point appartient à l'ensemble,*
cercle : *le point n'appartient à l'ensemble,*

segment continu : *tous les point du segment appartiennent à l'ensemble,*

segment discontinu : *aucun point du segment n'appartient à l' ensemble,*

surface colorée : *tous les points de la surface appartiennent à l'ensemble.*



13.7 Relations binaires

13.7.1 Graphe - relation binaire

Définition 13.12
Soit G une partie de $A \times B$.

Une **relation binaire** de A vers B est déterminée par la donnée de

– son ensemble de départ A (source)
– son ensemble d'arrivée B (but)
– son **graphe** G

La relation est désignée par le symbole $\mathscr{R}$.

L'élément a de A est dans la relation $\mathscr{R}$ avec l'élément b de B, si $(a;b) \in G$, et dans ce cas seulement. On écrit $a\,\mathscr{R}\,b$ et on lit a est en relation avec b.

a est alors une **préimage** de b par la relation $\mathscr{R}$ et b est une **image** de a par la relation $\mathscr{R}$.

De plus, si $(a;b) \notin G$, on écrit $a\,\not{\mathscr{R}}\,b$.

Enfin, deux relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont égales et on note $\mathscr{R} = \mathscr{S}$, dans le seul cas où $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ ont la même source, le même but et le même graphe.

Remarque

La représentation graphique d'un graphe dans un diagramme cartésien porte parfois, par abus de langage, le nom "graphe".

13.7.2 Relation réciproque

Définition 13.13
Le couple $(b;a)$ de $B \times A$ est le **transposé** ou le **symétrique** du couple $(a;b)$ de $A \times B$.

Le graphe transposé ou symétrique du graphe G est l'ensemble de tous les couples transposé des couples de G. On note

$$^{\tau}G = \{(y;x) \mid (x;y) \in G\}$$

La **relation réciproque** d'une relation $\mathscr{R}$ de A vers B ayant G comme graphe est la relation de B vers A admettant $^{\tau}G$ comme graphe. Elle est désignée par le symbole $^{\tau}\mathscr{R}$.

Par définition, la condition suivante se vérifie pour tout x de A et tout y de B :

$$y \, ^{\tau}\mathscr{R} \, x \Longleftrightarrow x \, \mathscr{R} \, y$$

13.7.3 Propriétés d'une relation dans un ensemble A

Définition 13.14
Une relation binaire $\mathscr{R}$ dans un ensemble A est une relation de A vers A.

Une relation $\mathscr{R}$ dans A est :

- réflexive si $x \mathscr{R} x$
- symétrique si $x \mathscr{R} y \quad \Rightarrow \quad y \mathscr{R} x$
- antisymétrique si $(x \mathscr{R} y \quad \textbf{et} \quad y \mathscr{R} x) \quad \Rightarrow \quad x = y$
- transitive si $(x \mathscr{R} y \quad \textbf{et} \quad y \mathscr{R} z) \quad \Rightarrow \quad x \mathscr{R} z$
- connexe si $(x \in A \quad \textbf{et} \quad y \in A) \quad \Rightarrow \quad (x \mathscr{R} y \quad \textbf{ou} \quad y \mathscr{R} x)$

pour tous les éléments x, y, z de A.

13.7.4 Relations particulières dans un ensemble A

Définition 13.15
On peut définir les relations particulières dans un ensemble A suivantes :

Une **relation d'ordre** est une relation $\left\{ \begin{array}{l} \text{réflexive} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{transitive} \end{array} \right.$

Une **relation d'ordre total** est une relation $\left\{ \begin{array}{l} \text{réflexive} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{transitive} \\ \text{connexe} \end{array} \right.$

Une **relation d'équivalence** est une relation $\left\{ \begin{array}{l} \text{réflexive} \\ \text{symétrique} \\ \text{transitive} \end{array} \right.$

13.7.5 Classes d'équivalence - ensemble-quotient

Définition 13.16
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble A.

On introduit souvent la notion suivante :

$$x \sim y \pmod{\mathscr{R}}$$

en lieu et place de $x \mathscr{R} y$ et on lit "x est équivalent à y, modulo $\mathscr{R}$".

La **classe d'équivalence** d'un élément a de A, modulo $\mathscr{R}$, est l'ensemble des éléments de A équivalents à a, modulo $\mathscr{R}$.
On note :

$$Cl(a) = \dot{a} = \{x \mid x \in A \textbf{ et } x \sim a \pmod{\mathscr{R}}\}$$

L'**ensemble-quotient** de A par $\mathscr{R}$ est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de A, modulo $\mathscr{R}$. On le note : $A/\mathscr{R}$

Proposition 13.2
L'ensemble-quotient $A/\mathscr{R}$ est une partition de A.

Réciproquement, toute partition de A permet de définir une relation d'équivalence dans A.

13.7.6 Exemples

Exemple 1

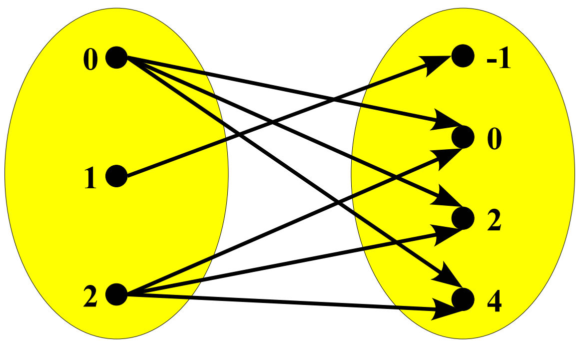
Soit $\mathscr{R}$ la relation de $A = \{0; 1; 2\}$ vers $B = \{-1; 0; 2; 4\}$ donnée par

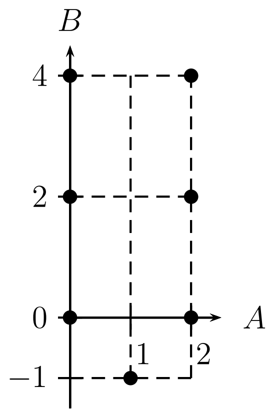
$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x + y \text{ est un nombre pair}$$

Le graphe de cette relation est :

$$G = \{(0;0); (0;2); (0;4); (1;-1); (2;0); (2;2); (2;4)\}$$

On donne ci-dessous une représentation fléchée et un diagramme cartésien de $\mathscr{R}$.





Exemple 2

On considère l'ensemble E formé des 6 boules a, b, c, d, e et f. Les trois boules a, b, c sont rouges, les deux boules d, e sont vertes et la boule f est blanche.
Dans E, on envisage la relation $\mathscr{R}$ donnée par

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de même couleur}$$

$\mathscr{R}$ est une relation :

réflexive : car une boule est évidemment en relation avec elle-même ;

symétrique : car si une première boule est de la même couleur qu'une deuxième boule, alors la deuxième boule est de la même couleur que la première ;

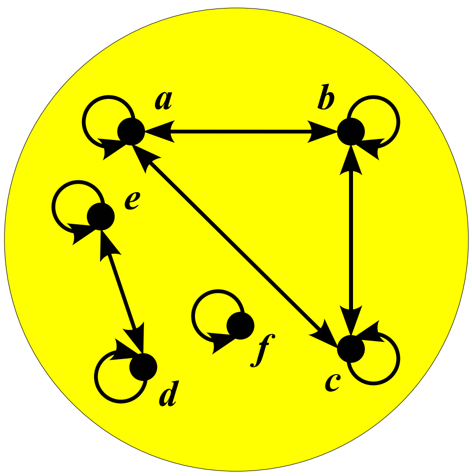
transitive : car si une première boule est de même couleur qu'une deuxième boule et que cette deuxième boule est de même couleur qu'une troisième boule, alors la première et la troisième boules sont de même couleur.

Il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de a est : $\dot{a} = \{a; b; c\}$ (qui est aussi la classe d'équivalence de b et de c) .
La classe d'équivalence de d est : $\dot{d} = \{d; e\}$ (qui est aussi la classe d'équivalence de e).
La classe d'équivalence de f est : $\dot{f} = \{f\}$.

L'ensemble quotient est donné par : $E/\mathscr{R} = \{\underbrace{\{a; b : c\}}_{\dot{a}}; \underbrace{\{d; e\}}_{\dot{d}}; \underbrace{\{f\}}_{\dot{f}}\}$.

On donne ci-dessous une représentation fléchée et un diagramme cartésien de cette relation.



f						x
e				x	x	
d				x	x	
c	x	x	x			
b	x	x	x			
a	x	x	x			
↖	a	b	c	d	e	f

Exemple 3

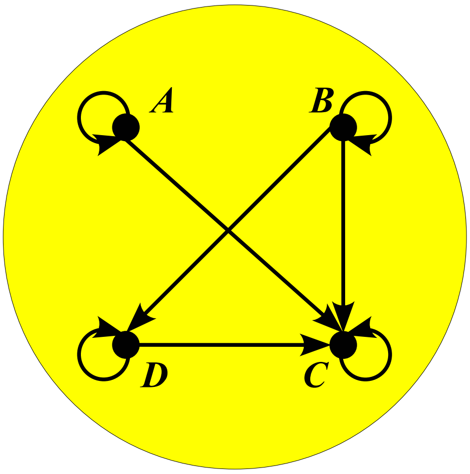
On donne les ensembles $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \{1; 2; 3; 4\}$ et $D = \{2; 3; 4\}$.
Soit alors l'ensemble $E = \{A; B; C; D\}$.
Dans E, on définit la relation $\mathscr{R}$:

$$X \mathscr{R} Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

On peut démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation réflexive, antisymétrique, transitive. Il s'agit donc d'une relation d'ordre.

Par contre, $\mathscr{R}$ n'est pas une relation connexe, car, par exemple, on n'a ni $A \mathscr{R} B$, ni $B \mathscr{R} A$.

On donne ci-dessous une représentation fléchée et un diagramme cartésien de cette relation.



D		X		X
C	X	X	X	X
B		X		
A	X			
	A	*B*	*C*	*D*

Exemple 4

Dans $\mathbb{Z}$, on envisage la relation :

$$\begin{aligned} x \mathscr{R} y \quad &\Leftrightarrow \quad x - y \text{ est un multiple de } 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x - y = 4k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cette relation est une relation d'équivalence car :

$\mathscr{R}$ est réflexive : $x \mathscr{R} x$
car $x - x = 0 = 4 \cdot 0$

$\mathscr{R}$ est symétrique : $x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$
car $x - y = 4k \Rightarrow y - x = 4 \cdot (-k) = 4k'$

$\mathscr{R}$ est transitive : $\left.\begin{array}{l} x \mathscr{R} y \\ y \mathscr{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow x \mathscr{R} z$
car $\left.\begin{array}{l} x - y = 4k \\ y - z = 4k' \end{array}\right\} \Rightarrow x - z = x - y + y - z = 4k + 4k' = 4k''$

Les 4 classes d'équivalence sont les suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= \{\ldots; -8; -4; 0; 4; 8; \ldots\} \\ C_1 &= \{\ldots; -7; -3; 1; 5; 9; \ldots\} \\ C_2 &= \{\ldots; -6; -2; 2; 6; 10; \ldots\} \\ C_3 &= \{\ldots; -5; -1; 3; 7; 11; \ldots\} \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble-quotient est donné par : $\mathbb{Z}/\mathscr{R} = \{C_0; C_1; C_2; C_3\}$.

13.8 Exercices

1) Enumérer les éléments des ensembles suivants :
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, n \leqslant 5\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x = 0\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 - 2 = 0\}$

2) Décrire les ensembles suivants en donnant une condition d'appartenance :
   a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
   b) $B = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$
   c) $C = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{17}; \frac{1}{26}\}$

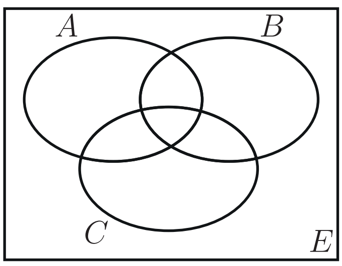
3) Les écritures suivantes sont-elles correctes ? Dans l'affirmative, les propositions sont-elles vraies ?
   a) $a \in \{a\}$ b) $\{a\} \subset \{a; b\}$ c) $a \subset \{a; b; c\}$
   d) $a \in \{b; c\}$ e) $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a; b\})$ f) $\{a\} \in \{\{a\}; \{a; b\}; \{b\}\}$

4) Trouver les ensembles A et B sachant que l'on a :
   a) $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$, $A \cap B = \{b; c; d\}$, $a \notin B \setminus A$ et $e \notin A \setminus B$,
   b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A \cap B = \{4; 6; 9\}$, $A \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$ et $B \cup \{2; 4; 8\} = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

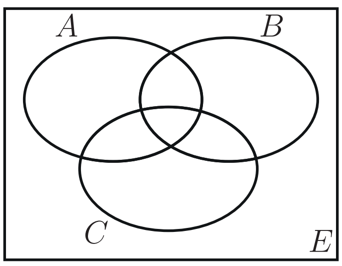
5) Simplifier les expressions suivantes dans lesquelles A, B et C sont des ensembles non vides.
   a) $A \cup (B \cup A)$ b) $A \cap (B \cup A)$ c) $(A \cup B) \cup (C \cup A)$
   d) $(A \setminus B) \cup A$ e) $(A \setminus B) \setminus B$ f) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

6) On donne les diagrammes de Venn des sous-ensembles d'un référentiel E. Griser les parties correspondantes aux opérations indiquées.
   a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$ c) $(A \triangle B) \setminus C$
   d) $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ e) $(A \setminus B) \triangle C$ f) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup C$
   g) $(A \cup B) \triangle (B \cup C)$ h) $(A \triangle C) \cap B$

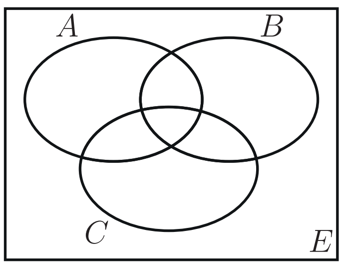
a)



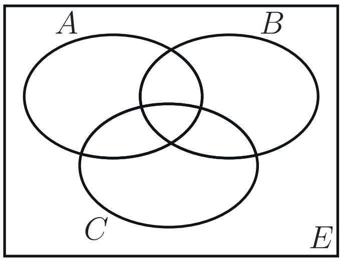
b)



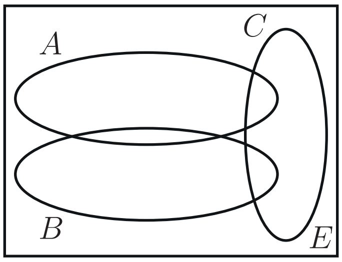
c)



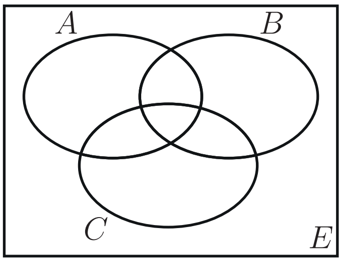
d)



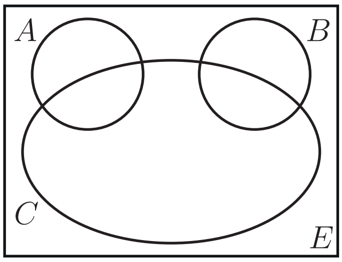
e)



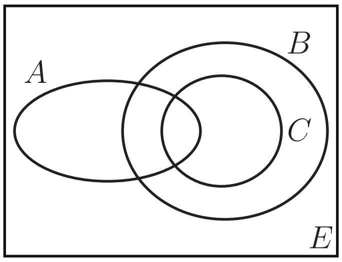
f)



g)

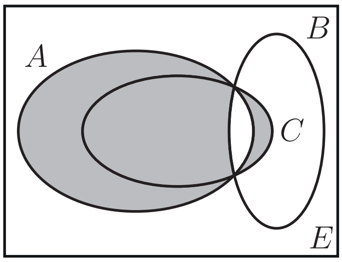


h)

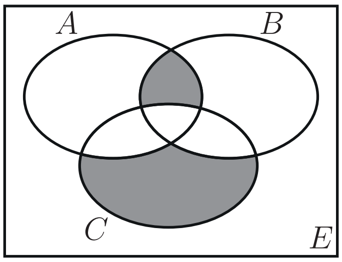


7) On considère les diagrammes de Venn ci-dessous. En utilisant uniquement les symboles $\cup$, $\cap$, $\setminus$ et $\triangle$, définir le plus simplement possible les ensembles grisés.

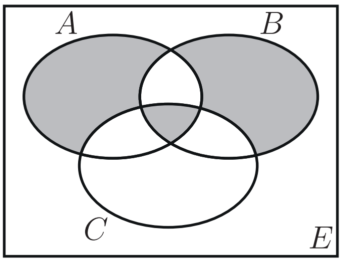
a)



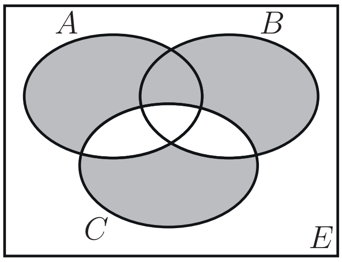
b)



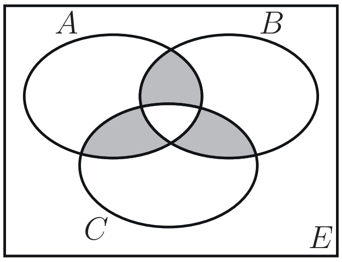
c)



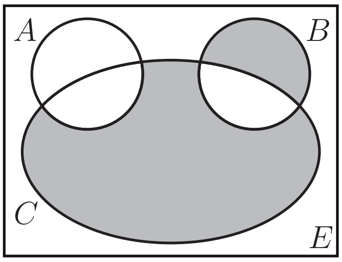
d)



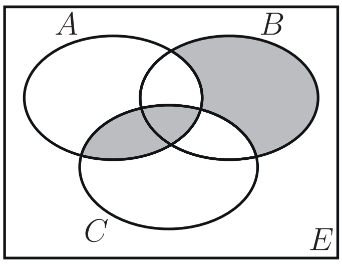
e)



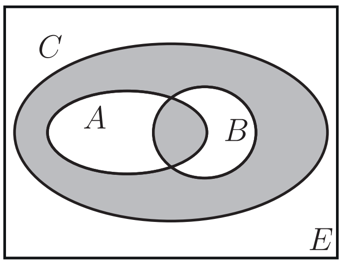
f)



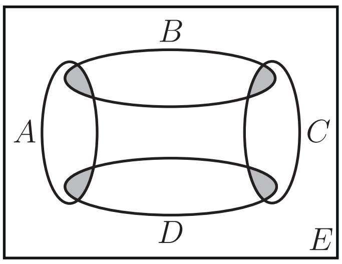
g)



h)



i)



8) Quels sont les ensembles $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1;2\})$, $\mathcal{P}(\{1;2;3;4\})$?

9) Soit A un ensemble contenant k éléments.
Combien $\mathcal{P}(A)$ en contient-il ?

10) Soit un ensemble E et deux ensembles A et B de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que :
   a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

11) Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles.
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leqslant x \leqslant 5\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leqslant x < 5\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 10\}$
   e) $E = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$
   f) $F = \mathbb{R}$
   g) $G = \{2\}$

12) On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I \setminus (J \cup K)$, $(I \setminus J) \cup (I \setminus K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3;4[$	$J = [-2;0[$	$K =]-5;3]$
b) $I =]-4;2]$	$J = [-2,3]$	$K =]-3;1[$
c) $I =]-5;3[$	$J =]-1;5]$	$K = [-3;4]$

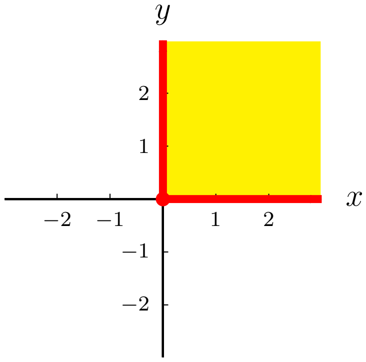
13) Dans une classe, on a recensé les élèves quant à leurs loisirs : musique, sport, ciné-club. On a obtenu les résultats suivants :
   a) 9 élèves font seulement du sport.
   b) 20 élèves font de la musique ou vont au ciné-club, éventuellement les deux.
   c) 6 élèves font du sport et vont au ciné-club.
   d) 18 élèves font du sport.
   e) 2 élèves participent aux trois activités.
   f) 7 élèves participent à deux activités exactement.
   g) 12 élèves ne font pas de sport.
   h) 19 élèves font soit de la musique, soit du sport, mais pas les deux.

   Trouver l'effectif de la classe, le nombre d'élèves qui font de la musique et le nombre d'élèves qui vont au ciné-club.

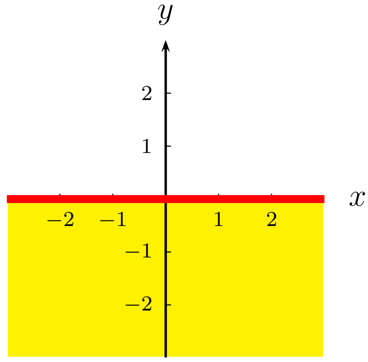
14) Représenter graphiquement les ensembles-produits suivants :
   a) $]-2;1[\times [0;1]$
   b) $\{-1;0;1\} \times]-2;2]$
   c) $]-1;2[\times \{0;1;2\}$
   d) $([-2;0] \cup \{1\}) \times]0;3[$
   e) $[-3;3[\times]-3;3]$
   f) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$
   g) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
   h) $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
   i) $\{0\} \times \mathbb{R}_-$
   j) $\mathbb{R} \times \{0;1\}$

15) On donne les représentations graphiques de sous-ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Indiquer les ensembles-produits ainsi représentés :

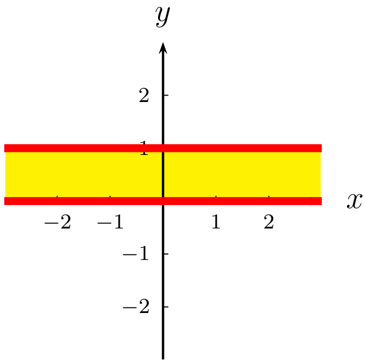
a)



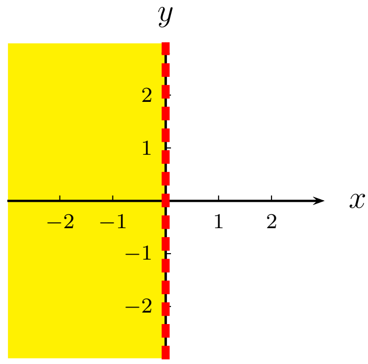
b)



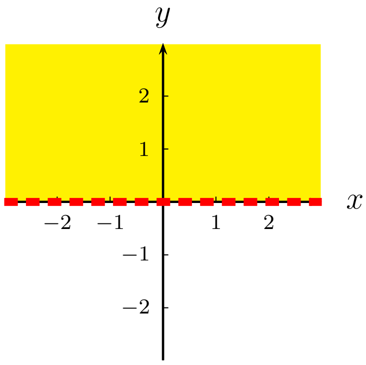
c)



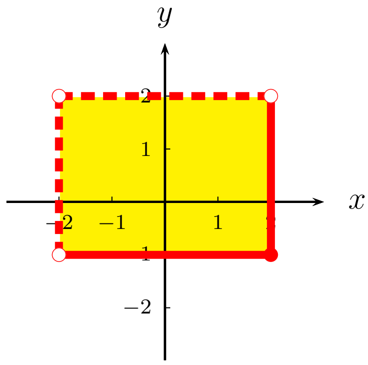
d)



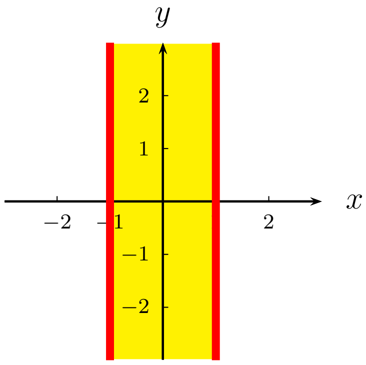
e)



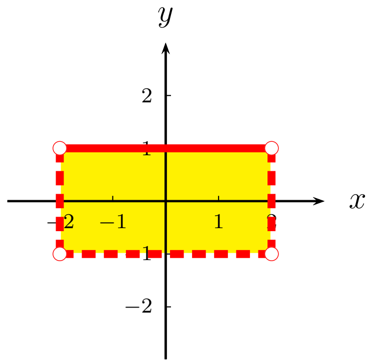
f)

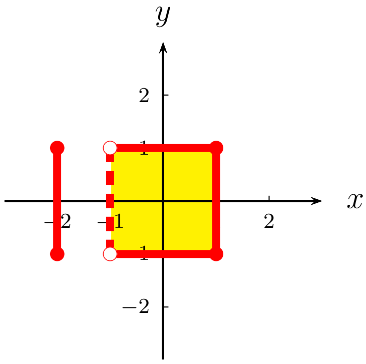


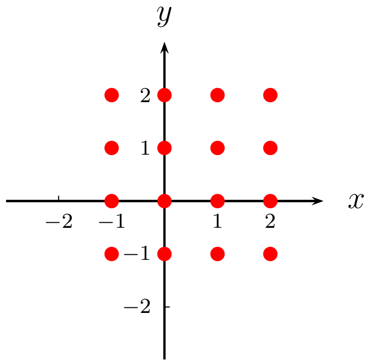
g)

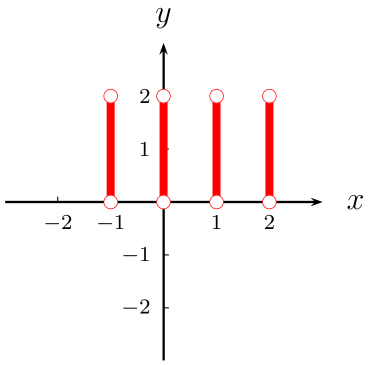


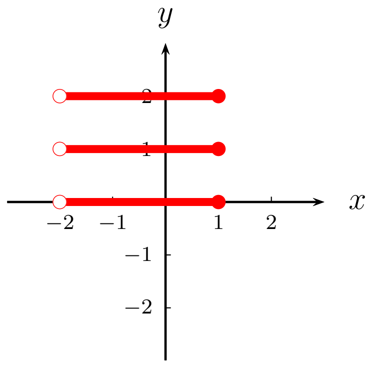
h)



i) 

j) 

k) 

l) 

16) On lance trois fois de suite un dé dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le résultat sous la forme d'un triplet $(x; y; z)$.

a) A quel ensemble-produit ce résultat appartient-il ?

b) Combien cet ensemble-produit a-t-il d'éléments ?

c) Parmi ces éléments, combien y en a-t-il pour lesquels x, y et z sont distincts ?

17) Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, transitives, antisymétriques, connexe ?

a) l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$

b) $xy \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$

c) $|x| \leqslant |y|$ dans $\mathbb{R}$

d) $x^2 + x = y^2 + y$ dans $\mathbb{Z}$

18) On considère l'ensemble D des points d'une droite horizontale. On définit dans D la relation g suivante :

$$x \, g \, y \Leftrightarrow (x \text{ est à gauche de } y \text{ ou } x = y)$$

Montrer que g définit un ordre total dans D.

19) Soit $E = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. On définit dans E une relation $\mathscr{R}$ par

$$x \, \mathscr{R} \, y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x + y = 0)$$

a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Faire une représentation fléchée de $\mathscr{R}$; représenter le graphe de $\mathscr{R}$.

c) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$.

20) Dans $\mathbb{Z}$, on envisage la relation $\mathscr{R}$:

$$a \,\mathscr{R}\, b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } n$$

avec $n \in \{2; 3; 4; \ldots\}$, dite relation de congruence modulo n, notée également $a \cong b \bmod (n)$.

Étudier cette relation pour $n = 5$ et $n = 6$.

21) Soit $E = \{-6; -3; 1; 5\}$ et la relation $\mathscr{R}$ définie dans E par

$$x \,\mathscr{R}\, y \Leftrightarrow x \text{ est un multiple de } y$$

a) Quels sont les couples de cette relation ?

b) Même question pour la réciproque.

22) Dans l'ensemble des points du plan, on envisage la relation

$$A \,\mathscr{R}\, B \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont à égale distance d'un point fixe } M \text{ du plan}$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

b) Quelles sont les classes d'équivalence ?

23) Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Dans $E \times E$, on définit la relation

$$(a; b) \,\mathscr{R}\, (c; d) \Leftrightarrow b - a = d - c$$

Étudier $\mathscr{R}$.

24) Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie dans $\mathbb{R}$ par

$$a \,\mathscr{R}\, b \Leftrightarrow a - b = k \cdot 2\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

25) Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$(a; b) \,\mathscr{R}\, (c; d) \Leftrightarrow ad = bc$$

13.9 Solutions des exercices

1) a) $A = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$
   b) $B = \{-1; 0\}$
   c) $C = \emptyset$

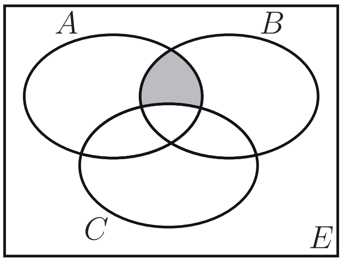
2) a) $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 9\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{R} | x = 3n + 1, n \in \mathbb{N} \text{ et } n < 7\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 6\}$

3) a) oui, oui b) oui, oui c) non, non
   d) oui, non e) oui, oui f) oui, oui

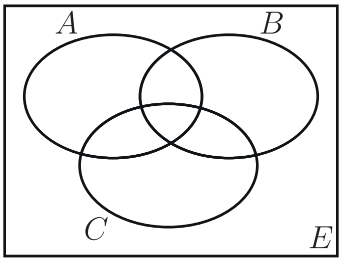
4) a) $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{b; c; d; e\}$
   b) $A = \{1, 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 4; 5; 6; 7; 9\}$

5) a) $A \cup B$ b) A c) $A \cup B \cup C$
   d) A e) $A \setminus B$ f) $\emptyset$

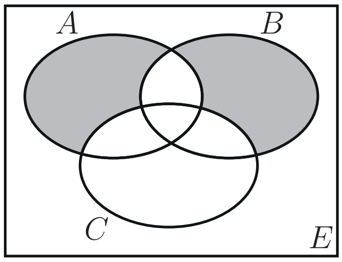
6) a)



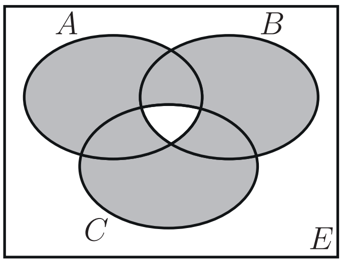
b)



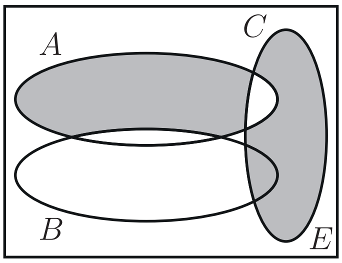
c)



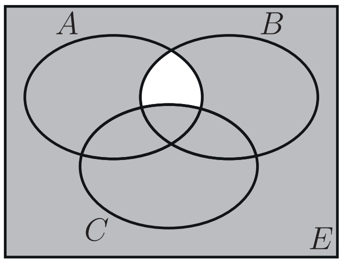
d)



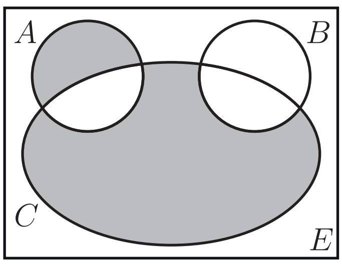
e)



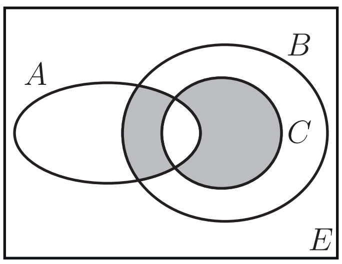
f)



g)



h)



7) a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$ b) $((A \cap B) \setminus C) \cup (C \setminus (A \cup B))$
   c) $(A \cap B \cap C) \cup ((A \triangle B) \setminus C)$ d) $(A \cup B) \triangle C$
   e) $(A \triangle (B \cap C)) \cap (B \cup C)$ f) $(C \setminus A) \triangle B$ g) $(A \cap C) \cup (B \setminus (A \cup C))$
   h) $C \setminus (A \triangle B)$ i) $(A \cup C) \cap (B \cup D)$

8) – $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
 – $\mathcal{P}(\{1;2\}) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}$
 – $\mathcal{P}(\{1;2;3;4\}) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1;2\}; \{1,3\}; \{1;4\}; \{2;3\}; \{2;4\}; \{3;4\};$
 $\{1;2;3\}; \{1;3;4\}; \{2;3;4\}; \{1;2;4\}; \{1;2;3;4\}\}$

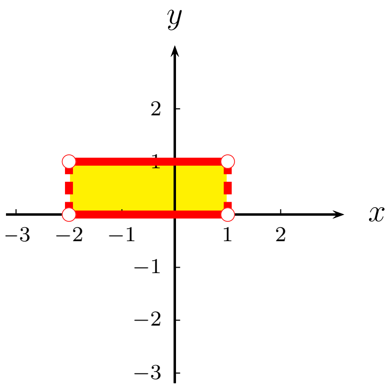
9) 2^k

11) a) $A = [-3;5]$ b) $B = [4;5[$ c) $C =]-\infty;1[$ d) $D = [10;+\infty[$
 e) $E = [-2;2]$ f) $F =]-\infty;+\infty[$ g) $G = [2;2]$

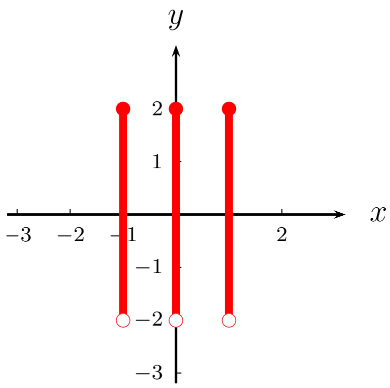
12) a) $[-2;0[$ $[-3;3]$ $]3;4[$ $[-3;-2[\bigcup[0;4[$
 b) $[-2;2]$ $]-3;1[$ $]-4;-3]$ $]-4;-2[\bigcup[1;2]$
 c) $]-1;3[$ $[-3;3[$ $]-5;-3[$ $]-5;-1]$

13) 30 ; 11 ; 11

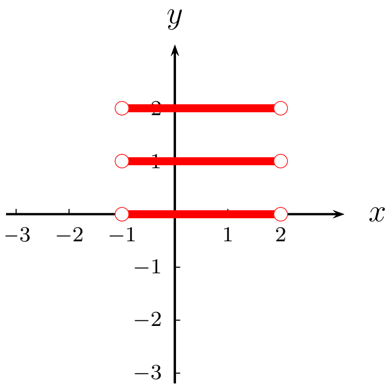
14) a)



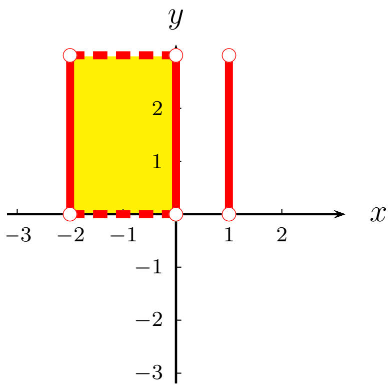
b)



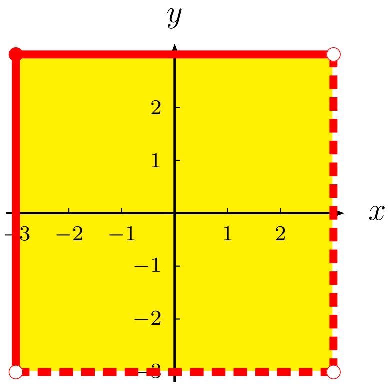
c)



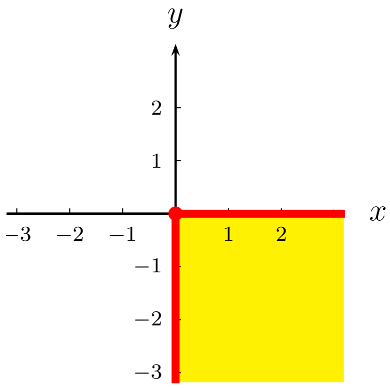
d)

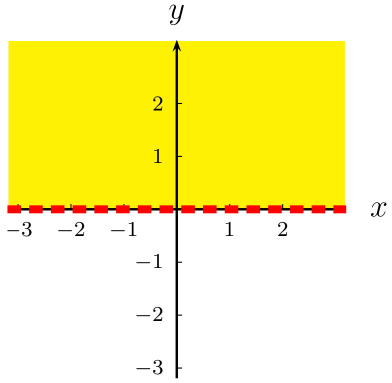


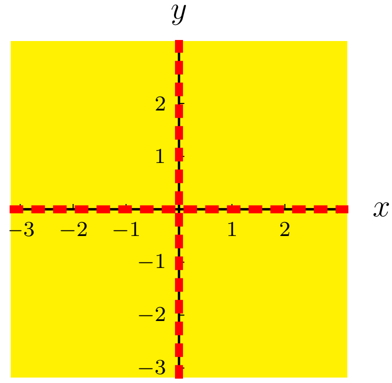
e)

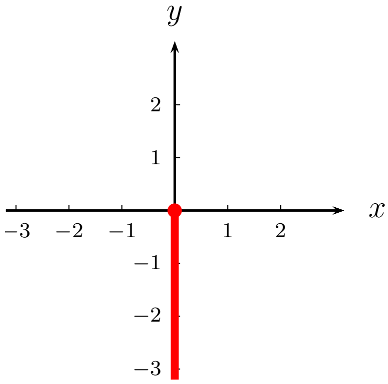


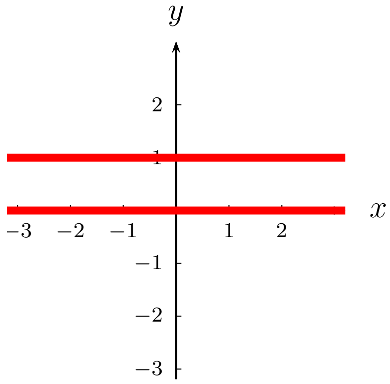
f)



g) 

h) 

i) 

j) 

15) a) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$
c) $\mathbb{R} \times [0;1]$
d) $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$
e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
f) $]-2;2] \times [-1;2[$
g) $[-1;1] \times \mathbb{R}$
h) $]-2;2[\times]-1;1]$
i) $(\{-2\} \cup]-1;1]) \times [-1;1]$
j) $\{-1;0;1;2\} \times \{-1;0;1;2\}$
k) $\{-1;0;1;2\} \times]0;2[$
l) $]-2;1] \times \{0;1;2\}$

16) a) $E \times E \times E$ avec $E = \{1;2;3,4;5;6\}$
b) $6^3 = 216$
c) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

17) a) oui, non, oui, oui, non
b) oui, oui, non, non, non
c) oui, non, oui, non, oui
d) oui, oui, oui, non, non

19) c) $\{-3;3\}$ $\{-2;2\}$ $\{-1;1\}$ $\{0\}$

20) Il s'agit d'une relation d'équivalence.

21) a) $(-6;-6), (-3;-3), (1;1), (5;5), (-6;-3), (-6;1), (-3;1), (5,1)$
b) $(-6;-6), (-3;-3), (1;1), (5;5), (-3;-6), (1;-6), (1;-3), (1,5)$

22) b) Des cercles de centre M.

23) $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

24) $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

25) $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Chapitre 14

Fonctions

14.1 Introduction

Le terme mathématique **fonction** apparaît à la fin du XVII^e siècle, quand le calcul différentiel et intégral en était aux premiers stades de son développement. Cet important concept est maintenant l'épine dorsale des cours de mathématiques et il est indispensable dans tous les domaines scientifiques.

Il y a fonction dès qu'une quantité dépend d'une autre. Voici quatre situations.

A. L'aire A d'un cercle dépend du rayon r de ce cercle. C'est l'équation $A = \pi r^2$ qui exprime la règle qui lie r et A. A chaque valeur positive de r est associée une valeur de A, on dit que A est une *fonction* de r.

B. La population mondiale P dépend du temps t. La table ci-dessous donne une estimation de cette population $P(t)$ au temps t, pour quelques années.

Année	Population (en millions)
1900	1'650
1910	1'750
1920	1'860
1930	2'070
1940	2'300
1950	2'560
1960	3'040
1970	3'710
1980	4'450
1990	5'280
2000	6'080

A l'aide de ce tableau, on peut, par exemple, dire que :

$$P(1950) \approx 2'560'000'000$$

Mais à chaque valeur de la variable t correspond une valeur de P et on dit que P est une fonction de t.

C. Le coût C d'affranchissement d'une lettre dépend de son poids p. Bien qu'il n'existe pas de formule simple qui lie C et p, le bureau postal dispose d'un tarif qui lui permet de déterminer C dès que p est connu.

D. A une station-essence, le prix f, en francs, que sera payé à la caisse par un automobiliste dépendra du nombre de litres x d'essence qu'il aura déversé dans le réservoir de sa voiture. Si le prix par litre est de 1,60 francs, le montant payé à la caisse sera simplement $f(x) = 1,6 \cdot x$. Cette relation donne le prix à payer en fonction du nombre de litres.

Chacun de ces exemples décrit une règle selon laquelle, à un nombre (r, t, p ou x) est associé un autre nombre (A, P, C ou f). Dans chaque cas, on dit que le deuxième nombre est une fonction du premier.

14.2 Définitions

Définition 14.1
Une **fonction** ou **application** d'un ensemble D dans un ensemble A est une correspondance qui *associe* à *chaque* élément de D *un et un seul* élément de A.

La fonction, qu'on nomme ici f, se note souvent :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

où D est appelé l'**ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée** de f.

L'élément $f(x)$ est la valeur de **f en x** et se lit "f de x". Cet élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.

Une formule permettant de calculer les images $f(x)$ est appelée **expression fonctionnelle** de f.

L'**ensemble image** par f est l'ensemble des images des éléments de l'ensemble de départ. On le note $f(D)$ ou $\mathrm{Im}(f)$.

Remarques

1. On utilise souvent la lettre x pour représenter une valeur quelconque de l'ensemble de départ de la fonction f. On appelle celle-ci la **variable** (ou variable indépendante) de la fonction.

   Pour désigner l'image, on utilise souvent la lettre y. On dit alors que y est fonction de x et on note plus généralement $y = f(x)$. Cela signifie qu'à droite du signe $=$, il n'y a qu'une variable appelée x.
2. Il faut bien comprendre que x et y ne sont que des symboles et rien ne nous empêche d'en utiliser d'autres. Par exemple, quand la variable est le temps, on utilise volontiers t au lieu de x.

Il est instructif de comparer une fonction à une espèce de **machine**. Lorsque x est une valeur de l'ensemble de départ de la fonction f, alors la machine l'accepte comme entrée et produit à la sortie $f(x)$, selon la règle qui définit la fonction. Dès lors, l'ensemble de départ peut être vu comme l'ensemble de toutes les entrées possibles de la machine et l'ensemble image, comme l'ensemble des sorties possibles.

Les fonctions préprogrammées des calculatrices illustrent fort bien la notion de fonction regardée comme une machine. Prenons l'exemple de la fonction activée par la touche racine carrée de votre calculatrice. Vous enfoncez la touche $\sqrt{x}$, puis vous entrez la valeur de x. Si $x < 0$, il n'appartient pas à l'ensemble de départ de la fonction (ou au domaine de définition de la fonction, *voir paragraphe 3*) et, de ce fait, ne sera pas accepté par la calculatrice, qui du reste vous enverra un message d'erreur. Par contre, si $x \geqslant 0$, la calculatrice affichera une valeur *approximative* de $\sqrt{x}$. La touche $\sqrt{x}$ de votre calculatrice n'est donc pas tout à fait la même chose que la fonction mathématique définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Exemples

1. *Considérons la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *donnée par l'expression fonctionnelle* $f(x) = x^2 + 5$.

   L'image de 3 *est* $f(3) = 3^2 + 5 = 14$.

   L'image de -2 *est* $f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$.

   L'ensemble image de f *est l'intervalle* $[5; +\infty[$.

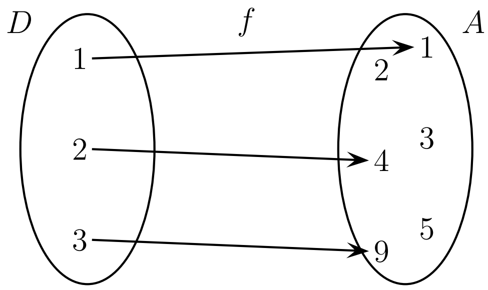
2. *Si l'on note* P *l'ensemble des polygones convexes et* p *un tel polygone, on peut considérer la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & P & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & p & \longmapsto & \text{somme des angles intérieurs exprimés en degrés} \end{array}$$

   On a ainsi : $f(\text{triangle}) = 180$, $f(\text{quadrilatère}) = 360$, $f(\text{pentagone}) = 540$.

   $\text{Im}(f) = \text{multiples de } 180 = \{x \in \mathbb{N} | x = 180k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

3. *Un* ***diagramme sagittal****, comme celui ci-dessous, est une bonne manière de représenter une fonction. Chaque flèche relie un élément de* D *à un élément de* A.



   L'image de 1 *est* 1*, celle de* 2 *est* 4*,* 9 *est l'image de* 3.

   Ensemble de départ : $D = \{1; 2; 3\}$.

   Ensemble d'arrivée : $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 9\}$.

   Ensemble image : $\text{Im}(f) = \{1; 4; 9\}$.

   Expression fonctionnelle : par exemple $f(x) = x^2$.

Définition 14.2
L'ensemble des couples $(x; f(x))$, où $x \in D$, est appelé le **graphe** de la fonction f.

Exemple

Pour la fonction de l'exemple 3 ci-dessus, le graphe est formé des couples $(1; 1)$, $(2; 4)$ *et* $(3; 9)$.

14.3 Fonctions réelles

Définition 14.3
Une **fonction réelle** (fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles) est une fonction de D vers $\mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemple

Un exemple de fonction réelle :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0;5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

L'image de 3 *est* $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$.

L'image de -2 *n'est pas définie car* -2 *n'est pas un élément de l'ensemble de départ.*

Si, pour une fonction, les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas précisés, on choisit $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée et le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possible comme ensemble de départ. Ce dernier est appelé **ensemble de définition** ou **domaine de définition** de la fonction. On le note $\mathcal{D}_f$ ou $D(f)$.

Exemple

L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ *est* $\mathcal{D}_f = [1; +\infty[$.

L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ *est, dans ce cas, l'ensemble des nombres réels tels que* $x - 1 \geqslant 0$*, puisque la fonction racine carrée n'est définie que pour des nombres positifs ou nuls.*

Définition 14.4
On appelle **zéros** d'une fonction f les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

Exemple

Le zéro de la fonction donnée par $f(x) = 2x - 5$ *est la solution de l'équation* $2x - 5 = 0$*. On trouve* $x = \frac{5}{2}$.

14.3.1 Représentation de fonctions réelles

Il existe trois façons principales de représenter une fonction réelle f. Nous allons les décrire succinctement.

1. Le tableau de valeurs

Le tableau de valeurs permet de donner quelques valeurs possibles de la variable x sur une ligne et les images, $f(x)$, correspondantes sur une deuxième ligne. Chacune des colonnes donne un des points du graphe (ensemble des couples $(x; f(x))$ où $x \in D$). Voici un tableau de valeurs représentant la fonction f.

x	-2	-1.5	-1	0	1	2	2.5	3	3.5	5
$f(x)$	-4	-1.75	0	2	2	0	-1.75	-4	-6.75	-18

Malheureusement, il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y sont inscrites.

2. La représentation graphique

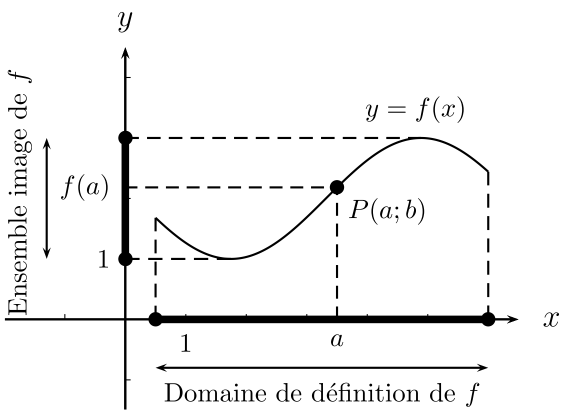
On peut également représenter le graphe d'une fonction dans le plan muni dun système d'axes.

Définition 14.5
La **représentation graphique** d'une fonction f est l'ensemble des points $(x; f(x))$ du plan Oxy avec $x \in \mathcal{D}_f$.

La représentation graphique d'une fonction est aussi appelé **graphe** de la fonction.

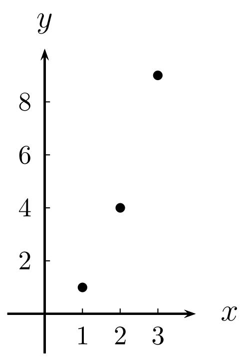
De manière équivalente, la représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points du plan $(x; y)$ qui vérifie l'équation $y = f(x)$ avec $x \in \mathcal{D}_f$. On ajoute souvent l'indication $y = f(x)$ qui donne l'équation de la **courbe** associée au graphe de la fonction.

Si $P(a; b)$ est un point de la représentation graphique, l'ordonnée b est donc la valeur $f(a)$ de f en a, comme le montre la figure ci-dessous. Cette dernière montre également le domaine de définition de f (l'ensemble des valeurs possibles de x) et l'ensemble image de f (les valeurs correspondantes de y). Bien que nous ayons dessiné le domaine de definition et l'ensemble image comme des intervalles fermés, ceux-ci peuvent être des intervalles infinis ou d'autres ensembles de nombres réels.

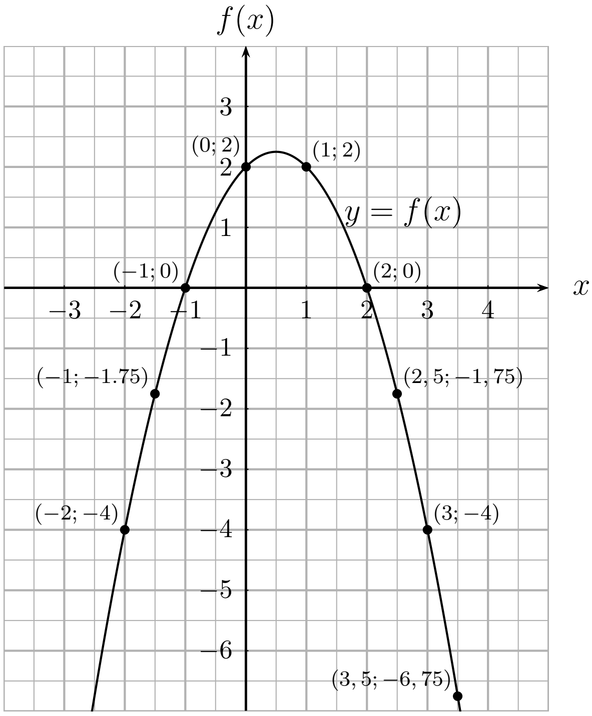


Exemple

Pour la fonction de l'exemple 3 de la page 253, le graphe est formé des trois points $(1; 1)$, $(2; 4)$ *et* $(3; 9)$.



Voici une représentation graphique de la fonction f. On décrira en détails, au point 4 de ce paragraphe, la manière de la dessiner.



Très pratique et relativement précise, la représentation graphique reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte pour $x < -3$ et $x > 4$.

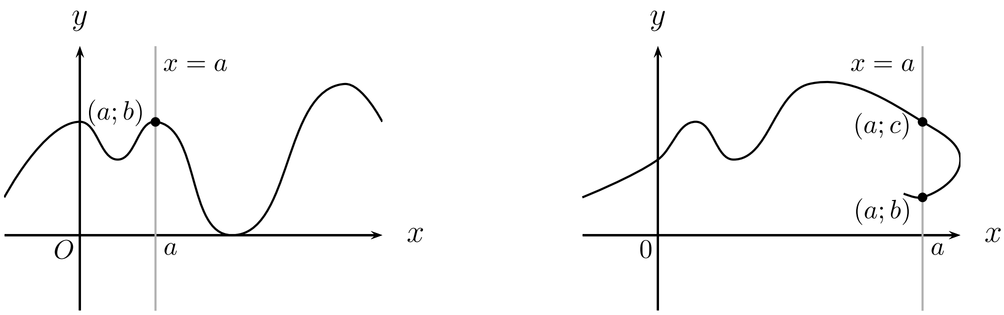
Lorsqu'on dessine le graphe d'une fonction, on s'arrange généralement pour montrer tout ce qui est intéressant (points de coupe avec les axes, points particuliers, ...).

Proposition 14.1
Les zéros d'une fonction f (x telles que $f(x) = 0$) sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox.

Le test de la droite verticale

Un courbe dans le plan Oxy est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si toute droite verticale la coupe en au plus un point.

La justification de ce test de la droite verticale se lit dans la figure ci-dessous. Si une droite verticale quelconque $x = a$ ne coupe une courbe qu'une fois, en $(a; b)$, alors une seule image b est associée à a par f. Si au contraire, une droite $x = a$ coupe une courbe deux fois, en $(a; b)$ et en $(a; c)$, alors cette courbe ne peut être la représentation d'une fonction car une fonction ne peut attribuer deux valeurs différentes à a.



3. L'expression mathématique

Voici l'expression mathématique de la fonction f :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = -x^2 + x + 2 \end{array}$$

L'expression mathématique est la meilleure façon de décrire une fonction, car en la connaissant on peut construire un tableau de valeurs et une représentation graphique. Alors que le contraire n'est pas possible (en tout cas pas de manière unique). L'expression mathématique contient **toute l'information** à propos de la fonction.

4. Dessin de la représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction donnée par :

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Marche à suivre pour dessiner la représentation graphique de la fonction f :

1. résoudre l'équation $f(x) = 0 \longrightarrow$ On obtient les n zéros de f : x_1, x_2,…,x_n (abscisses des points d'intersection du graphe de f et de Ox),

2. calculer l'ordonnée $y_1 = f(0) \longrightarrow$ ordonnée du point d'intersection du graphe de f et de Oy,

3. calculer quelques couples $(x; f(x))$ du graphe de f en choisissant des x dans $D \longrightarrow$ tableau de valeurs,

4. dessiner un repère Oxy dans le plan en indiquant sur chacun des axes l'échelle utilisée,

5. représenter dans le plan Oxy les points $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, …, $(x_n; 0)$; le point $(0; y_1)$ et les autres points $(x; y)$ (avec $y = f(x)$) associés aux couples du graphe de f calculés en 3,

6. relier "intelligemment" et "proprement" à main levé les points dessiner dans le plan Oxy (sauf si les points sont alignés $\longrightarrow$ utiliser la règle) de sorte à obtenir une courbe d'équation $y = f(x)$ qui représente la **fonction** f,

7. ajouter l'indication $y = f(x)$ au graphique.

Remarques

1) Il n'y a pas de règle au niveau du nombre de points du graphe de f à calculer pour pouvoir dessiner la représentation graphique de f. Il faut trouver un juste milieu entre trop peu (précision insuffisante) et trop (temps de calcul et de dessin trop important).
2) Si on n'a pas assez d'indication dans une région du plan pour dessiner la représentation graphique de f, on peut à tout moment calculer de nouveaux couples du graphe et dessiner les points correspondants de manière à affiner notre dessin.

Exemple

Nous allons considérer à nouveau la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = -x^2 + x + 2 \end{array}$$

et décrire la démarche qui permet de dessiner son graphe donné à la page 256.

On commence par résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{array}{rcl|l} -x^2 + x + 2 & = & 0 & \cdot(-1) \\ x^2 - x - 2 & = & 0 & \textit{factorisation} \\ (x+1)(x-2) & = & 0 & \end{array}$$

Les deux solutions de cette équation sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

On calcule $y_1 = f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$

On calcule quelques couples du graphe. Ceci à déjà été réalisé avec le tableau de valeur de la page 255.

On suit ensuite les points 4 à 6 de la démarche pour obtenir la représentation graphique donnée à la page 256.

14.3.2 Opérations sur les fonctions

Tout comme on associe deux nombres réels dans l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division, on peut assembler deux fonctions f et g pour former de nouvelles fonctions, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g.

La fonction somme $f + g$ est définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Le membre de droite n'a du sens que si $f(x)$ et $g(x)$ sont définies, autrement dit, si x appartient à la fois au domaine de f et de g.

Le signe + du membre de gauche désigne une addition de *fonctions* tandis que le signe + du membre de droite désigne une simple addition entre les *nombres réels* $f(x)$ et $g(x)$.

Définition 14.6
Soit f et g deux fonctions définies sur $D(f)$ et $D(g)$ (deux ensembles de nombres réels). Alors les fonctions $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g sont définies comme suit :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{domaine de définition : } D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{domaine de définition : } D(f - g) = D(f) \cap D(g)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{domaine de définition : } D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{domaine de déf. : } D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in D(f) \cap D(g) | g(x) \neq 0\}$$

14.4 Fonctions surjectives, injectives et bijectives

14.4.1 Fonctions surjectives

Définition 14.7
Une fonction f de D vers A est **surjective** si chaque élément de A est l'image d'AU MOINS un élément de D.

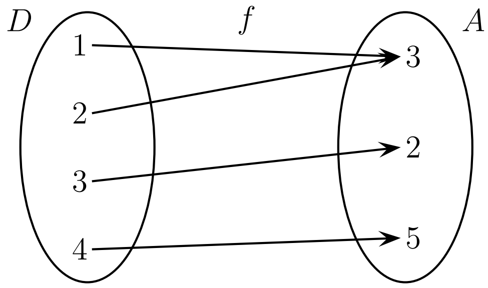
$$\boxed{f \text{ est surjective } \iff f(D) = A}$$

Autrement dit, pour tout $y \in A$, il existe (au moins) un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

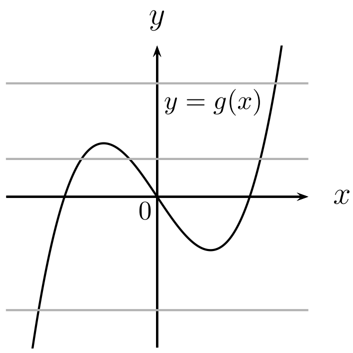
A l'inverse, f n'est pas surjective s'il existe un $y \in A$ qui n'est l'image d'aucun élément $x \in D$.

Exemples

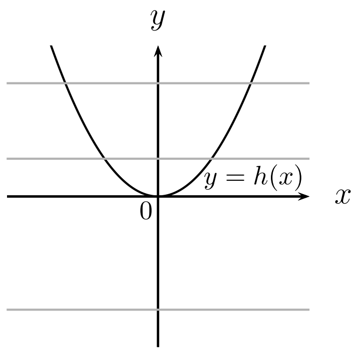
1. *La fonction f donnée par le diagramme sagittal ci-dessous est surjective car chaque élément de A "reçoit" au moins une flèche.*



2. *On considère les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ et $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. On donne leur représentation graphique ci-dessous. La fonction g est surjective, tandis que la fonction h n'est pas surjective car certaines valeurs de A (les nombres négatifs) ne sont pas l'image d'au moins un élément de D.*



surjective



non surjective

Test de la droite horizontale

Une fonction réelle est surjective si et seulement si toute droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe son graphe AU MOINS une fois.

14.4.2 Fonctions injectives

Définition 14.8
Une fonction f de D vers A est **injective** (est une injection) si chaque élément de A est l'image d'AU PLUS une élément de D.

Autrement dit, la fonction f est injective si les images de deux éléments distincts sont distinctes, quel que soit le choix de ces deux éléments. Mathématiquement, la condition suivante est vérifiée pour tout x_1, x_2 de D :

$$\boxed{x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

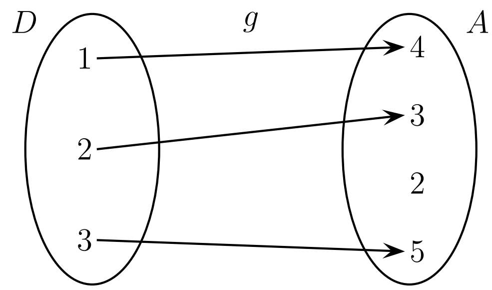
ou, ce qui revient au même :

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

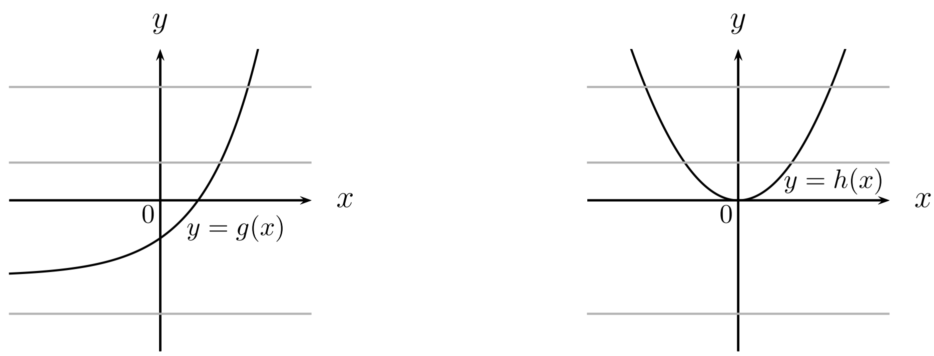
A l'inverse, f n'est pas injective s'il existe x_1 et x_2 dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

Exemples

1. *La fonction f donnée par le diagramme sagittal ci-dessous est injective car chaque élément de A "reçoit" au plus une flèche.*



2. *On considère les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $g(x) = 2^x - 2$ et $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. On donne leur représentation graphique ci-dessous. La fonction g est injective, tandis que la fonction h n'est pas injective car certaines valeurs de A (les nombres positifs) sont l'image de plus d'un élément de D.*



injective — *non injective*

Test de la droite horizontale

Une fonction réelle est injective si et seulement si toute droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe son graphe AU PLUS une fois.

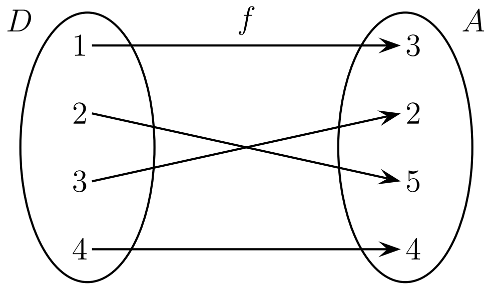
14.4.3 Fonctions bijectives

Définition 14.9
Une fonction de D vers A est **bijective** (est une bijection) si elle est à la fois surjective et injective.
Une bijection de D vers A vérifie donc la condition suivante :

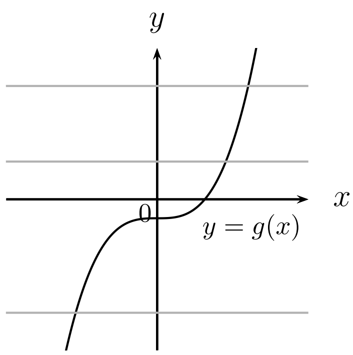
Chaque élément de A est l'image d'un élément de D exactement.

Exemples

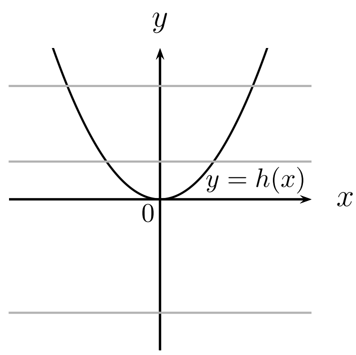
1. *La fonction f donnée par le diagramme sagittal ci-dessous est bijective car chaque élément de A "reçoit" exactement une flèche.*



2. *On considère les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ et $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. On donne leur représentation graphique ci-dessous. La fonction g est bijective, tandis que la fonction h n'est pas bijective car elle n'est ni injective, ni surjective (voir exemples précédents).*



bijective
(surjective et injective)



non bijective
(non surjective et non injective)

Test de la droite horizontale

Une fonction réelle est bijective si et seulement si toute droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe son graphe EXACTEMENT une fois.

14.4.4 Prouver l'injectivité et la surjectivité

On donne ci-dessous la manière la plus simple de montrer l'injectivité et la surjectivité d'une fonction.

1. Pour montrer qu'une fonction $f : D \to A$ est injective, on prend x_1 et x_2 QUELCONQUES dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.
2. Pour montrer qu'une fonction $f : D \to A$ est surjective, on prend y QUELCONQUE dans A et on cherche x dans D tel que $f(x) = y$.

Exemple

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x + 1$ est injective et surjective.

1. *Preuve de l'injectivité.*

   Soit x_1 et x_2 dans $D = \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. A montrer $x_1 = x_2$.

   $$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{définition de } f}{\Longrightarrow} 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \overset{-1}{\Longrightarrow} 2x_1 = 2x_2 \overset{:2}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

   Remarquons qu'ici, on n'a pas besoin du sens "$\Longleftarrow$".

2. *Preuve de la surjectivité.*

   Soit y dans $A = \mathbb{R}$. Il faut trouver x dans $D = \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

   $$f(x) = y \overset{\text{définition de } f}{\Longleftrightarrow} 2x + 1 = y \overset{-1}{\Longleftrightarrow} 2x = y - 1 \overset{:2}{\Longleftrightarrow} x = \frac{y-1}{2}$$

   Remarquons qu'ici, on a vraiment besoin du sens "$\Longleftarrow$".

14.5 Composition de fonctions

Le composition de fonctions est un façon de "mettre ensemble" deux fonctions pour en obtenir une nouvelle. Supposons, par exemple, que $y = g(u) = \sqrt{u}$ et $u = f(x) = x^2 + 1$. Comme y est une fonction de u et comme u est, à son tour, une fonction de x, il s'ensuit que y est finalement une fonction de x. Cette relation entre x et y se calcule par composition

$$y = g(u) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

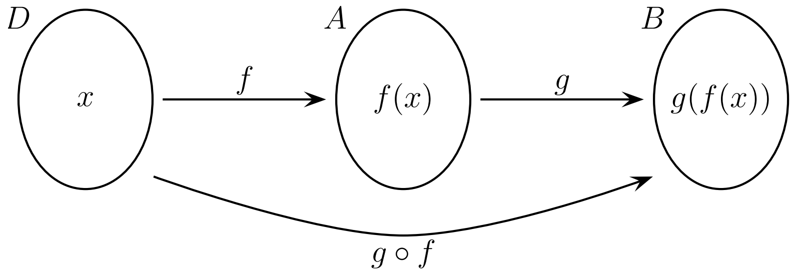
Cette opération s'appelle *composition* parce que la nouvelle fonction est *composée* des deux fonctions initiales f et g.

Définition 14.10
Si f est une fonction de D dans A et g une fonction de A dans B, on note $g \circ f$ la **fonction composée** de f et de g. La fonction $g \circ f$ fait correspondre à tout élément de D l'élément $y = g(f(x))$ de B.

On note $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ et on lit "g rond f de x".

$$\begin{array}{lcl} x & \overset{f}{\mapsto} f(x) \overset{g}{\mapsto} & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \\ x & \overset{g \circ f}{\longmapsto} & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{array}$$

On peut visualiser la fonction composée à l'aide d'un diagramme sagittal :



On peut interpréter ce diagramme de la manière suivante. Etant données deux fonction f et g, on part d'une valeur x dans l'ensemble de départ de f et on calcule son image $f(x)$. Puis, si le nombre $f(x)$ appartient à l'ensemble de départ de g, on peut calculer la valeur $g(f(x))$. Le résultat est une nouvelle fonction $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ obtenue en introduisant f dans g.

Attention à l'ordre des fonctions. Dans la fonction $g \circ f$, on effectue f en premier mais on note f en deuxième place car :
- on note les lettres f et g dans le même ordre que dans l'écriture $g(f(x))$,
- selon les règles de l'algèbre, pour calculer $g(f(x))$ on calcule d'abord la partie interne $f(x)$, donc on considère d'abord la fonction f.

Exemples

1. *On considère un ensemble : $D = A = B =$ ensemble de personnes, et deux fonctions $f(x) =$* père de x *et $g(x) =$* frère de x. *On a alors :*
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g($*père de* $x) =$ *frère du père de* $x =$ *oncle de* x
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f($*frère de* $x) =$ *père du frère de* $x =$ *père de* x
   - $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f($*père de* $x) =$ *père du père de* $x =$ *grand-père de* x
2. *On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 3$. Alors :*
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3.$
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2.$

Remarque

L'exemple ci-dessus montre clairement que, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 14.2
Soit trois fonctions :
- f une fonction de D vers A,
- g une fonction de A vers B,
- h une fonction de B vers C.

On a :

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

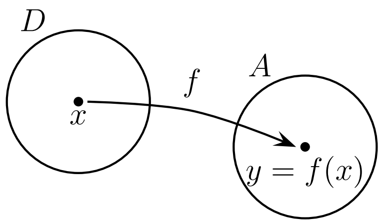
En particulier, la composition des fonctions d'un ensemble vers lui-même est associative.

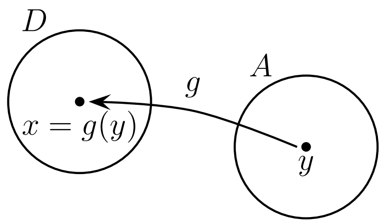
14.6 Fonctions réciproques

Les fonctions bijectives sont particulièrement importantes car ce sont justement celles qui possèdent une fonction réciproque, comme nous allons le voir.

Considérons une fonction bijective de D vers A. Alors, pour tout nombre $y \in A$, il y a EXACTEMENT un nombre $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Nous pouvons, par conséquent, définir une fonction g de A vers D qui fait correspondre x au nombre y.

En fait, pour représenter la fonction g dans un diagramme sagittal, il suffit d'inverser le sens des flèches.





$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & A & \longrightarrow & D \\ & y & \longmapsto & g(y) \end{array}$$

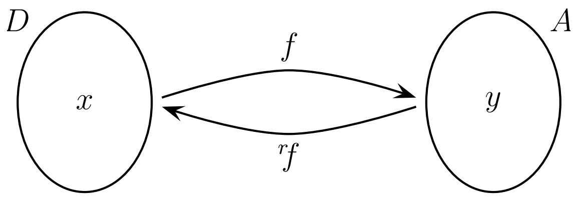
On appellera cette fonction g la fonction réciproque de f et on la notera ${}^r\!f$. Plus précisément :

Définition 14.11
Soit une fonction f bijective de D vers A. Alors, sa **fonction réciproque** a A comme ensemble de départ et D comme ensemble d'arrivée et est définie par

$$\boxed{{}^r\!f(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y}$$

quel que soit y dans A.

On peut visualiser la fonction réciproque à l'aide d'un diagramme sagittal :



Remarque

Il est à noter que :

$$\begin{array}{rcl} \text{ensemble de départ de } {}^r\!f & = & \text{ensemble d'arrivée de } f \\ \text{ensemble d'arrivée de } {}^r\!f & = & \text{ensemble de départ de } f \end{array}$$

Proposition 14.3
Soit $f : D \to A$ une fonction bijective et ${}^r\!f : A \to D$ sa fonction réciproque. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. On a ${}^r\!f(f(x)) = x$ pour tout $x \in D$.
2. On a $f({}^r\!f(y)) = y$ pour tout $y \in A$.

3. ^rf est bijective.

La première propriété (appelée équation d'annulation) dit que si on part de x et on lui applique f, puis ^rf au résultat, on revient au x d'où on était parti. En quelque sorte, ^rf défait ce qu'a fait f.

> ***Exemple***
>
> *Si $f(x) = x^3$, alors $^rf(x) = \sqrt[3]{x}$ est les équations d'annulation deviennent :*
>
> $$\begin{aligned} {^rf}(f(x)) &= \sqrt[3]{x^3} = x \\ f({^rf}(y)) &= (\sqrt[3]{y})^3 = y \end{aligned}$$

14.6.1 Calcul de la fonction réciproque

Si on a une fonction $y = f(x)$ et qu'on peut résoudre cette équation par rapport à x, alors, en accord avec la définition, on doit avoir $x = {^rf}(y)$. Si, maintenant, on désire désigner la variable indépendante par la lettre x (pour conserver la notation classique des fonctions), on échange x et y et on aboutit à l'équation $y = {^rf}(x)$.

En résumé, marche à suivre pour obtenir la réciproque d'une fonction bijective f :

1. Ecrire $y = f(x)$.

2. Résoudre (si possible) l'équation en x.

3. Echanger x et y afin d'exprimer ^rf comme une fonction de x.

L'équation finale est $y = {^rf}(x)$.

> ***Exemple***
>
> *On cherche à déterminer la réciproque de $f(x) = x^3 + 2$. On écrit d'abord :*
>
> $$y = x^3 + 2$$
>
> *Ensuite, on résout cette équation par rapport à x :*
>
> $$\begin{aligned} x^3 &= y - 2 \\ x &= \sqrt[3]{y-2} \end{aligned}$$
>
> *Enfin, on échange x et y :*
>
> $$y = \sqrt[3]{x-2}$$
>
> *La fonction réciproque cherchée est $^rf(x) = \sqrt[3]{x-2}$.*

14.6.2 Fonction réciproque et représentation graphique

Le fait qu'on doive échanger x et y pour obtenir la fonction réciproque intervient aussi quand il s'agit d'obtenir le graphique de ^rf à partir de celui de f. Puisque $f(a) = b$ si et seulement si $^rf(b) = a$, le point $(a; b)$ appartient au graphe de f si et seulement si le point $(b; a)$ appartient au graphe de ${}^r\!f$. Or les points $(a; b)$ et $(b; a)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice $y = x$ du premier quadrant.

Ainsi le graphe d'ne bijection f et de sa réciproque ${}^r\!f$ sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Proposition 14.4
Le graphe de ${}^r\!f$ s'obtient en prenant l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$ du graphe de f.

Exemple

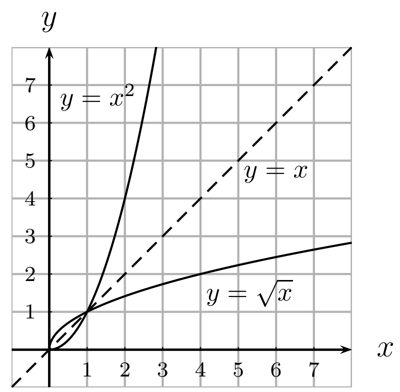
On considère la fonction bijective :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

En utilisant ce qui a été montré à l'exemple précédent, on peut déterminer que sa fonction réciproque est :

$$\begin{array}{rccc} {}^r\!f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Les représentations graphiques de ces deux fonctions sont données ci-dessous. On remarque bien la symétrie décrite précédemment.



14.7 Fonctions paires et fonctions impaires

Pour les deux définitions suivantes, on considère que les fonctions sont des fonctions réelles.

Définition 14.12
Soit une fonction réelle f de D $(\subset \mathbb{R})$ vers A $(\subset \mathbb{R})$. La fonction f est **paire** si deux nombres opposés ont toujours la même image par f.

$$f \text{ est } \textbf{paire} \iff \boxed{f(-x) = f(x)} \text{ pour tout } x \in D$$

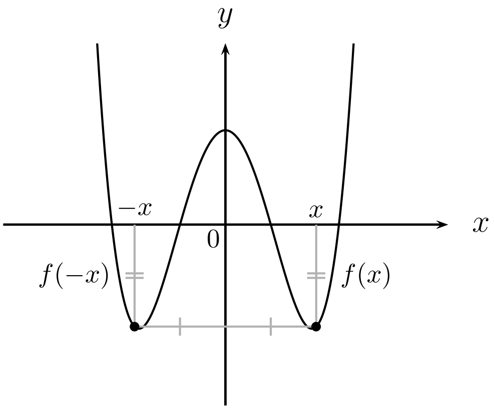
Remarque

Il est évident qu'une fonction f ne peut être paire que si son ensemble de départ D est centré à l'origine !

Exemple

La fonction $f(x) = 3x^2 - 1$, définie sur $\mathbb{R}$, est paire.
En effet, on a bien que $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x)$ quel que soit le nombre réel x.

Graphique d'une fonction paire



Graphiquement, la parité se traduit par une symétrie du graphique par rapport à l'axe Oy. En effet, si le point $(x; y)$ fait partie du graphe, alors le point $(-x; y)$ en fait également partie. Ce qui signifie qu'ayant déjà dessiné le graphe de f pour $x \geqslant 0$, on l'obtient tout entier en lui ajoutant simplement l'image symétrique par rapport à l'axe Oy.

Définition 14.13
Soit une fonction réelle f de D vers A. La fonction f est **impaire** si deux nombres opposés ont toujours des images opposées par f.

$$f \text{ est } \textbf{impaire} \iff \boxed{f(-x) = -f(x)} \text{ pour tout } x \in D$$

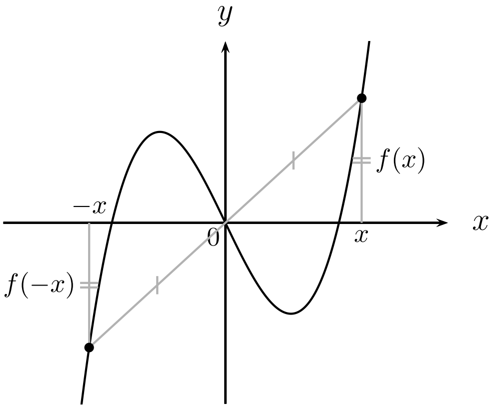
Remarque

Il est évident qu'une fonction f ne peut être impaire que si son ensemble de départ D est centré à l'origine !

Exemple

La fonction $f(x) = 2x^3 - 5x$, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire.
En effet, on a que :
– $f(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x$
– $-f(x) = -(2x^3 - 5x) = -2x^3 + 5x$
et donc que $f(-x) = -f(x)$ quel que soit le nombre réel x.

Graphique d'une fonction impaire



Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O des axes. En effet, si le point $(x; y)$ fait partie du graphe, alors le point $(-x; -y)$ en fait également partie. Ainsi, si on a déjà dessiné le graphe de f pour $x \geqslant 0$, on l'obtient tout entier en lui adjoignant simplement l'image obtenue après une rotation de 180° autour de l'origine.

Attention !

"Impair" n'est pas le contraire de "pair". La plupart du temps, une fonction n'est ni paire, ni impaire.

14.8 Fonction croissante et décroissante

Définition 14.14
Une fonction réelle f est **croissante** sur un intervalle I ($I \subset \mathcal{D}_f$) si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

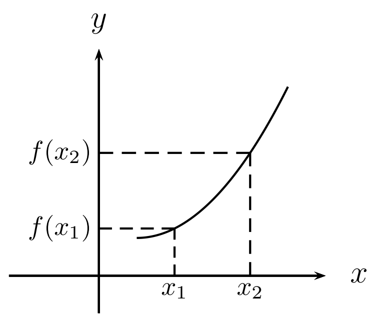
est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Une fonction réelle f est **strictement croissante** sur un intervalle I ($I \subset \mathcal{D}_f$) si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Illustration



Parcouru de gauche à droite, le graphe d'une fonction strictement croissante "monte".

Définition 14.15
Une fonction réelle f est **décroissante** sur un intervalle I ($I \subset \mathcal{D}_f$) si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

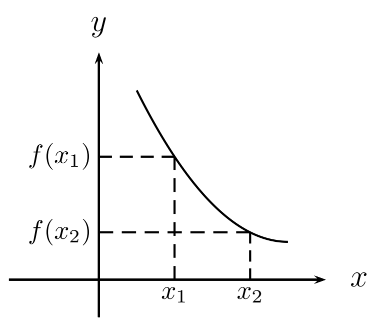
est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Une fonction réelle f est **strictement décroissante** sur un intervalle I ($I \subset \mathcal{D}_f$) si l'implication

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Illustration



Parcouru de gauche à droite, le graphe d'une fonction strictement décroissante "descend".

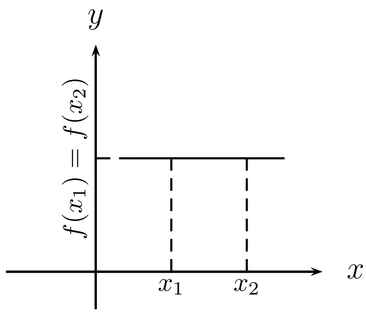
Définition 14.16

Une fonction réelle f est **constante** sur un intervalle I ($I \subset \mathcal{D}_f$) si l'égalité

$$f(x_1) = f(x_2)$$

est vraie pour tout x_1, x_2 dans I.

Illustration



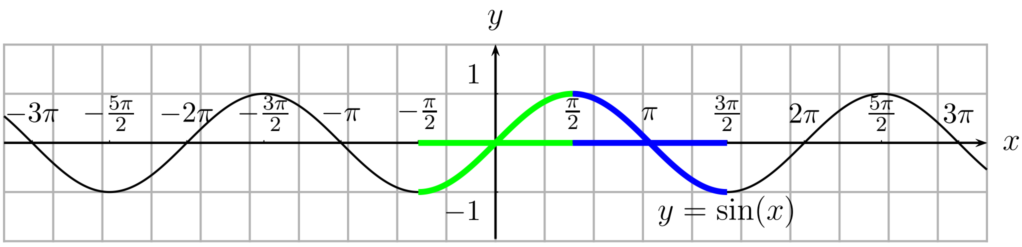
Parcouru de gauche à droite, le graphe d'une fonction constante est "plat".

Remarque

Les fonctions croissantes conservent l'ordre et les fonctions décroissantes inversent l'ordre.

Exemple

La fonction $f(x) = sin(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (partie verte de la représentation graphique) et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (partie bleue de la représentation graphique).



14.9 Exercices

1) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Donner :

a) $f(4)$	b) $f(3)$	c) $4f(x)$	d) $f(4x)$
e) $f(x+4)$	f) $f(4)+f(3)$	g) $f(-x)$	h) $-f(x)$

2) Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes.

a) $\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -2x+4 \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

d) $\begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$

3) On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de l'exercice précédent.
   a) Déterminer, à l'aide des représentations graphiques, si ces fonctions sont injectives ou surjectives.
   b) Pour chacune de ces fonctions, vérifier ou infirmer algébriquement (sans le graphe) si elles sont injectives ou surjectives.
   c) Indiquer quelles sont les fonctions qui sont bijectives.

4) Soit les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par leur expression fonctionnelle :

$$f(x) = \frac{x}{4}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad h(x) = 1 - x$$

Donner l'expression fonctionnelle de :

a) $g \circ f$	b) $h \circ g$	c) $h \circ (g \circ f)$	d) $(h \circ g) \circ f$

5) Donner le domaine de définition ainsi que l'expression fonctionnelle de $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 4$ $\qquad g(x) = x - 1$

b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

6) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression fonctionnelle $f(x) = (x+1)^2$. Trouver deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, différentes de l'identité, telles que $f = g \circ h$.

7) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression fonctionnelle $f(x) = (x^3+1)^2$. Trouver trois fonctions g_1, g_2 et g_3, différentes de l'identité, telles que $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$.

8) Soit les fonctions affines :

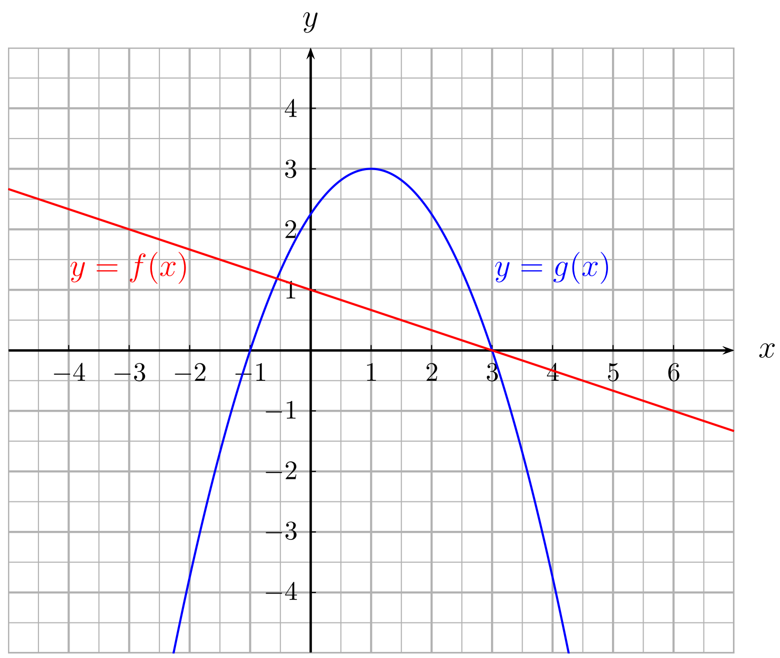
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x+3 \end{array}$$

Représenter, dans un même système de coordonnée et sur papier millimétré (en utilisant des couleurs différentes), les graphes de :

a) f b) g c) $f+g$ d) $f-g$

e) $f \cdot g$ f) $\dfrac{f}{g}$ g) $f \circ g$ h) ${}^r\!f$

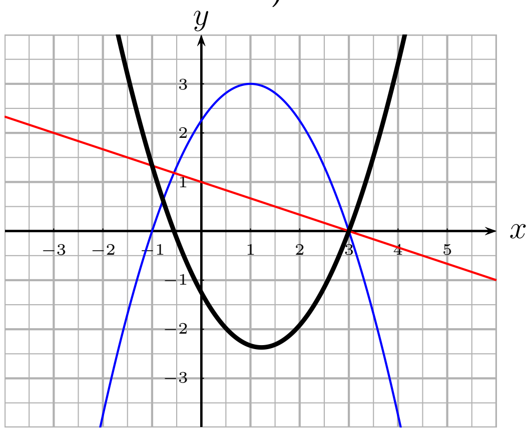
9) Soient les fonctions f et g données par leur représentation graphique :



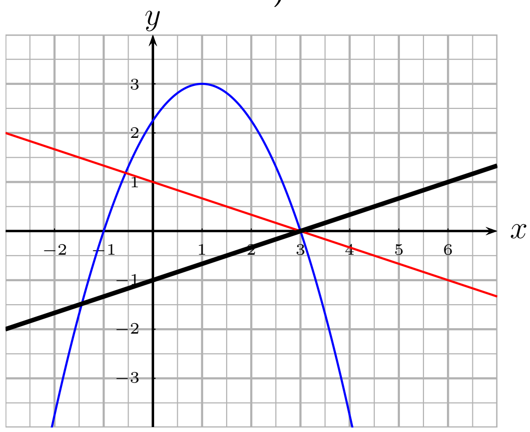
Associer dix des fonctions suivantes aux dix représentations graphiques qui suivent.

1. $h(x) = f(-x)$
2. $i(x) = -f(x)$
3. $j(x) = g(x+2)$
4. $k(x) = g(x) + 2$
5. $l(x) = f^2(x)$
6. $m(x) = g^2(x)$
7. $n(x) = (f \circ g)(x)$
8. $o(x) = (g \circ f)(x)$
9. $p(x) = (f+g)(x)$
10. $q(x) = (f-g)(x)$
11. $r(x) = (g-f)(x)$
12. $s(x) = (f \cdot g)(x)$
13. $t(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
14. $u(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$
15. $u(x) = {}^r\!f(x)$

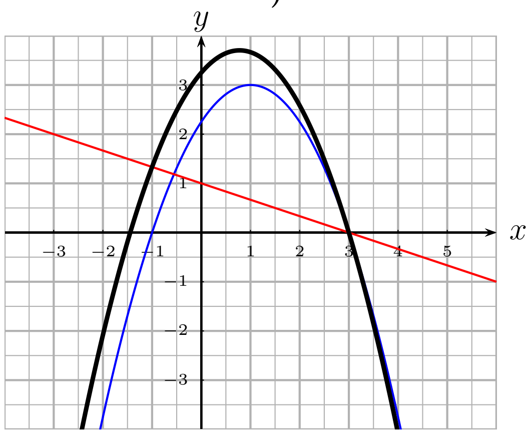
a)



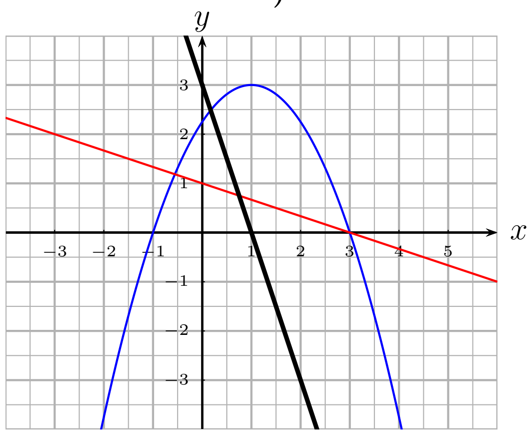
b)



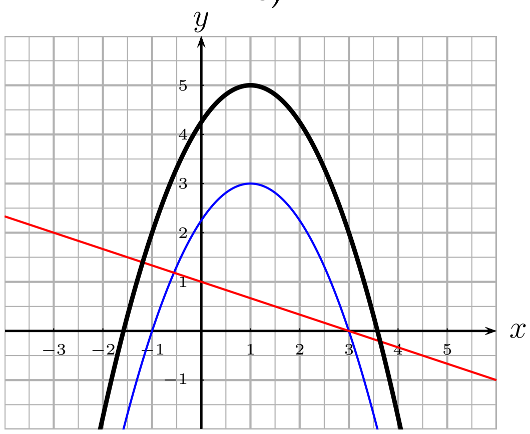
c)



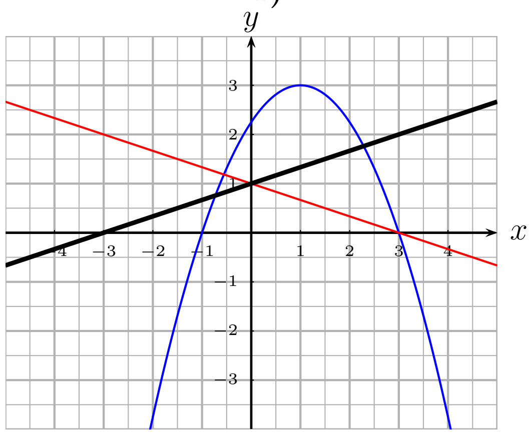
d)



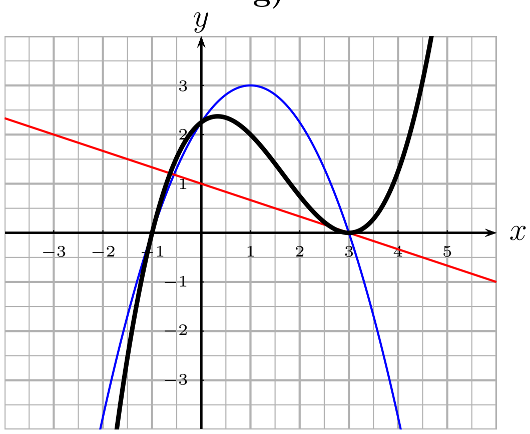
e)



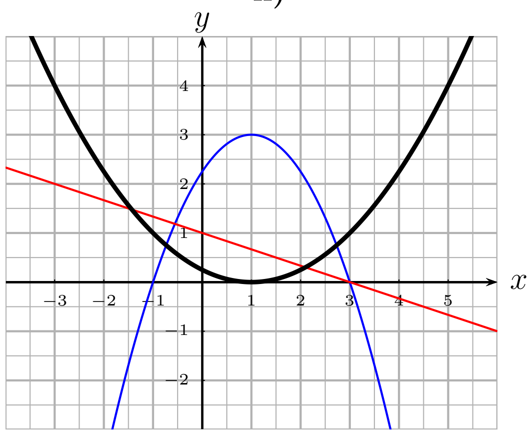
f)



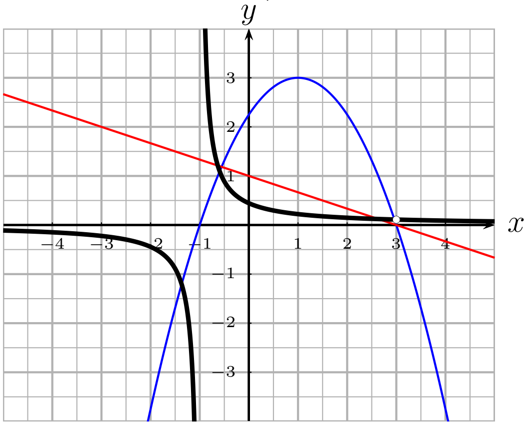
g)



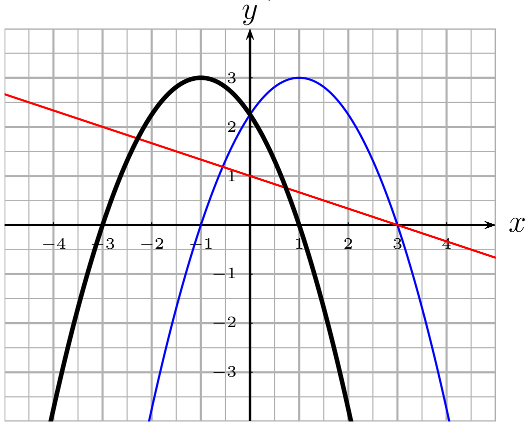
h)



i)



j)

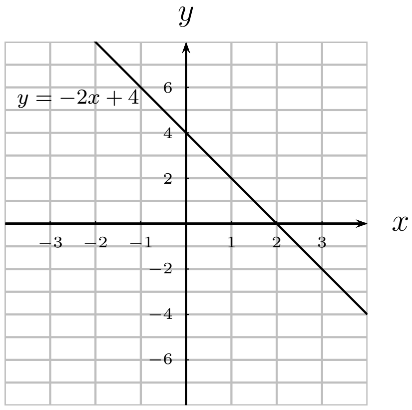


14.10 Solutions des exercices

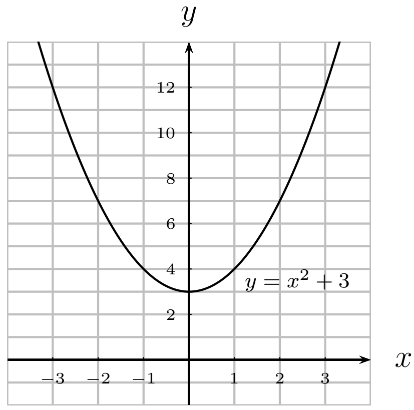
1) a) 1 b) Non définie c) $\dfrac{4}{x-3}$ d) $\dfrac{1}{4x-3}$

e) $\dfrac{1}{x+1}$ f) Non définie g) $-\dfrac{1}{x+3}$ h) $\dfrac{1}{3-x}$

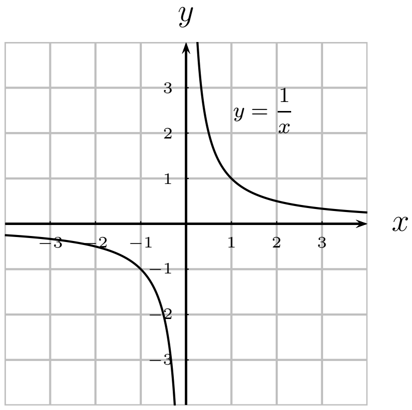
2) a)



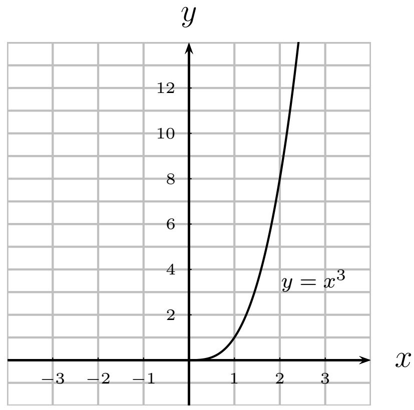
b)



c)



d)



3) – f_1 : injective, surjective, bijective.
- f_2 : non injective, non surjective, non bijective.
- f_3 : injective, non surjective, non bijective.
- f_4 : injective, non surjective, non bijective.

4) a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{16}{x^2+16}$ b) $(h \circ g)(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

c) $(h \circ (g \circ f))(x) = \dfrac{x^2}{x^2+16}$ d) $((h \circ g) \circ f)(x) = \dfrac{x^2}{x^2+16}$

5) a) $D(f \circ g) = \mathbb{R}$, $D(g \circ f) = \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 5$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 3$.

b) $D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$.

c) $D(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$, $D(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{1; \frac{3}{2}\}$, $(f \circ g)(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{x-1}{3-2x}$.

6) $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 1$.

7) $g_3(x) = x^3$, $g_2(x) = x + 1$, $g_1(x) = x^2$.

9) a) $q(x)$ b) $i(x)$ c) $p(x)$ d) $u(x)$
e) $k(x)$ f) $h(x)$ g) $s(x)$ h) $n(x)$
i) $t(x)$ j) $j(x)$

Chapitre 15

Fonctions affines

15.1 Définition

Définition 15.1
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = mx + h \end{array}$$

où m et h sont des nombres réels, est appelée **fonction affine**.

> ***Exemple***
>
> *La fonction $C(x)$ qui permet de convertir des degrés Fahrenheit, exprimés à l'aide de la variable x, en degré Celsius :*
>
> $$C(x) = \frac{5}{9} \cdot x - \frac{160}{9}$$
>
> *est une fonction affine où $m = \frac{5}{9}$ et $h = -\frac{160}{9}$.*

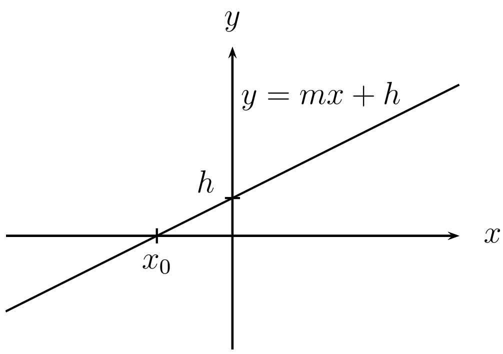
15.2 Représentations graphiques

La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction affine définie par $f(x) = mx + h$ est une droite passant par le point $(0; h)$ et dont l'inclinaison dépend du paramètre m.

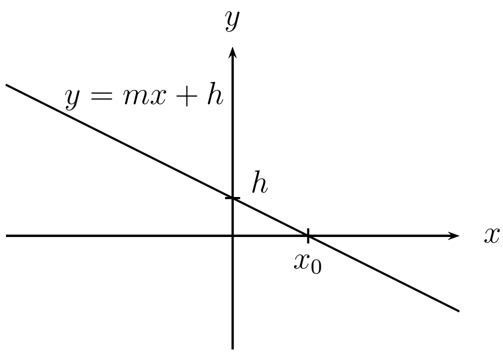
Définition 15.2
Le coefficient
– m est appelé la **pente** de la droite.
– h est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions affines avec une pente m positive, à gauche, ou négative, à droite.

$\boxed{\mathbf{m > 0}}$



$\boxed{\mathbf{m < 0}}$



15.2.1 Quelques caractéristiques de la représentation graphique

Zéro de la fonction

L'abscisse x_0 du point d'intersection de la droite représentant la fonction $f(x) = mx + h$ et de l'axe Ox est le zéro de f : $x_0 = -\frac{h}{m}$.

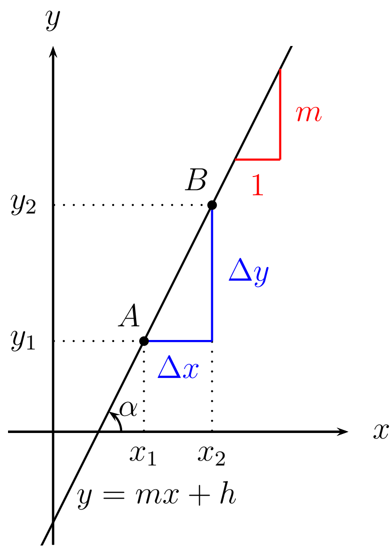
Pente de la droite

On rencontre parfois un panneau de circulation signalant une montée ou une descente importante. Par exemple, le panneau ci-contre signale une montée dont la pente est de 10%. Cela signifie que l'on monte verticalement de 10 mètres pour un déplacement de 100 mètres.

La notion mathématique de pente d'une droite est la même. Elle est exprimée par le rapport $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement selon l'axe Ox et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe Oy. On l'exprime généralement par un nombre sans unité et pas en %.

Méthode de calcul de la pente
On choisit arbitrairement **deux points** $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ sur la représentation graphique de la droite dont on désire déterminer la pente. On détermine ensuite la **différence** des abscisses des deux points, $\Delta x = x_2 - x_1$, et la différence des ordonnées, $\Delta y = y_2 - y_1$. La pente est alors donnée par le **quotient** :

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{15.1}$$



Ce quotient est indépendant du choix de A et B.

L'angle α entre l'axe Ox et la droite peut facilement être déterminé à l'aide de la pente et de l'égalité :

$$\tan(\alpha) = m$$

Cette égalité découle directement de la définition de la pente et de la définition de la tangente dans un triangle rectangle.

La pente m d'une fonction affine $f(x) = mx + h$ détermine donc l'inclinaison de la droite d'équation $y = mx + h$ et la croissance ou la décroissance de f :
- si la pente est *positive* ($m > 0$), la fonction affine est **croissante**.
- si la pente est *négative* ($m < 0$), la fonction affine est **décroissante**.

En résumé : sur la représentation graphique, lorsqu'on se déplace de 1 horizontalement dans la direction de l'axe Ox, on *monte* d'une hauteur égale à m selon l'axe Oy si m est positif, ou on *descend* d'une hauteur égale à $|m|$ si m est négatif.

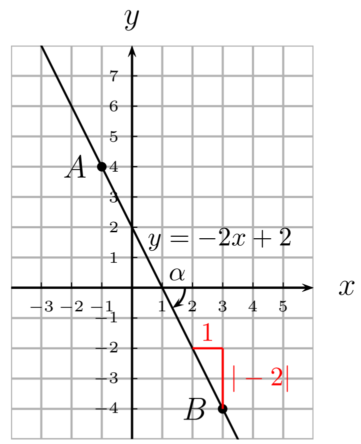
Exemple

On a représenté ci-contre la fonction affine $f(x) = -2x + 2$. Par définition, la pente de la droite représentant f est égale à -2 et l'ordonnée à l'origine à 2.

L'abscisse du point d'intersection entre la droite et l'axe Ox est donnée par : $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$.

On peut vérifier que la pente de la droite est égale à -2. On choisit, par exemple, les points $A(-1;4)$ et $B(3;-4)$ et on obtient, par la formule (15.1), que :

$$m = \frac{-4-4}{3-(-1)} = -2$$



L'angle entre l'axe Ox et la droite vaut : $\alpha = \arctan(-2) = -63,43°$.

15.2.2 Représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour dessiner, dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction affine définie par $f(x) = mx + h$.

Méthode

1. Choisir deux valeurs x_1 et x_2.
2. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
3. Reporter dans le repère cartésien les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ puis tracer la droite passant par ces deux points.

Exemple

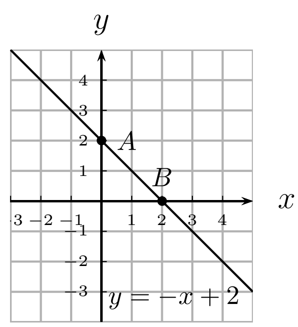
Soit la fonction affine $f(x) = -x + 2$.

On choisit arbitrairement $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -1 \cdot x_1 + 2 = -1 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f(x_2) &= -1 \cdot x_2 + 2 = -1 \cdot 2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

La droite passe donc par les points $A(0;2)$ et $B(2;0)$.
On obtient alors la représentation graphique ci-contre.



15.2.3 Expression fonctionnelle à partir de la représentation graphique

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction affine f à partir de sa représentation graphique ou, plus exactement, à partir de deux points de son graphe.

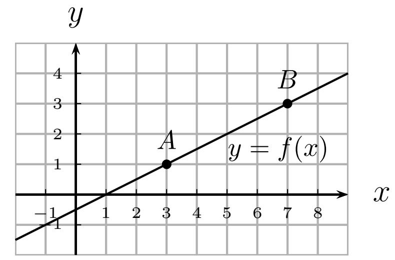
On sait que la fonction affine f est de la forme $f(x) = mx + h$. Pour obtenir l'expression fonctionnelle de f, on doit donc déterminer les coefficients m et h.

Méthode

1. Choisir deux points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ du graphe de f.
2. Calculer la pente m en utilisant la formule (15.1).
3. Déterminer h en résolvant l'équation à une inconnue $y_1 = m \cdot x_1 + h$.

Exemple

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction affine f.



Les points $A(3; 1)$ et $B(7; 3)$ appartiennent au graphe de f.
La pente de la droite est donnée par : $m = \dfrac{3-1}{7-3} = \dfrac{1}{2}$.
Comme $A(3; 1)$ est un point du graphe, h est la solution de l'équation : $1 = \frac{1}{2} \cdot 3 + h$.
En résolvant cette dernière, on trouve $h = -\frac{1}{2}$.
L'expression fonctionnelle de f est donc : $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2}$.

15.2.4 Intersection des graphes de deux fonctions affines

Soit deux fonctions affines $f(x)$ et $g(x)$. Pour déterminer l'intersection des graphes de ces deux fonctions, on peut mettre en oeuvre la méthode suivante.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ à une inconnue x. La solution x_0 de cette équation correspond à l'abscisse du point d'intersection I des graphes de f et de g.
2. Calculer $y_0 = f(x_0)$ $(= g(x_0))$, l'ordonnée du point d'intersection.

Cette méthode permet ainsi de déterminer complètement le point d'intersection $I(x_0; y_0)$.

On a supposé ci-dessus que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une seule solution. En "réalité", cette équation possède :

– **une unique** solution si les droites représentant les graphes de f et g sont **sécantes** (un seul point d'intersection) ;
– **aucune** solution si ces deux droites sont **parallèles** (aucun point d'intersection) ;
– **une infinité** de solutions si ces deux droites sont **confondues** (infinité de points d'intersection).

Remarques

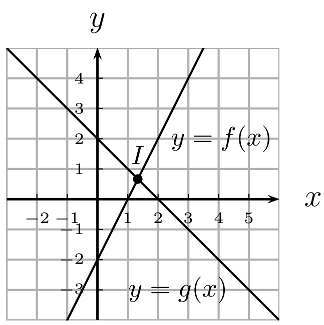
1. La méthode de résolution proposée ci-dessus est équivalente à la méthode qui consisterait à résoudre le système de deux équations à deux inconnues x et y suivant :

$$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= g(x) \end{cases}$$

2. On peut également appliquer la méthode proposée ci-dessus pour déterminer le ou les points d'intersection des graphes de deux fonctions réels f et g, même si ces dernières ne sont pas affines.

Exemple

Les graphes des fonctions $f(x) = 2x - 2$ et $g(x) = -x + 2$ sont donnés ci-dessous.



Ces graphes se coupent en un point I.
L'abscisse de ce point est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= -x + 2 \\ 3x &= 4 \\ x_0 &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'ordonnée de I est alors l'image de $\frac{4}{3}$ par f ou g : $y_0 = f(\frac{4}{3}) = 2 \cdot \frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}$.
On obtient finalement le point : $I(\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$.

15.3 Fonction linéaire

Définition 15.3
La fonction définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = mx \end{aligned}$$

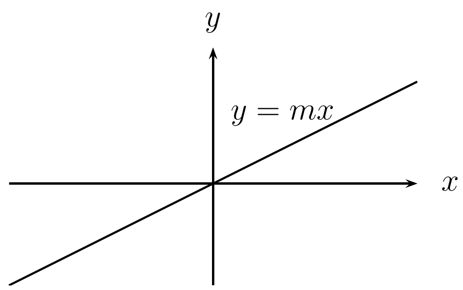
où m est un nombre réel, est appelée **fonction linéaire**.

Remarque

Une fonction linéaire est une fonction affine particulière où l'ordonnée à l'origine vaut 0.

La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction linéaire définie par $f(x) = mx$ est une droite passant par l'*origine* et dont l'inclinaison dépend du paramètre m.

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction linéaire avec une pente m positive.



Exemple

On suppose qu'un litre d'essence coûte 1.70 *francs. Le prix à payer pour une quantité de* x *litres d'essence est donné par la fonction linéaire suivante :*

$$p(x) = 1.7 \cdot x$$

Proposition 15.1
Soit une fonction linéaire f et $x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$. Les égalités suivantes sont alors satisfaites :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{1}. & f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \\ \textbf{2}. & f(\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot f(x_1) \end{array}}$$

Démonstration. Soit une fonction affine $f(x) = mx$ et $x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$.

1. **A voir :** $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

   Comme $f(x) = m \cdot x$, on a, d'après la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$f(x_1 + x_2) = m \cdot (x_1 + x_2) = (m \cdot x_1) + (m \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

2. **A voir :** $f(\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot f(x_1)$

   Comme $f(x) = m \cdot x$, on a, d'après l'associativité et la commutativité de la multiplication :

$$f(\lambda \cdot x_1) = m \cdot (\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot (m \cdot x_1) = \lambda \cdot f(x_1)$$

□

Remarque

Attention, ces propriétés sont souvent utilisées à tort pour des fonctions qui ne sont pas linéaires. Par exemple, on voit souvent les erreurs suivantes : $\sin(3x) = 3\sin(x)$ ou $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
Ces propriétés ne doivent être utilisées que pour des fonctions linéaires !

15.4 Fonctions constantes

Définition 15.4
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = h \end{array}$$

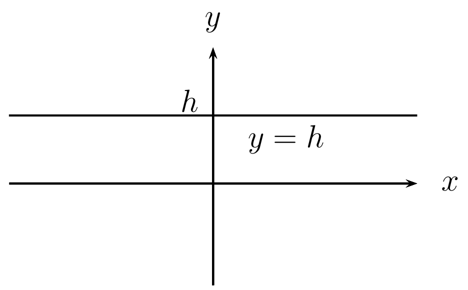
où h est un nombre réel, est appelée **fonction constante**.

Remarque

Une fonction linéaire est une fonction affine particulière où la pente vaut 0.

La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction affine définie par $f(x) = h$ est une droite horizontale passant par le point $(0; h)$.

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction constante avec une ordonnée à l'origine h positive.



Exemple

On suppose qu'un opérateur de téléphonie facture 0.70 *francs la communication à ses clients. Le prix à payer à cet opérateur pour une communication de t minutes est donnée par la fonction constante suivante :*

$$p(t) = 0.7$$

Chapitre 16

Fonctions quadratiques

16.1 Définition

Définition 16.1
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = ax^2 + bx + c \end{array}$$

où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est appelée **fonction quadratique** ou **fonction du deuxième degré**.

Exemple

Un corps en chute libre, lâché avec une vitesse initiale égale à 2 $[m/s]$, parcourt en t secondes la distance $s(t)$ donnée en mètre par

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + 2t$$

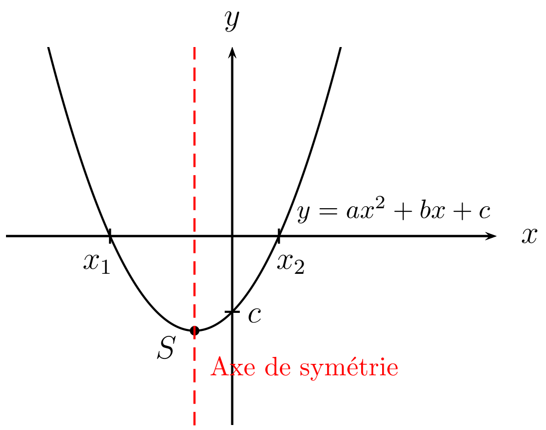
où $g \cong 9.81$ $[m/s^2]$, l'accélération terrestre.
La fonction $s(t)$ est une fonction quadratique où $a = \frac{g}{2}$, $b = 2$ et $c = 0$.

16.2 Représentations graphiques

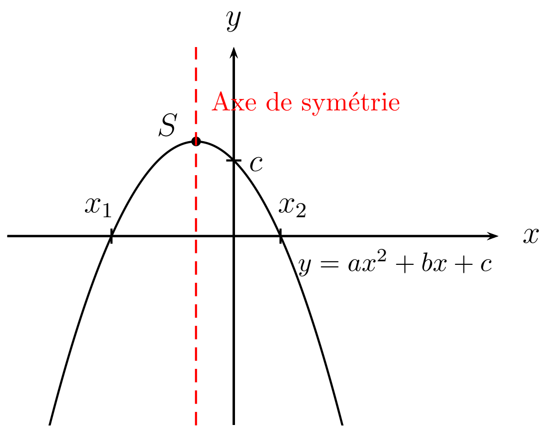
La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction quadratique définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole** passant par le point $(0; c)$ et dont l'orientation dépend du paramètre a.

On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions quadratiques avec un coefficient a positif, à gauche, ou négatif, à droite.

$\boxed{\mathbf{a > 0}}$



$\boxed{\mathbf{a < 0}}$



16.2.1 Quelques caractéristiques de la représentation graphique

Zéro(s) de la fonction

La ou les abscisses x_1 et x_2 du ou des points d'intersection de la parabole représentant la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et de l'axe Ox sont les zéros de f.

Le nombre de zéros et donc de points de coupe avec l'axe Ox est donné par le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: f possède 2 zéros (2 points de coupe) ;
- si $\Delta = 0$: f possède 1 zéro (1 point de coupe) ;
- si $\Delta < 0$: f ne possède pas de zéro (0 point de coupe).

Les zéros de f, si $\Delta > 0$, sont donnés par :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Coefficient c

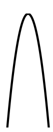
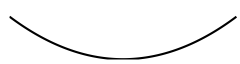
Le coefficient c est égal à l'ordonnée du point d'intersection entre la parabole représentant f et l'axe Oy car $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

On appelle également ce coefficient l'**ordonnée à l'origine**.

Coefficient a

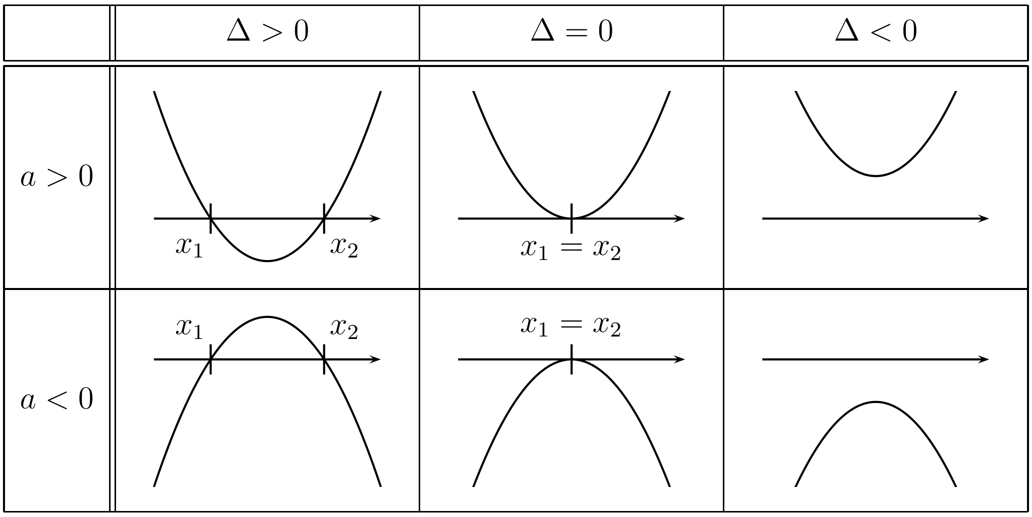
Le coefficient a détermine l'écartement et l'orientation de la parabole :

- si $a > 0$: la parabole est *ouverte vers le haut* ;
- si $a < 0$: la parabole est *ouverte vers le bas*.

$a < 0$, $\lvert a \rvert$ grande	$a < 0$, $\lvert a \rvert$ petite	$a > 0$, $\lvert a \rvert$ petite	$a > 0$, $\lvert a \rvert$ grande
			

Position de la parabole par rapport à l'axe Ox

La position de la parabole représentant la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ par rapport à l'axe Ox dépend uniquement de la valeur du coefficient a et de la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$:



Sommet

Définition 16.2
Le **sommet** S d'une parabole est :

– le point le plus bas (d'ordonnée minimale) de la courbe si elle est ouverte vers le haut ;
– le point le plus élevé (d'ordonnée maximale) de la courbe si elle est ouverte vers le bas.

Pour déterminer les coordonnées du sommet S d'une parabole représentant la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on transforme tout d'abord l'expression fonctionnelle de f :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) = a\left((x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left((x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

En posant $p = -\frac{b}{2a}$ et $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, l'expression fonctionnelle de la fonction quadratique f peut s'écrire :

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$\boxed{\text{Si } a > 0}$, la parabole est ouverte vers le haut et le sommet est le point d'ordonnée minimale. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'expression $a \cdot (x-p)^2$ est positive ou nulle (produit d'un nombre positif et d'un nombre positif ou nul) et q est un nombre (constant). Ainsi, on obtient que :

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \geqslant q$$

La valeur minimale de f est donc q et elle est atteinte pour $x = p$. De plus, comme $f(p) = q$, les coordonnées du sommet sont $S = (p; q)$.

$\boxed{\text{Si } a < 0}$, la parabole est ouverte vers le bas et le sommet est le point d'ordonnée maximale. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'expression $a \cdot (x-p)^2$ est négative ou nulle (produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif ou nul). Ainsi, on obtient que :

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \leqslant q$$

La valeur maximale de f est donc q et elle est atteinte pour $x = p$. Les coordonnées du sommet sont donc également $S = (p; q)$.

En conclusion, quelque soit la valeur de a, le sommet de la parabole représentant f est le point :

$$\boxed{S = \left(-\tfrac{b}{2a}; f(-\tfrac{b}{2a})\right)}$$

Axe de symétrie

La parabole représentant la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ possède un axe de symétrie d'équation :

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$f(-\tfrac{b}{2a} + k) = f(-\tfrac{b}{2a} - k)$$

Démonstration. En posant $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ et en utilisant l'expression fonctionnelle équivalente $f(x) = a(x-p)^2 + q$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(p+k) & = & a(p+k-p)^2 + q \ = \ a \cdot k^2 + q \\ & \text{et} & \\ f(p-k) & = & a(p-k-p)^2 + q \ = \ a \cdot (-k)^2 + q \ = \ a \cdot k^2 + q \end{array}$$

Ainsi, $f(p+k) = f(p-k)$. □

16.2.2 Représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour dessiner, dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction quadratique définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Méthode

1. Déterminer le ou les zéros de f en résolvant l'équation $f(x) = 0 \longrightarrow$ on obtient les points de la forme $(x_i; 0)$ du graphe.

2. Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole : $S\left(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})\right)$.

3. Calculer quelques couples $(x; f(x))$ du graphe de f en choisissant x dans $\mathbb{R}$.

4. Dessiner sous la forme d'un trait discontinu, dans le repère cartésien, l'axe de symétrie verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

5. Reporter, dans le repère cartésien, les points correspondant aux zéros de f, le sommet de la parabole, le point $(0; c)$ et les points du graphe calculés en 3 et dessiner les points symétriques correspondants (par rapport à l'axe représenté en 4).

6. Relier les points dessinés dans le plan Oxy de sorte à obtenir une parabole.

Exemple

Soit la fonction quadratique $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.
On détermine tout d'abord les deux zéros de f *(comme* $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9 = 3^2$*) :*

$$x_1 = \frac{1-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 \quad et \quad x_2 = \frac{1+3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

Comme $-\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$*, les coordonnées du sommet sont données par :*

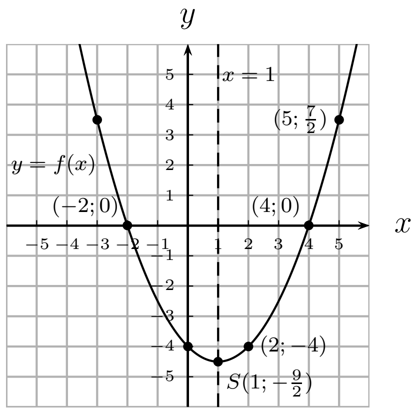
$$S = (1; f(1)) = (1; -\tfrac{9}{2})$$

On calcule ensuite quelques points du graphe :

$$(2; f(2)) = (2; -4) \ ; \ (5; f(5)) = (5; \tfrac{7}{2}) \ ; \ \ldots$$

L'équation de l'axe de symétrie est : $x = 1$.

On reporte ensuite ces informations dans un repère cartésien pour obtenir la représentation graphique ci-contre.



16.3 Optimum d'une fonction quadratique

Comme la représentation graphique de $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour $a \neq 0$, est une parabole, on peut utiliser l'ordonnée du sommet, $f(-\frac{b}{2a})$ pour déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction quadratique. En effet, puisque la parabole est ouverte vers le bas si $a < 0$, et vers le haut si $a > 0$, cette valeur de la fonction est respectivement le maximum ou le minimum de f. On peut résumer ceci par le théorème suivant.

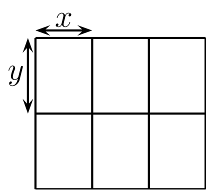
Théorème 16.1
Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, alors $f(-\frac{b}{2a})$ est :

1. le maximum de f si $a < 0$,
2. le minimum de f si $a > 0$.

On va utiliser ce théorème dans l'exemple suivant.

Exemple

On dispose de 288 *m de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo selon le plan ci-dessous. On aimerait déterminer les dimensions à donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.*



Sur ce dessin, on définit deux variables :
– x : la largeur d'un enclos
– y : la longueur d'un enclos
L'aire au sol est donnée par :

$$Aire = 3x \cdot 2y$$

Or, comme on n'a à disposition que 288 *m de clôture, il existe un lien entre x et y donné par l'équation :*

$$9x + 8y = 288$$

En transformant un peu cette équation, on obtient que $y = \frac{288-9x}{8}$. On peut alors ***exprimer l'aire uniquement en fonction de*** *x. On définit ainsi une fonction $A(x)$ donnée par*

$$A(x) = 3x \cdot 2 \cdot \frac{288-9x}{8} = 216x - \frac{27}{4}x^2$$

On doit maintenant déterminer le maximum de cette fonction. Comme c'est une fonction du deuxième degré, on sait que la deuxième coordonnée du sommet donnera le maximum (le coefficient devant x^2 est négatif) et que la première coordonnée sera la largeur qui produira ce maximum.
La première coordonnée du sommet est donnée par $s_1 = x_{max} = -\frac{216}{2\cdot\left(-\frac{27}{4}\right)} = 16$ et la deuxième par $s_2 = A(16) = 1728$.
La longueur qui correspond à une largeur de 16 m est : $y_{max} = \frac{288-9\cdot16}{8} = 18$.
Un enclos a donc comme dimension 16 *m* $\times$ 18 *m et la surface totale recouverte est de* 1728 *m.*

16.4 Exercices

1) On veut faire une gouttière avec une longue feuille de métal de 12 cm de large en pliant les deux côtés et en les relevant perpendiculairement à la feuille. Quelles doivent être les cotés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

2) Utilisons la formule de la chute libre en physique : $y(t) = y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}g_y t^2$ où y_0, $v_{y,0}$ et g_y sont des nombres réels connus.
En lançant un objet avec une vitesse initiale de $v_{y,0} = 30\ m/s$ depuis une hauteur $y_0 = 0\ m$ (on considère que $g_y = 10\ m/s^2$),
   a) combien de temps mettra l'objet pour atteindre sa hauteur maximale ?
   b) quelle sera la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
   c) combien de temps mettra l'objet pour toucher à nouveau le sol ?
   d) combien de temps mettra l'objet pour atteindre 30 m ?

3) Une compagnie de câble-opérateur dessert actuellement la région. Imaginons que 5000 foyers sont desservis, chacun payant 20.- par mois. Une étude de marché indique que chaque diminution de 1.- amène 500 nouveaux clients.
   a) Déterminer la fonction $R(x)$, revenu total quand le prix est de x.-.
   b) Déterminer la valeur de x qui donne le revenu mensuel maximal.

4) Dans une forêt, la population de souris varie en fonction du nombre x de hiboux qui s'y trouvent. Le garde forestier estime que la population de souris est donnée par la fonction suivante :
$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{15}{2}$$
   a) Quelle est la population de souris lorsque 5 hiboux vivent dans la forêt ?
   b) Pour quel nombre de hiboux la population de souris est-elle la plus grande ? Quel est alors le nombre de souris ?
   c) Pour quel nombre de hiboux les souris disparaissent-elles ?

5) Une entreprise produit des pièces métalliques pour les voitures. Le coût de production journalier varie en fonction du nombre x de pièces produites, il est donné par la fonction suivante :
$$C(x) = \frac{1}{10}x^2 - 10x + 1500$$
   a) Quel est le coût de production pour une quantité de 20 pièces par jour ?
   b) Pour quel nombre de pièces le coût de production journalier est-il le plus bas ? Quel est alors ce coût ?
   c) Pour quelle quantité de pièces le coût est-il égal à $1'610$ CHF ?
   d) Quel est le coût lorsque la production est arrêtée ?

6) Une entreprise lance sur le marché un nouveau produit. Elle prévoit que son bénéfice B, en millions de francs, évoluera dans le temps suivant la courbe donnée par l'équation
$$B(t) = -t^2 + 4.8t - 2.76 \quad \text{où } t \text{ est exprimé en année.}$$
   a) Calculer dans combien de temps le bénéfice sera maximum et quel sera-t-il ?

b) Trouver quand le bénéfice sera exactement de 2 millions, en déduire le nombre de mois pendant lesquels le bénéfice sera supérieur à 2 millions.

7) Une société immobilière possède un certain nombre d'appartements dont les loyers sont tous identiques (x francs par loyer). La société estime que les loyers engendrent un revenu mensuel ($R(x)$, en francs) donné par la fonction suivante :

$$R(x) = 280x - \tfrac{1}{10}x^2$$

a) Calculer le revenu mensuel lorsque le loyer est fixé à $1'200$ francs.

b) Pour quel loyer le revenu est-il maximum, et que vaut-il dans ce cas ?

c) Représenter graphiquement la fonction R.
Unité sur Ox : 2 carreaux pour 200 fr., sur Oy : 2 carreaux pour $20'000$ fr.

d) Pour quels loyers le revenu est-il égal à 187'000 francs ?
Résoudre cette question : a) par graphique b) par l'algèbre

e) La société immobilière considère que les coûts ($C(x)$, en francs) administratifs, d'investissement et autres charges peuvent être estimés mensuellement par la fonction $C(x) = 180'000 - 10x$. Déterminer, par calculs, les valeurs x du loyer pour lesquelles la gérance de ces appartements est rentable.

16.5 Solutions des exercices

1) 3 cm

2) a) 3 s

   b) 45 m

   c) 6 m

   d) $3+\sqrt{3}\ s$

3) a) $R(x) = 15'000x - 500x^2$

   b) $x = 15$

4) a) 30 souris
   b) 7 hiboux pour 32 souris
   c) 15 hiboux

5) a) 1340.– CHF
   b) 50 pièces pour un coût de 1250.– CHF
   c) 110 pièces
   d) 1'500.– CHF

6) a) Au bout de 2,4 ans, le bénéfice sera de 3 millions
   b) Au bout de 1,4 ans ou 3,4 ans. $B(x)$ est $\geqslant$ 2 millions pendant 24 mois.

7) a) 192'000 CHF
   b) 1'400 CHF
   d) 1'100 CHF ou 1'700 CHF
   e) entre 900 et 2000 CHF

Chapitre 17

Fonctions polynômes et rationnelles

17.1 Fonctions polynômes

17.1.1 Définition

Définition 17.1
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$, est appelée **fonction polynôme** de degré n ou, plus simplement, **polynôme** de degré n.

Le nombre a_i est appelé le **coefficient** de rang i de $f(x)$ et a_n le **coefficient dominant**.

Exemples

1) La fonction définie par $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ *est une fonction polynôme de degré* 3. *Le coefficient dominant est* $a_3 = 5$.

2) La fonction définie par $g(x) = -6x^6 - 4x^5 - 2x^2 + 2$ *est une fonction polynôme de degré* 6. *Le coefficient dominant est* $a_6 = -6$.

3) La fonction définie par $h(x) = 4x^2 - 3x + 1$ *est une fonction polynôme de degré* 2. *On l'appelle également fonction quadratique. Le coefficient dominant est* $a_2 = 4$.

4) La fonction définie par $i(x) = -9x + 3$ *est une fonction polynôme de degré* 1. *On l'appelle également fonction affine. Le coefficient dominant est* $a_1 = -9$.

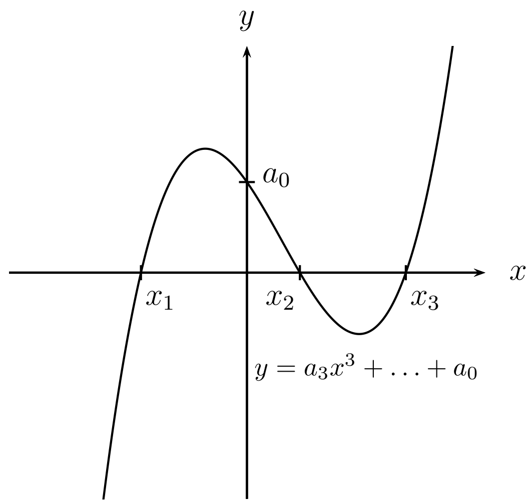
17.1.2 Représentations graphiques

Degré n impair

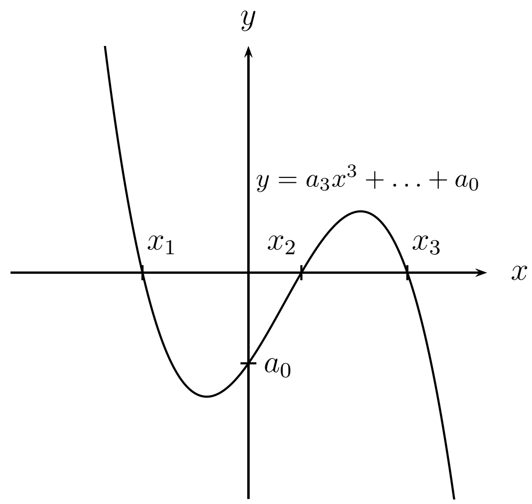
On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions polynômes de degré 3 avec un coefficient dominant a_3 positif, à gauche, ou négatif, à droite.

La forme générale, notamment le comportement à l'infini, de la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré n impair ressemble à celles données en exemple ci-dessous.

$\boxed{\mathbf{a_3 > 0}}$



$\boxed{\mathbf{a_3 < 0}}$

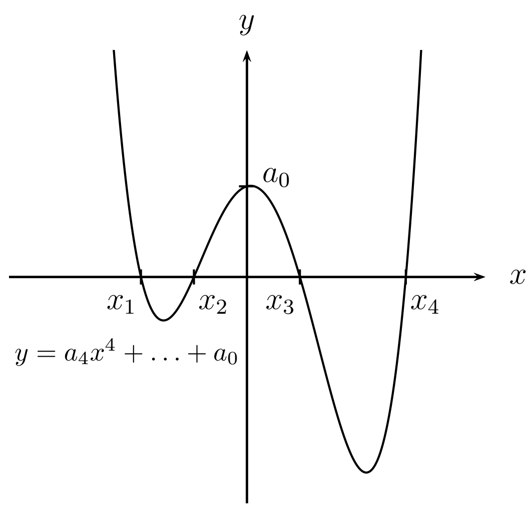


Degré n pair

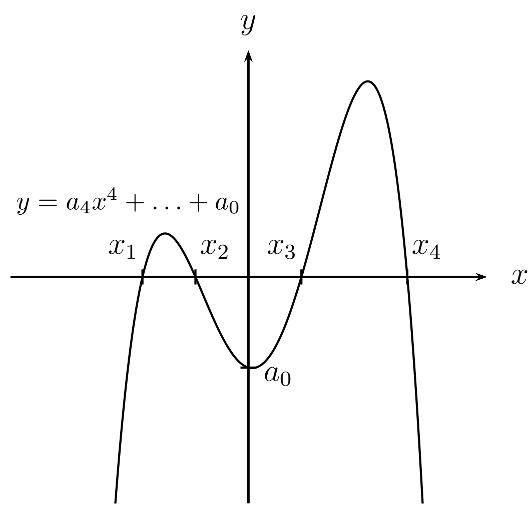
On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions polynômes de degré 4 avec un coefficient dominant a_4 positif, à gauche, ou négatif, à droite.

La forme générale, notamment le comportement à l'infini, de la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré n pair ressemble à celles données en exemple ci-dessous.

$\boxed{\mathbf{a_4 > 0}}$



$\boxed{\mathbf{a_4 < 0}}$



Quelques caractéristiques de la représentation graphique

Zéro(s) de la fonction

La ou les abscisses x_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ du ou des points d'intersection de la courbe représentant la fonction polynôme $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ et de l'axe Ox sont les zéros de f.

Le nombre de zéros et donc de points de coupe avec l'axe Ox est inférieur ou égal au degré n. Pour les déterminer, on peut utiliser la méthode de résolution des équations polynomiales étudiée précédemment dans le chapitre (2.5) (recherche d'un zéro par essais successifs puis division à l'aide du schéma de Horner ...)

Coefficient a_0

Le coefficient a_0 est égal à l'ordonnée du point d'intersection entre la courbe représentant f et l'axe Oy.

Ce coefficient est également appelé l'**ordonnée à l'origine**.

Coefficient dominant a_n

Le coefficient a_n détermine l'orientation de la courbe représentant f. On doit différencier ici les cas où n est pair de ceux où n est impair.

Pour un degré n **impair**, on observe que
- si $a_n > 0$: la courbe représentant f est *au-dessous* de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment petites et *au-dessus* de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment grandes.
- si $a < 0$: la courbe représentant f est *au-dessus* de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment petites et *au-dessous* de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment grandes.

Pour un degré n **pair**, on observe que
- si $a_n > 0$: la courbe représentant f est *ouverte vers le haut*, c'est-à-dire que celle-ci se trouve au-dessus de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment grandes ou petites.
- si $a < 0$: la courbe représentant f est *ouverte vers le bas*, c'est-à-dire que celle-ci se trouve au-dessous de l'axe Ox pour des valeurs de x suffisamment grandes ou petites.

Esquisse de la représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut suivre la méthode de représentation "générale" étudiée au chapitre (14.3.1) pour dessiner, dans un repère cartésien, le graphe d'une fonction polynôme.

Par contre, si on ne desire pas obtenir un dessin "très" précis, on peut utiliser les éléments caractéristiques de la représentation graphique d'une fonction polynôme définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (zéros, coefficient a_0 et coefficient dominant) pour l'esquisser, en s'aidant éventuellement d'un tableau donnant le signe de l'image de chaque valeur possible de x.

Méthode

1. Déterminer le ou les zéros de f en résolvant l'équation $f(x) = 0 \longrightarrow$ on obtient les points de la forme $(x_i; 0)$ du graphe.
2. Etudier le signe de la fonction dans un tableau de signes (voir le chapitre (5) portant sur les inéquations).
3. Reporter, dans le repère cartésien, les points correspondant aux zéros de f et le point $(0; a_0)$.
4. Relier les points dessinés dans le plan Oxy de sorte à respecter les informations données par le tableau de signes : si $f(x) > 0$ la courbe est au-dessus de l'axe Ox et si $f(x) < 0$ la courbe est au-dessous de l'axe Ox.

Exemple

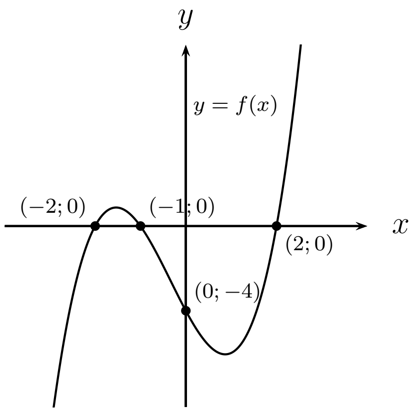
Soit la fonction polynôme de degré 3 *donnée par* $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$*.*
On détermine tout d'abord les trois zéros de f *en résolvant l'équation polynomiale* $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ *(voir le chapitre (2.5.3) pour la résolution complète) :*

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2$$

On construit ensuite le tableau de signes de f *en remarquant qu'on peut factoriser l'expression fonctionnelle de* f *:* $f(x) = (x+2)(x+1)(x-2)$*.*

x		-2		-1		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Position courbe / axe	*en-dessous*		*en-dessus*		*en-dessous*		*en-dessus*

On reporte enfin les points $(-2;0)$*,* $(-1;0)$*,* $(2;0)$ *et* $(0;-4)$ *dans un repère cartésien et on les relie en tenant compte de la position de la courbe par rapport à l'axe Ox donnée dans le tableau de signes.*



17.2 Fonctions rationnelles

17.2.1 Définition

Définition 17.2
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes, est appelée **fonction rationnelle**.

Remarques

1. L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction rationnelle comprend toutes les valeurs réelles de x sauf celles qui annulent le dénominateur $q(x)$.
2. L'ensemble des zéros d'une fonction rationnelle est donné par l'ensemble des zéros du polynôme $p(x)$ qui ne sont pas des zéros de $q(x)$: $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0 \text{ et } q(x) \neq 0\}$

Exemples

1) La fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *est une fonction rationnelle qui admet comme ensemble de définition* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. *Cette fonction n'admet pas de zéro (car* $1 \neq 0$*).*

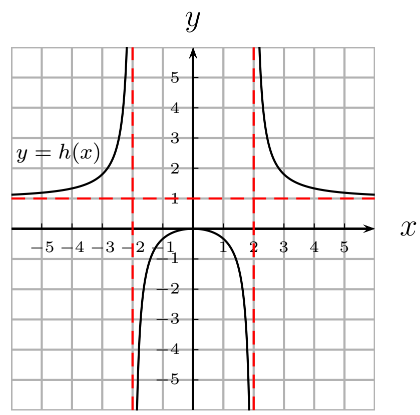
2) La fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$ *est une fonction rationnelle qui admet comme ensemble de définition* $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. *L'ensemble des zéros de cette fonction est l'ensemble :* $\{\sqrt[3]{8}\}$ *(solution de* $x^3 - 8 = 0$*).*

3) La fonction définie par $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ *est une fonction rationnelle qui admet comme ensemble de définition* $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. *L'ensemble des zéros de cette fonction est l'ensemble :* $\{0\}$ *(solution de* $x^2 = 0$*).*

Son graphe est représenté ci-contre.

On remarque que, quand x *prend des valeurs arbitrairement grandes ou petites (on dit que* x *tend vers* $\pm\infty$*), la courbe se rapproche de de la droite horizontale* $y = 1$. *Cette droite est appelée asymptote horizontale (voir ci-dessous).*

De manière analogue, les droites $x = 2$ *et* $x = -2$ *sont appelées asymptotes verticales.*



Nous étudierons plus largement les représentations graphiques de fonctions rationnelles quelconques (voir chapitre suivant pour un cas particulier) dans le cours de deuxième année lorsque nous aurons à disposition certains outils d'analyse : limites, dérivées, ... De plus, les notions d'asymptote verticale et horizontale seront introduites de manière précise et détaillée dans ce cours. Pour l'instant, on donne uniquement ci-dessous une première idée de définition de ces deux notions en utilisant les notations suivantes :

- $x \to a$ (ou $f(x) \to a$) : x (respectivement $f(x)$) tend vers (s'approche de) a,
- $x \to +\infty$ (ou $f(x) \to +\infty$) : x (respectivement $f(x)$) prend des valeurs positives arbitrairement grandes,
- $x \to -\infty$ (ou $f(x) \to -\infty$) : x (respectivement $f(x)$) prend des valeurs négatives arbitrairement petites.

Les symboles $+\infty$ (plus infini) et $-\infty$ (moins infini) ne représentent pas des nombres réels ; ils précisent simplement certains types de comportement des variables et des fonctions.

Définition 17.3
La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** pour la représentation graphique de la fonction f si

$$f(x) \to +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \to -\infty$$

lorsque x tend vers (s'approche de) a par la gauche (par des valeurs *inférieures* à a) ou par la droite (par des valeurs *supérieures* à a).

La droite $y = c$ est une **asymptote horizontale** pour la représentation graphique de la fonction f si

$$f(x) \to c$$

lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Remarques

1. On représentera généralement les asymptotes en "traitillés".
2. La notation $f(x) \to c$ lorsque $x \to +\infty$ (ou $x \to -\infty$) se lie "$f(x)$ tend vers c lorsque x tend vers plus l'infini" (respectivement vers moins l'infini).
3. Si a est un zéro du dénominateur d'une fonction rationnelle f, alors *il est possible* que le graphique de f ait une asymptote verticale en $x = a$. Il y a des fonctions rationnelles pour lesquelles ce *n'est pas* le cas. Si le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun, alors f *admet* une asymptote verticale en $x = a$.

17.2.2 Fonctions homographiques

Définition 17.4
Une fonction **homographique** est une fonction rationnelle dont le numérateur est une constante ou un polynôme de degré un et le dénominateur un polynôme de degré un.

Plus précisément, une fonction homographique est définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarques

1. La condition $ad - bc \neq 0$ implique, entre autres, qu'une fonction homographique est une fonction injective.
2. Si on restreint l'ensemble d'arrivée d'une fonction homographique f à l'ensemble image de la fonction $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, la fonction f est alors une fonction surjective.

Exemple

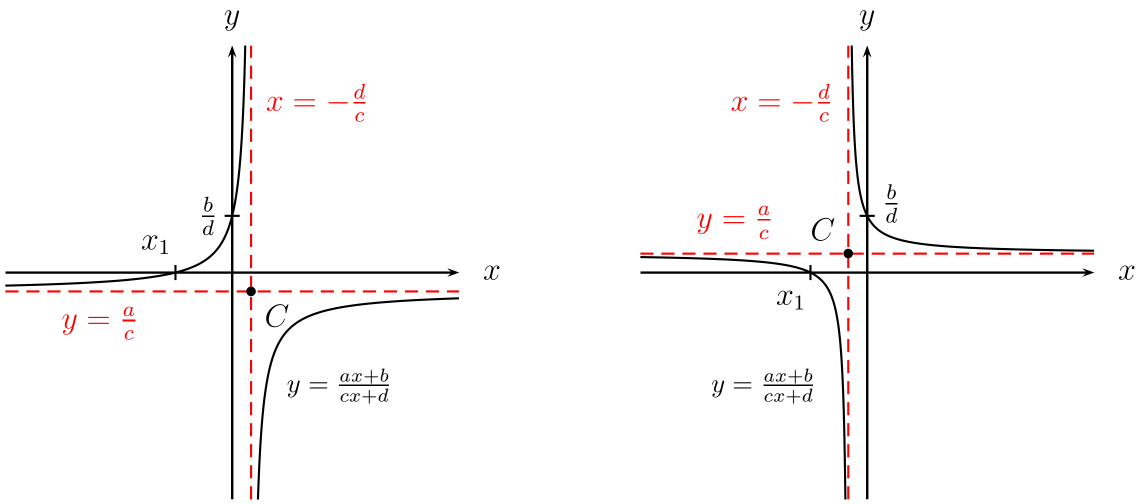
La fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x-5}{3x-2}$ *est une fonction homographique qui admet comme ensemble de définition* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

Représentations graphiques

La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction homographique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est une **hyperbole** (équilatère) passant par le point $(0; \frac{b}{d})$ (si $d \neq 0$) et dont l'orientation dépend du nombre $ad - bc$.

On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions homographiques avec $ad - bc$ positif, à gauche, ou négatif, à droite.

$\boxed{\mathbf{ad - bc > 0}}$ $\boxed{\mathbf{ad - bc < 0}}$



Quelques caractéristiques de la représentation graphique

Zéro de la fonction : L'abscisse x_1 du point d'intersection de l'hyperbole représentant la fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et de l'axe Ox est le zéro de f : $x_1 = -\dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$.

Asymptote verticale : La représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$.

Asymptote horizontale : La représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{a}{c}$.

Symétrie : Le point $C\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ (le point d'intersection des deux asymptotes) est le centre de symétrie de l'hyperbole représentant la fonction f.

Représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour dessiner, dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction homographique définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Méthode

1. Déterminer le zéro de f en résolvant l'équation $ax + b = 0 \longrightarrow$ on obtient le point $(-\frac{b}{a}; 0)$ du graphe (si $a \neq 0$).

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de l'hyperbole avec l'axe Oy : $(0; f(0)) = (0; \frac{b}{d})$ (si $d \neq 0$).

3. Calculer quelques couples $(x; f(x))$ du graphe de f en choisissant x dans le domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

4. Déterminer l'orientation de l'hyperbole en calculant le nombre $ad - bc \longrightarrow$

- si $ad-bc > 0$, la "branche gauche" de l'hyperbole est au-dessus de l'asymptote horizontale et la "branche droite" au-dessous,

- si $ad-bc < 0$, la "branche gauche" de l'hyperbole est au-dessous de l'asymptote horizontale et la "branche droite" au-dessus.

5. Dessiner sous la forme d'un trait discontinu, dans le repère cartésien, l'asymptote horizontale d'équation $y = \frac{a}{c}$ et l'asymptote verticale d'équation $x = -\frac{d}{c}$.

6. Reporter, dans le repère cartésien, les points du graphe calculés en 1, 2 et 3 et dessiner (éventuellement) les points symétriques correspondants (par rapport au centre de symétrie $C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$).

7. Relier les points dessinés dans le plan Oxy de sorte à obtenir une hyperbole d'orientation déterminée en 4.

Exemple

Soit la fonction homographique $f(x) = \frac{x-3}{2x+4}$.

On détermine tout d'abord le zéro de f*,* $x_1 = 3$ *(solution de* $x - 3 = 0$*), et le point d'intersection avec l'axe des ordonnées,* $(0; -\frac{3}{4})$.

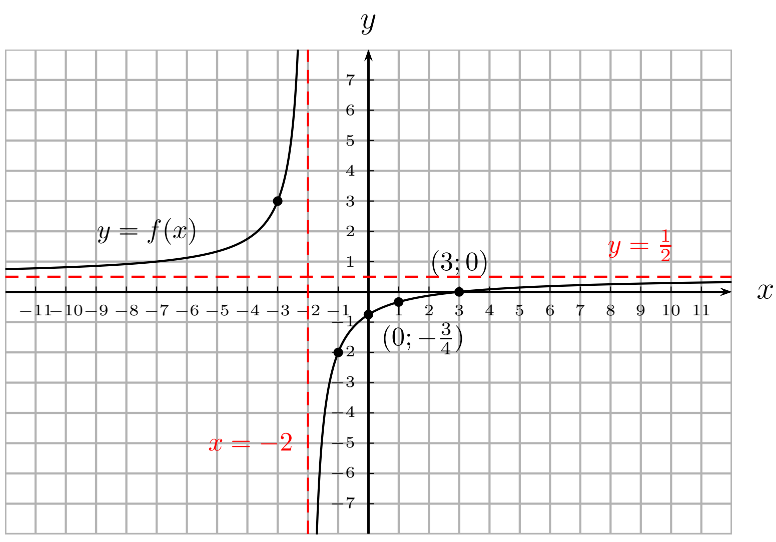
On calcule ensuite quelques points du graphe :

$$(-3; f(-3)) = (-3; 3) \ ; \ (-1; f(-1)) = (-1; -2) \ ; \ (1; f(1)) = (1; -\tfrac{1}{3}) \ ; \ \ldots$$

Comme $ad - bc = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 10 > 0$*, la "branche gauche" de l'hyperbole est au-dessus de l'asymptote horizontale et la "branche droite" au-dessous.*

L'équation de l'asymptote horizontale est $y = \frac{1}{2}$ *et l'équation de l'asymptote verticale* $x = -2$.

On reporte ensuite ces informations dans un repère cartésien pour obtenir la représentation graphique ci-dessous.



Chapitre 18

Fonctions puissances et racines

18.1 Fonctions puissances

18.1.1 Définition

Définition 18.1 (Rappel)
Un nombre a multiplié n fois par lui-même, $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}}$, est appelé **puissance n-ème** de a et est noté a^n. On dit également *"a élevé à la puissance n"* ou plus rapidement *"a puissance n"*. Dans l'écriture a^n, on appelle a la **base** et n l'**exposant**.

Exemple

D'après cette définition, on peut écrire : $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ apparaît } 6 \text{ fois}} = 3^6$.

Définition 18.2
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = x^n \end{array}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ (fixe), est appelée **fonction puissance** n-ème.

Exemple

1) La fonction définie par $f(x) = x^4$ est la fonction puissance 4-ème.

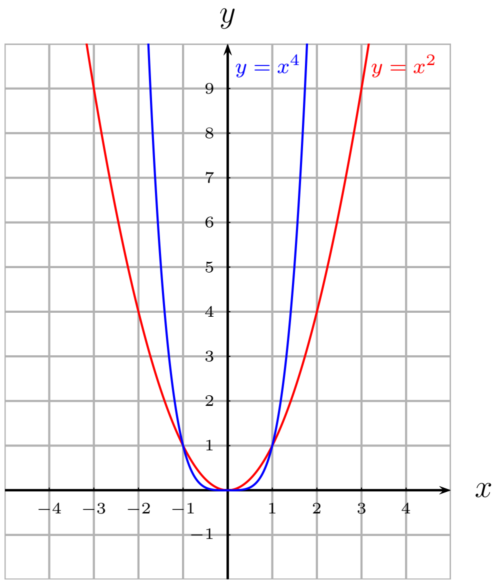
2) La fonction définie par $f(x) = x^7$ est la fonction puissance 7-ème.

18.1.2 Représentations graphiques et caractéristiques

Exposant n pair

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions puissances 2-ème (en rouge) et 4-ème (en bleu).

La forme générale de la représentation graphique d'une fonction puissance d'exposant n pair ressemble à celles données en exemple.



Quelques caractéristiques de la fonction puissance n-ème pour un exposant n **pair** :

1) Symétrie : La représentation graphique de la fonction $f(x) = x^n$ admet une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées car $(-x)^n = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une fonction *paire* (car $f(-x) = f(x)$).

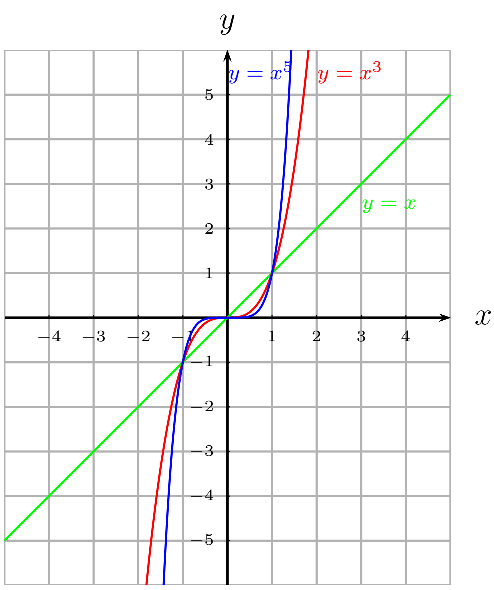
2) Forme : On peut remarquer que, plus l'exposant n est petit, plus la courbe représentant la fonction f "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0; 0)$ (0 est le zéro de f) et $(1; 1)$, et qu'elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ($f(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$).

3) Bijection : La fonction $f(x) = x^n$ n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre en transformant les ensembles de départ et d'arrivée (réduction), on peut obtenir une fonction bijective. En effet, $f(x) = x^n$ est *bijective* de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exposant n impair

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions puissances 1-ème (en vert ; fonction linéaire de pente 1), 3-ème (en rouge) et 5-ème (en bleu).

La forme générale de la représentation graphique d'une fonction puissance d'exposant n impair ressemble à celles données en exemple.



Quelques caractéristiques de la fonction puissance n-ème pour un exposant n **impair** :

1) Symétrie : La représentation graphique de la fonction $f(x) = x^n$ admet une symétrie centrale de centre O car $(-x)^n = -x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une fonction *impaire* (car $f(-x) = -f(x)$).

2) Forme : On peut remarquer que, plus l'exposant n est petit, plus la courbe représentant la fonction f "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0; 0)$ (0 est le zéro de f) et $(1; 1)$, et qu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 0$ ($f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$) et au-dessous pour $x < 0$ ($f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*$).

3) Bijection : La fonction $f(x) = x^n$ est *bijective* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Selon ce qui précède, la fonction puissance n-ème$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (pair ou impair) est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que cette fonction admet une fonction réciproque (voir chapitre suivant).

18.1.3 Propriétés (rappel)

Si a et b sont des nombres réels non nuls ($a, b \in \mathbb{R}^*$) et n et m des nombres naturels strictement positifs ($n, m \in \mathbb{N}^*$), on a les propriétés suivantes :

<table>
<tr><td colspan="3">$a^n = b^n \Longleftrightarrow a = b, \quad$ avec $a, b > 0$</td></tr>
<tr><td>$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$</td><td colspan="2">$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (si $n > m$)</td></tr>
<tr><td>$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$</td><td>$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$</td><td>$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$</td></tr>
</table>

Attention !

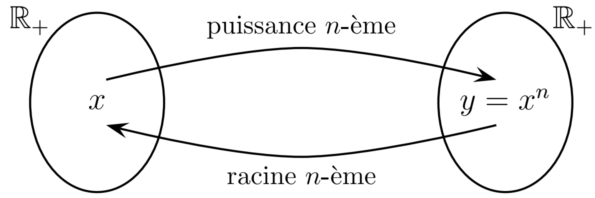
– $(a + b)^n \neq a^n + b^n$ (pour $n \neq 1$), en effet : $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49 \neq 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

18.2 Fonctions racines

18.2.1 Définition

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la fonction puissance n-ème donnée par $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, pour n pair ou impair. La fonction f possède donc une fonction réciproque ${}^r\!f$.

Cette fonction réciproque de la fonction puissance n-ème est appelée **fonction racine n-ème** et est notée $\sqrt[n]{}$.



Définition 18.3
Soit n un nombre naturel positif ($n \in \mathbb{N}^*$).
La **racine n-ème de** x, $\sqrt[n]{x}$, est défini par :

$$\boxed{y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n}$$

pour tous nombres réels $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

La **fonction racine n-ème** est alors définie par :

$$\begin{array}{rccll} \sqrt[n]{} : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \\ & x & \longmapsto & y = \sqrt[n]{x} & \text{tel que } y^n = x \end{array}$$

Le symbole $\sqrt[n]{}$ est appelé **radical**, l'expression sous le radical est appelé **radicande** et n l'**indice**.

Noter que les deux équations données dans la définition sont équivalentes. On dit que :

$\sqrt[n]{x}$ EST LE NOMBRE POSITIF QUI ÉLEVÉ À LA PUISSANCE n DONNE x.

Exemples

1) $\sqrt[5]{32} = 2$ *car* $2^5 = 32$.
2) $\sqrt[3]{125} = 5$ *car* $5^3 = 125$.
3) La fonction définie par $f(x) = \sqrt[5]{x}$ *est la fonction racine* 5*-ème.*

Remarques

1) Si $n = 2$, on écrit simplement $f(x) = \sqrt{x}$ et on la nomme fonction **racine carrée**.
2) Si n est impair, il est possible de définir la racine n-ème d'un nombre négatif, car la fonction puissance n-ème est alors bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples

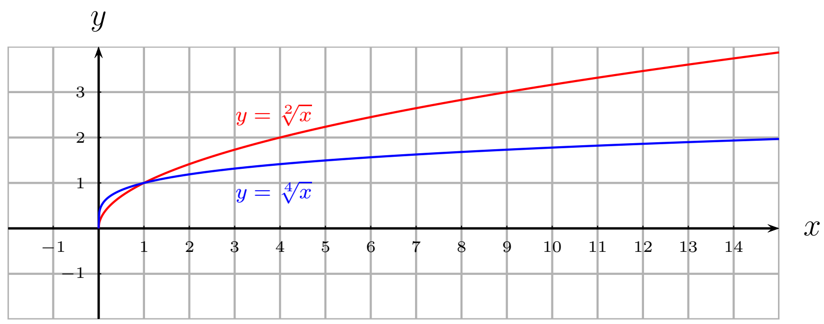
1) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$
2) Si $a > 0$ *et* n *impair, on peut poser :* $\sqrt[n]{(-a)^n} = \sqrt[n]{-a^n} = -\sqrt[n]{a^n} = -a$.

18.2.2 Représentations graphiques et caractéristiques

Indice n pair

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions racines 2-ème (en rouge) et 4-ème (en bleu).

La forme générale de la représentation graphique d'une fonction racine d'indice n pair ressemble à celles données en exemple.

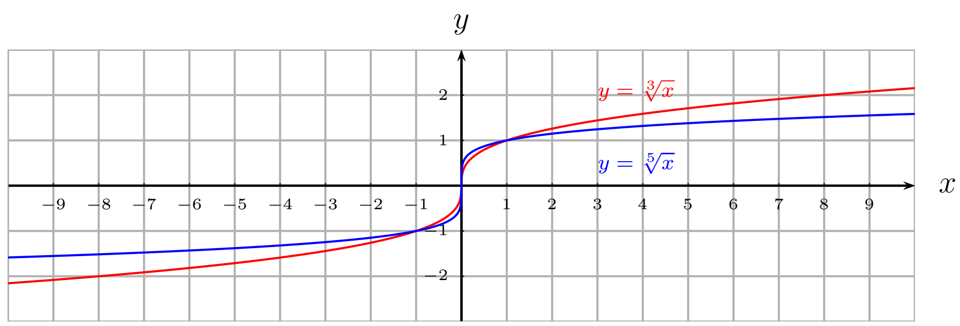


n pair

On peut remarquer que, plus l'indice n est petit, plus la courbe représentant la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$ "s'éloigne" rapidement de l'axe Ox quand x augmente ($x > 0$), qu'elle passe par les points $(0;0)$ (0 est le zéro de f) et $(1;1)$, et qu'elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ($f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+$).

Indice n impair

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions racines 3-ème (en rouge) et 5-ème (en bleu).
La forme générale de la représentation graphique d'une fonction racine d'indice n impair ressemble à celles données en exemple.



n impair

On peut remarquer que, plus l'indice n est petit, plus la courbe représentant la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$ "s'éloigne" rapidement de l'axe Ox quand x augmente ($x > 0$) ou diminue ($x < 0$), qu'elle passe par les points $(0;0)$ (0 est le zéro de f) et $(1;1)$, et qu'elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 0$ ($f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$) et au-dessous pour $x < 0$ ($f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_-^*$).

18.2.3 Propriétés (rappel)

Si a et b sont des nombres réels strictement positifs ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$) et n, m, p des nombres naturels strictement positifs ($n, m, p \in \mathbb{N}^*$), on a les propriétés suivantes :

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a = b$		
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Attention !

– $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, en effet : $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$

– $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, en effet : $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Cas particulier

Pour tout nombre réel a ($a \in \mathbb{R}$), on a l'égalité suivante :

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Exemples

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \sqrt{3^2} = |3| = 3 \\ \bullet \quad \sqrt{(-3)^2} = |3| = 3 \end{array}\right\} \textit{car } 3^2 = (-3)^2 = 9 \textit{ et } \sqrt{9} = 3.$$

Attention à ne pas confondre :

a) la racine carrée de a^2 qui est l'unique nombre *positif* dont le carré vaut a^2.

b) les deux solutions de l'équation $x^2 = a^2$: $x_1 = a$ et $x_2 = -a$. (*Exemple : $x^2 = 9$ a comme solutions $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$*)

Chapitre 19

Fonctions exponentielles

19.1 De la fonction puissance à la fonction exponentielle

Fonction exponentielle de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les fonctions puissances ayant une expression fonctionnelle de la forme

$$\text{(base variable)}^{\text{puissance constante}}$$

tels que x^2, x^3, ... Nous allons porter maintenant notre attention vers des fonctions ayant une expression fonctionnelle de la forme

$$\text{(base constante)}^{\text{puissance variable}}$$

tels que 2^x, 1.04^x, π^x, que nous appellerons **fonctions exponentielles**. Il ne faut pas confondre ces deux types de fonctions. Dans le premier cas, la base est variable tandis que dans le second c'est l'exposant qui est variable.

Pour pouvoir définir les fonctions exponentielles, on considère un nombre réel strictement positif a ($a \in \mathbb{R}_+^*$, fixé) et on commence par restreindre l'ensemble de départ à l'ensemble des nombres naturels strictement positifs. On obtient la fonction *exponentielle de base a* :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & y = a^x \end{array}$$

qui est bien définie pour chaque valeur de $x \in \mathbb{N}^*$, puisque, pour un x fixé,

$$f(x) = a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } x \text{ fois}}$$

est équivalent à calculer l'image de a par la fonction puissance x-ème.

Une propriété fondamentale de la fonction puissance est, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, :

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \tag{19.1}$$

On va maintenant étendre la définition de cette fonction f à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$ et finalement à $\mathbb{R}$ en imposant cette propriété à la fonction exponentielle de base a fixée.

Prolongement à $\mathbb{Z}$

Pour prolonger la fonction exponentielle de base a à $\mathbb{Z}$ et obtenir une fonction de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on doit déterminer a^0 et a^{-n} ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Pour que la propriété (19.1) soit conservée, a^0 doit vérifier ($m \in \mathbb{N}^*$) :

$$a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^0 = 1}$$

De même, a^{-n} doit vérifier ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

On peut maintenant déterminer la valeur de a élevé à n'importe quelle puissance *entière*.

Prolongement à $\mathbb{Q}$

Pour prolonger la fonction exponentielle de base a à $\mathbb{Q}$ et obtenir une fonction de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on doit déterminer $a^{\frac{1}{n}}$ et $a^{\frac{m}{n}}$ ($\forall m \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Pour que la propriété (19.1) soit conservée, $a^{\frac{1}{n}}$ doit vérifier ($n \in \mathbb{Z}$) :

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{a^{\frac{1}{n}} \text{ apparaît } n \text{ fois}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^1 = a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

car la racine n-ème de a correspond au nombre qui élevé à la puissance n donne a (suite d'égalités de gauche).

De même, $a^{\frac{m}{n}}$ doit vérifier :

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

en utilisant la propriétés des racines : $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

On peut maintenant déterminer la valeur de a élevé à n'importe quelle puissance *rationnelle*. Par contre, ces formules ne sont valables que si a est positif.

Prolongement à $\mathbb{R}$

On ne peut pas utiliser la propriété (19.1) pour prolonger la fonction exponentielle de base a à $\mathbb{R}$. Comment définir alors $a^{\sqrt{2}}$, a^{π}, $a^{\sqrt{3}}$ ou plus généralement a^x avec $x \in \mathbb{R}$?

Si x est un nombre rationnel ($x \in \mathbb{Q}$), a^x est clairement défini par ce qui précède. Par contre si x est un nombre irrationnel, on utilise le fait que le nombre réel x peut être approché aussi près que l'on veut par une suite de rationnels $q_1, q_2, q_3, \ldots$ et on "approche" alors la valeur de a^x par la suite de valeurs a^{q_1}, a^{q_2}, a^{q_3}, ...

> ***Exemple***
>
> *On désire déterminer la valeur de* $5^{\sqrt{2}}$. *Comme* $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, *on peut écrire la suite d'approximations successives :*

$$\begin{array}{ccccc} 5^1 & < & 5^{\sqrt{2}} & < & 5^2 \\ 5^{1,4} & < & 5^{\sqrt{2}} & < & 5^{1,5} \\ 5^{1,41} & < & 5^{\sqrt{2}} & < & 5^{1,42} \\ 5^{1,414} & < & 5^{\sqrt{2}} & < & 5^{1,415} \\ & & \cdots & & \end{array}$$

On estime $\sqrt{2}$ à gauche par une suite croissante de nombres rationnels qui s'approche de (tend vers) $\sqrt{2}$ et à droite par une suite décroissante de nombre rationnels. Ainsi, on peut affirmer que $5^{\sqrt{2}}$ est compris entre

$$5^{1,414} = 5^{\frac{1414}{1000}} = \sqrt[1000]{5^{1414}} \cong 9,7352$$

et

$$5^{1,415} = 5^{\frac{1415}{1000}} = \sqrt[1000]{5^{1415}} \cong 9,7509.$$

Pour plus de précision, on peut poursuivre la suite des approximations pour obtenir des nombres rationnels aussi proches qu'on le souhaite de $\sqrt{2}$.

On peut maintenant "déterminer" la valeur de a élevé à n'importe quelle puissance *réelle* et définir la fonction exponentielle de base a de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

Il est possible de définir a^x pour $x \in \mathbb{R}$ de manière plus précise, mais ceci fait appel à des notions mathématiques complexes qui ne sont pas étudiées dans le cadre du lycée.

19.2 Définition

Définition 19.1
Soit a un nombre réel positif différent de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).
La **fonction exponentielle de base** a est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & y = \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Exemple

1) *La fonction définie par $f(x) = 2^x$ est la fonction exponentielle de base 2. On a : $f(2) = 2^2 = 4$; $f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $f(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cong 1.414$; $2^\pi \cong 8.825$; ...*
2) *La fonction définie par $f(x) = \pi^x$ est la fonction exponentielle de base π.*

19.2.1 Cas particulier : la base e

Dans le chapitre sur les *progressions et les calculs financiers*, nous avons rencontré la formule des **intérêts composés** :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

qui permet de déterminer le capital C_n obtenu à partir d'un capital initial C_0 placé durant n années à un taux d'intérêt annuel i exprimé de manière décimale (3% d'intérêt $\equiv 0.03$).

Cette formule est valable si l'intérêt est capitalisé une fois par année. Que se passerait-il si ce même intérêt était capitalisé tous les trimestres, tous les mois, tous les jours, ... ? Essayons de trouver une réponse à l'aide d'un exemple.

Capitalisation chaque an (une fois par année)

Imaginons un millionnaire qui place son argent dans une banque très généreuse qui propose un taux d'intérêt à 100% ($i = 1$), ce qui signifie que la fortune du millionnaire doublera chaque année. S'il place un million à la banque l'année 0, voici comment augmentera sa fortune :

Après 1 année : $C_1 = 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot (1+1) = 2$ millions

Après 2 années : $C_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot (1+1)^2 = 4$ millions

Après 3 années : $C_3 = 4 + 4 \cdot 1 = 1 \cdot (1+1)^3 = 8$ millions

Après 4 années : $C_4 = 8 + 8 \cdot 1 = 1 \cdot (1+1)^4 = 16$ millions

...

En particulier, il aura 2 millions au bout d'une année.

Capitalisation chaque trimestre (4 fois par année)

Une banque concurrente apparaît qui propose elle aussi un taux d'intérêt à 100%, mais avec des intérêts capitalisés tous les trimestres, au lieu de tous les ans, sur la base du taux proportionnel correspondant à un trimestre : $i = \frac{1}{4}$. Si notre millionnaire place un million à la banque le trimestre 0, voici comment augmentera sa fortune :

Après 1 trimestre : $C_1 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{4}) = 1.25$ million

Après 2 trimestres : $C_2 = 1.25 + 1.25 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{4})^2 = 1.563$ million

Après 3 trimestres : $C_3 = 1.563 + 1.563 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{4})^3 = 1.953$ million

Après 4 trimestres : $C_4 = 1.953 + 1.953 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{4})^4 = 2.441$ millions

...

Au bout d'une année, il aura, au lieu de 2 millions, $(1 + \frac{1}{4})^4 = 2.441$ millions. Il a donc intérêt à choisir cette deuxième banque.

Capitalisation chaque mois (12 fois par année)

Une troisième banque apparaît qui propose elle aussi un taux d'intérêt à 100%, mais avec des intérêts capitalisés tous les mois sur la base du taux proportionnel correspondant à un mois : $i = \frac{1}{12}$. Si notre millionnaire place un million à la banque le mois 0, voici comment augmentera sa fortune :

Après 1 mois : $C_1 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{12} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12}) = 1.083$ million

Après 2 mois : $C_2 = 1.083 + 1.083 \cdot \frac{1}{12} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^2 = 1.174$ million

Après 3 mois : $C_3 = 1.174 + 1.174 \cdot \frac{1}{12} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^3 = 1.271$ million

...

Après 12 mois : $C_{12} = 2.412 + 2.412 \cdot \frac{1}{12} = 1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} = 2.613$ millions

...

Au bout d'une année, il aura, au lieu de 2 ou 2.441 millions, $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2.613$ millions. Il a donc intérêt à choisir cette troisième banque.

Capitalisation chaque jour (365 fois par année)

Une quatrième banque apparaît qui propose elle aussi un taux d'intérêt à 100%, mais avec des intérêts capitalisés tous les jours sur la base du taux proportionnel correspondant à un jours : $i = \frac{1}{365}$. Si notre millionnaire place un million à la banque le jour 0, voici comment augmentera sa fortune :

Après 1 jour :	$C_1 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{365} = 1 \cdot (1+\frac{1}{365}) = 1.003$ million
Après 2 jours :	$C_2 = 1.003 + 1.003 \cdot \frac{1}{365} = 1 \cdot (1+\frac{1}{365})^2 = 1.005$ million
Après 3 jours :	$C_3 = 1.005 + 1.005 \cdot \frac{1}{365} = 1 \cdot (1+\frac{1}{365})^3 = 1.008$ million
...	
Après 365 jours :	$C_{365} = 2.707 + 2.707 \cdot \frac{1}{365} = 1 \cdot (1+\frac{1}{365})^{365} = 2.714$ millions
...	

Au bout d'une année, il aura, au lieu de 2, 2.441 ou 2.613 millions, $(1+\frac{1}{365})^{365} = 2.714$ millions. Il a donc intérêt à choisir cette quatrième banque.

Capitalisation chaque "instant" (n fois par année, $n \to +\infty$)

Si enfin nous supposons qu'une cinquième banque propose de capitaliser la fortune à chaque instant sur la base d'un taux d'intérêt proportionnel correspondant à un taux annuel de 100%, le capital au bout d'une année sera le nombre vers lequel s'approche $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand n devient de plus en plus grand. En termes mathématiques, on parle de limite quand n tend vers l'infini.

Pour n suffisamment grand, on peut démontrer que le nombre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ n'est pas du tout infini, mais aussi proche qu'on le souhaite du nombre 2.718281828459045... Il est facile de constater ce phénomène sur une calculatrice. Depuis **Euler**, on désigne ce nombre par la lettre e.

Définition 19.2
On écrit

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718281828459045\ldots$$

et on dit que "le nombre e est la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini".

La **fonction exponentielle naturelle** est la fonction exponentielle de base e. Son expression fonctionnelle est $f(x) = e^x$

Remarques

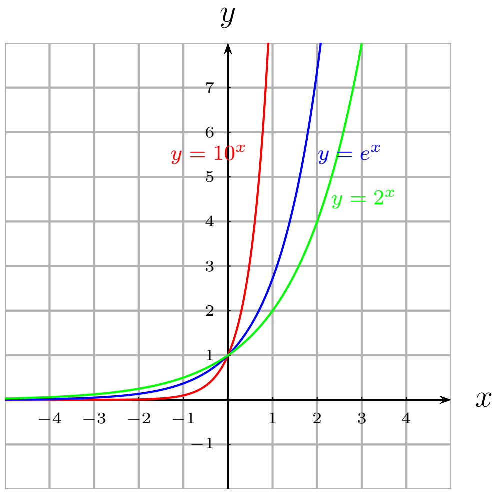
1) e est un nombre *transcendant*, comme π.
2) La fonction exponentielle naturelle est la plus utilisée des fonctions exponentielles.

19.3 Représentations graphiques et caractéristiques

Base $a > 1$

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions exponentielles de base 2 (en vert), e (en bleu) et 10 (en rouge).

La forme générale de la représentation graphique d'une fonction exponentielle de base a, avec $a > 1$, ressemble à celles données en exemple.

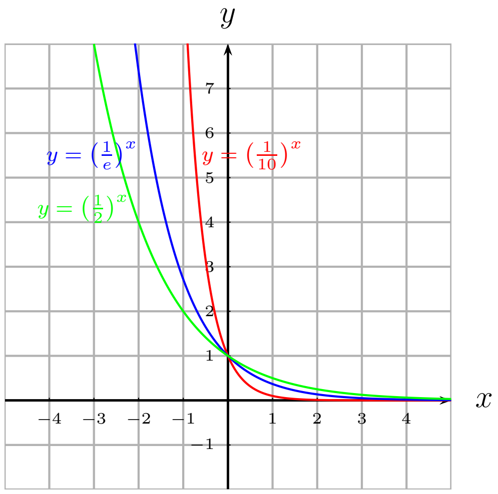


On peut remarquer que, si $a > 1$, la fonction est croissante dans $\mathbb{R}$ et toujours positive. Plus a est proche de 1 plus la courbe "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand x augmente (pour $x > 0$). Lorsque x diminue (pour $x < 0$), la courbe $y = a^x$ tend vers l'axe des abscisses. Ainsi, cette axe est une *asymptote horizontale* lorsque x tend vers $-\infty$. De plus, cette courbe passe par le point $(0, 1)$ quelque soit la base a de l'exponentielle.

Base $0 < a < 1$

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions exponentielles de base $\frac{1}{2}$ (en vert), $\frac{1}{e}$ (en bleu) et $\frac{1}{10}$ (en rouge).

La forme générale de la représentation graphique d'une fonction exponentielle de base a, avec $0 < a < 1$, ressemble à celles données en exemple.



On peut remarquer que, si $0 < a < 1$, la fonction est décroissante dans $\mathbb{R}$ et toujours positive. Plus a est proche de 1 plus la courbe "s'éloigne" rapidement de l'axe Oy quand x diminue (pour $x < 0$). Lorsque x augmente (pour $x > 0$), la courbe $y = a^x$ tend vers l'axe des abscisses. Ainsi, cette axe est une *asymptote horizontale* lorsque x tend vers $+\infty$. De plus, cette courbe passe par le point $(0, 1)$ quelque soit la base a de l'exponentielle.

19.4 Equations exponentielles

Définition 19.3
Une **équation exponentielle** à une inconnue est une équation où l'inconnue figure comme exposant d'une ou plusieurs exponentielles de même base ou de bases différentes.

Exemples

1) $e^{4x} = e^{5x^2-3}$

2) $36^{5+x} = 7$

3) $9^x \cdot 2^{2x} = \dfrac{1}{216}$

Proposition 19.1
La fonction exponentielle de base a donnée par $exp_a(x) = a^x$ est **bijective** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ pour $0 < a < 1$ ou $a > 1$.

Ainsi, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées pour tout nombre réels x_1 et x_2 :

1) Si $x_1 \neq x_2$, alors $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, alors x_1=x_2.

19.4.1 Principe de résolution

Dans ce chapitre, nous allons nous restreindre aux équations exponentielles "simples" où il est possible d'obtenir par transformations successives une équation avec uniquement des exponentielles de *même base* : $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Nous étudierons une méthode plus générale dans le chapitre suivant.

Marche à suivre pour résoudre une équation exponentielle "simple" :

1. transformer l'équation en utilisant les propriétés des exponentielles pour obtenir une équation de la forme :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x,

2. "éliminer" les bases a en utilisant l'injectivité de la fonction exponentielle (voir proposition ci-dessus) :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

3. résoudre l'équation à une inconnue $f(x) = g(x)$.

Remarques

Attention ! Cette méthode de résolution permet uniquement de résoudre des équations exponentielles de *même base* (après éventuellement quelques transformations).

Exemples

1) Résoudre : $27^{x+2} = 3^{5x+8}$.

$$\begin{array}{rcl|l}
27^{x+2} & = & 3^{5x+8} & 27 = 3^3 \\
(3^3)^{x+2} & = & 3^{5x+8} & \textit{propriétés exp} \\
3^{3x+6} & = & 3^{5x+8} & \textit{éliminer les bases} \\
3x+6 & = & 5x+8 & -5x-6 \\
-2x & = & 2 & \div(-2) \\
x & = & -1 &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{-1\}$.

Chapitre 20

Fonctions logarithmes

20.1 Introduction

Imaginons un millionnaire qui place son argent dans une banque très généreuse qui propose un taux d'intérêt à 100% ce qui signifie que la fortune du millionnaire doublera chaque année. S'il place un million à la banque l'année 0 voici comment évoluera sa fortune :

Années	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Fortune en millions (CHF)	1	2	4	8	16	32	64	128	256

On pourrait définir une fonction qui donne la fortune en millions si le nombre d'années de placement est connu. En observant le tableau ci-dessus, on remarque que cette fonction correspond à la fonction exponentielle de base 2.

Exemple : Pour 4 ans, on obtient $f(4) = 2^4 = 16$.

On peut créer la fonction qui effectue le chemin inverse (on l'appelle fonction réciproque de la fonction exponentielle) ; c'est-dire une fonction qui donne l'année lorsqu'on connaît la fortune. Cette fonction aura le nom de **logarithme** en base 2 et sera noté $\log_2$.

Exemple : $\log_2(1) = 0$, $\log_2(2) = 1$, $\log_2(4) = 2$, ...

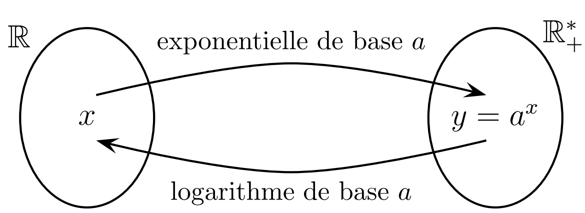
On a la relation générale suivante :

$$\log_2(x) = y \Longleftrightarrow 2^y = x \qquad (x > 0)$$

20.2 Définition et représentations graphiques

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la fonction exponentielle donnée par $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est bijective. La fonction f possède donc une fonction réciproque ${}^r\!f$.

Cette fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a est appelée **fonction logarithme de base** a et est notée $\log_a$.



Définition 20.1
Soit a un nombre réel positif différent de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).
Le **logarithme en base** a **de** x, $\log_a(x)$, est défini par :

$$\boxed{y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y}$$

pour tout $x > 0$ et tout nombre réel y.

La **fonction logarithme en base** a est alors définie par :

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a(x) \quad \text{tel que } a^y = x \end{array}$$

Noter que les deux équations données dans la définition sont équivalentes. Il faut s'entraîner à passer d'une forme à l'autre. Le diagramme suivant peut y aider.

Forme logarithmique **Forme exponentielle**

exposant

$\log_a(x) = y$ $a^y = x$

base

On remarque que, lorsqu'on passe d'une forme à l'autre, les bases des formes logarithmiques et exponentielles sont les mêmes. Le nombre y (c'est-à-dire $\log_a(x)$) correspond à l'exposant dans la forme exponentielle. On dit que :

$\log_a(x)$ EST LA PUISSANCE À LAQUELLE IL FAUT ÉLEVER a POUR TROUVER x.

Exemples

1) $\log_4(64) = 3$ *car* $4^3 = 64$.

2) $\log_{10}(100) = 2$ *car* $10^2 = 100$.

Remarque

Attention ! Le logarithme en base a d'un nombre négatif ou nul n'existe pas !!!

Bases particulières

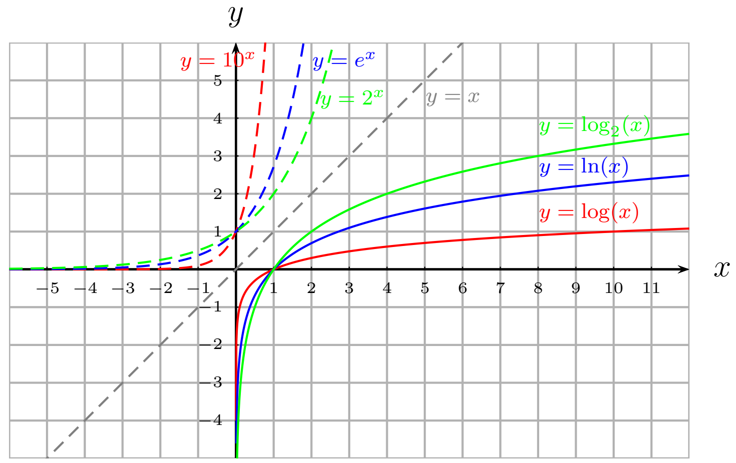
Base 10 **:** $\log_{10}(x)$ se note $\log(x)$ et s'appelle **logarithme décimal** de x.

Base $e = 2,71828\ldots$ **:** $\log_e(x)$ se note $\ln(x)$ et s'appelle **logarithme naturel** ou logarithme népérien de x.

20.2.1 Représentations graphiques

Base $a > 1$

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions exponentielles de base 2 (vert), e (bleu) et 10 (rouge), en traitillé, et des fonctions logarithmes de mêmes bases, leurs réciproques, en trait plein.

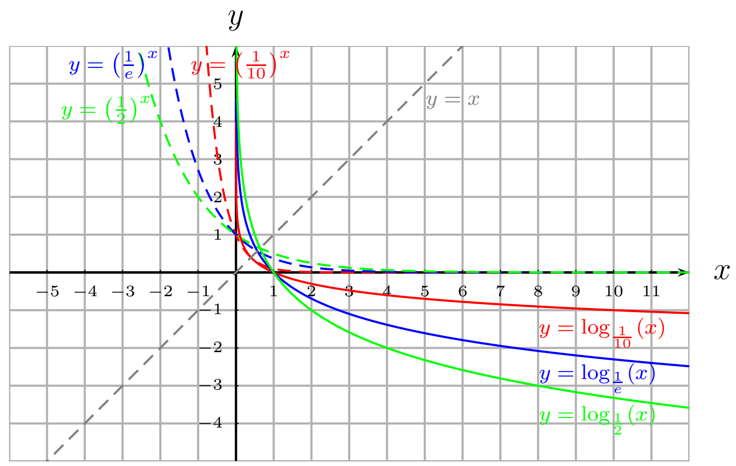


La forme générale de la représentation graphique d'une fonction logarithme de base a, avec $a > 1$, ressemble à celles données en exemple ci-dessus.

On peut remarquer que plus a est proche de 1 plus la courbe "s'éloigne" rapidement de Ox quand x augmente (pour $x > 1$) et que la courbe passe par le point $(1; 0)$ quelque soit la base a du logarithme.

Base $0 < a < 1$

On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions exponentielles de base $\frac{1}{2}$ (vert), $\frac{1}{e}$ (bleu) et $\frac{1}{10}$ (rouge), en traitillé, et des fonctions logarithmes de mêmes bases, leurs réciproques, en trait plein.



La forme générale de la représentation graphique d'une fonction logarithme de base a, avec $0 < a < 1$, ressemble à celles données en exemple ci-dessus.

On peut remarquer que plus a est proche de 1 plus la courbe "s'éloigne" rapidement de Ox quand x augmente (pour $x > 1$) et que la courbe passe par le point $(1; 0)$ quelque soit la base a du logarithme.

20.3 Propriétés

Proposition 20.1
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Quels que soient $u \in \mathbb{R}_+^*$, $v \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$, on a :

- $a^{\log_a(u)} = u$
- $\log_a(a^r) = r$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
- $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
- $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$
- $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $u \in \mathbb{R}_+^*$, $v \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$.
Par surjectivité de la fonction exponentielle, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u = a^x \quad \text{et} \quad v = a^y$$

Par définition de la fonction logarithme, ces égalités impliquent que :

$$\log_a(u) = x \quad \text{et} \quad \log_a(v) = y$$

– **A voir :** $\log_a(a^r) = r$
Cette propriété est immédiate à partir de la définition du logarithme de base a.

– **A voir :** $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$.
Des égalités ci-dessus, on tire que :

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(a^x \cdot a^y) \overset{\textit{prop. exp.}}{=} \log_a(a^{x+y}) \overset{\textit{déf. log.}}{=} x + y = \log_a(u) + \log_a(v)$$

– **A voir :** $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$.
Des égalités ci-dessus, on tire que :

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) \overset{\textit{prop. exp.}}{=} \log_a(a^{x-y}) \overset{\textit{déf. log.}}{=} x - y = \log_a(u) - \log_a(v)$$

– **A voir :** $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$.
Des égalités ci-dessus, on tire que :

$$\log_a(u^r) = \log_a((a^x)^r) \overset{\textit{prop. exp.}}{=} \log_a(a^{x \cdot r}) \overset{\textit{déf. log.}}{=} r \cdot x = r \cdot \log_a(u)$$

– Les autres égalités se démontrent de manière immédiate à partir de la définition du logarithme en base a et des propriétés démontrées ci-dessus.

□

Exemple

A l'aide des propriétés ci-dessus, on peut exprimer $\frac{1}{3}\log_a(x^2-1)-\log_a(y)-4\log_a(z)$ *sous la forme d'un logarithme :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\log_a(x^2-1)-\log_a(y)-4\log_a(z) &= \log_a((x^2-1)^{\frac{1}{3}})-\log_a(y)-\log_a(z^4)\\
&= \log_a(\sqrt[3]{x^2-1})-(\log_a(y)+\log_a(z^4))\\
&= \log_a(\sqrt[3]{x^2-1})-\log_a(y\cdot z^4)\\
&= \log_a\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{y\cdot z^4}\right)
\end{aligned}$$

20.4 Formule de changement de base des logarithmes

Une machine à calculer ne travaille qu'avec les logarithmes en base 10 et en base e. On peut cependant utiliser comme base n'importe quel nombre strictement positif différent de 1. La formule ci-dessous va nous permettre, à partir d'une base quelconque, de nous ramener à une de ces bases particulières pour réaliser le calcul du logarithme.

Proposition 20.2
Si $u > 0$ et si a et b sont des nombres réels positifs différents de 1, alors

$$\boxed{\log_b(u)=\frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}}$$

On appelle cette égalité la **formule de changement de base des logarithmes**.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $u \in \mathbb{R}_+^*$.
Par surjectivité de la fonction exponentielle, il existe $x \in \mathbb{R}$ tels que : $u = b^x$.
On obtient alors que :

$$u=b^x \iff \left.\begin{array}{l}\log_a(u)=\log_a(b^x)=x\cdot\log_a(b)\\ x=\log_b(u)\end{array}\right\} \implies \log_a(u)=\log_b(u)\cdot\log_a(b)$$

et donc que : $\log_b(u)=\dfrac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$ □

Exemple

Calculer : $\log_7(21)$.
A l'aide de la formule de changement de base des logarithmes, on trouve que :

$$\log_7(21)=\frac{\log(21)}{\log(7)}\cong\frac{1,32222}{0,84510}\cong 1,56457$$

On pourrait également effectuer le calcul suivant :

$$\log_7(21)=\frac{\ln(21)}{\ln(7)}\cong\frac{3,04452}{1,94591}\cong 1,56457$$

20.5 Equations logarithmiques

Définition 20.2
Une **équation logarithmique** à une inconnue est une équation où l'inconnue figure dans un ou plusieurs logarithmes de même base ou de bases différentes.

Exemples

1) $\ln(x+6) - \ln(10) = \ln(x-1) - \ln(2)$

2) $\log_4(5+x) = 3$

3) $\log_9(x) = \dfrac{1}{8}\log_3(x^2+2)$

20.5.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation logarithmique :

1. transformer l'équation en utilisant les propriétés des logarithmes pour obtenir une équation de la forme :

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x,

2. "éliminer" les $\log_a$ en utilisant l'injectivité de la fonction logarithme :

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

3. résoudre l'équation à une inconnue $f(x) = g(x)$,

4. **vérifier** les solutions obtenues dans l'équation de départ !

Remarques

1) **Attention !** Le fait d'éliminer les logarithmes par injectivité peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

2) $f(x) = g(x) \not\Rightarrow \log_a(f(x)) = \log_b(g(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $f(x)$ et $g(x)$ pourraient être négatifs pour des x particuliers.

Exemples

1) Résoudre : $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$.

$$\begin{array}{rcl|l}
\log(x+1) - \log(3) & = & \log(2x-3) + \log(7) & \textit{propriétés log} \\
\log\left(\frac{x+1}{3}\right) & = & \log(7(2x-3)) & \textit{éliminer } \log \\
\frac{x+1}{3} & = & 7(2x-3) & \cdot 3 \\
x+1 & = & 42x - 63 & -x+63 \\
64 & = & 41x & \div 41 \\
\frac{64}{41} & = & x &
\end{array}$$

Important ! *Il faut maintenant vérifier la solution obtenue en la substituant à x dans l'équation de départ.*

Vérification

$$* \ \underbrace{\underbrace{\log\left(\frac{64}{41}+1\right)}_{0{,}408} - \underbrace{\log(3)}_{0{,}477}}_{-0{,}069} \stackrel{?}{=} \underbrace{\underbrace{\log\left(2\cdot\frac{64}{41}-3\right)}_{-0{,}914} + \underbrace{\log(7)}_{0{,}845}}_{-0{,}069} \longrightarrow O.K.$$

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S = \{\frac{64}{41}\}$.

1) Résoudre : $2\log_3(x) = 1 + 2\log_9(4x+15)$

Pour pouvoir résoudre cette équation logarithmique, il faut choisir une base unique entre 3 et 9. On conservera ici la base 3 (pas de règle précise pour réaliser ce choix) et on utilisera la formule de changement de base pour modifier $log_9(4x+15)$.

De plus, il faut "transformer" le nombre réel 1 en une expression contenant un $\log_3 \longrightarrow 1 = \log_3(3)$.

$$\begin{array}{rcl|l}
2\log_3(x) & = & 1 + 2\log_9(4x+15) & \textit{propriétés et formules log} \\
\log_3(x^2) & = & \log_3(3) + \frac{2\log_3(4x+5)}{\log_3(9)} & \textit{propriétés log} \\
\log_3(x^2) & = & \log_3(3(4x+15)) & \textit{éliminer } \log_3 \\
x^2 & = & 12x + 45 & -12x - 45 \\
x^2 - 12x - 45 & = & 0 &
\end{array}$$

On résout alors l'équation du deuxième degré $x^2 - 12x - 45 = 0$ *à l'aide de la formule de résolution.*

- *Discriminant :* $\Delta = (-12)^2 - 4\cdot 1\cdot(-45) = 324 = 18^2$.
- $\Delta > 0$ *: 2 solutions distinctes :*

$$* \ x_1 = \frac{-(-12)+\sqrt{324}}{2\cdot 1} = \frac{12+18}{2} = 15$$

$$* \ x_2 = \frac{-(-12)-\sqrt{324}}{2\cdot 1} = \frac{12-18}{2} = -3$$

Vérification

$$* \ \underbrace{2\underbrace{\log_3(15)}_{2{,}465}}_{4{,}930} \stackrel{?}{=} \underbrace{1 + 2\underbrace{\log_9(4\cdot 15+15)}_{1{,}965}}_{4{,}930} \longrightarrow O.K.$$

$$* \ 2\log_3(\underbrace{-3}_{<0}) \stackrel{?}{=} 1 + 2\underbrace{\log_9(4\cdot(-3)+15)}_{...} \longrightarrow Non$$

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S = \{15\}$.

20.6 Equations exponentielles

On a vu, au chapitre sur les fonctions exponentielles, comment résoudre une équation exponentielle où il était possible d'obtenir par transformations successives une équation avec uniquement des puissances de même base : $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, ce qui représente un "petit nombre" d'équations.

On donne ci-dessous une méthode, s'appuyant sur les logarithmes, pour résoudre des équations où il est impossible d'obtenir des puissances de même base (méthode de résolution plus générale).

20.6.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation exponentielle :

1. transformer l'équation en utilisant les propriétés des exponentielles pour obtenir une équation de la forme :

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

où f et g sont des fonctions de l'inconnue x,

2. "éliminer" les puissances en utilisant les logarithmes :

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Longleftrightarrow \log(a^{f(x)}) = \log(b^{g(x)}) \Longleftrightarrow f(x) \cdot \log(a) = g(x) \cdot \log(b)$$

3. résoudre l'équation à une inconnue $f(x) \cdot \log(a) = g(x) \cdot \log(b)$.

Remarque

On peut utiliser une autre base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ que la base 10 pour effectuer les transformations équivalentes de 2.

Exemples

1) Résoudre : $3^{2x} = 15$

$$\begin{array}{rcl|l} 3^{2x} & = & 15 & \log(\ldots) \textit{ (éliminer les puissances)} \\ \log(3^{2x}) & = & \log(15) & \textit{propriétés log} \\ 2x \cdot \log(3) & = & \log(15) & \div 2\log(3) \\ x & = & \underbrace{\dfrac{\log(15)}{2\log(3)}}_{\cong 1{,}232} & \end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{\log(15)}{2\log(3)} \right\}$.

2) Résoudre : $\dfrac{9}{3^{3x}} = 2 \cdot 8^x$

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{9}{3^{3x}} & = & 2 \cdot 8^x & \textit{propriétés exp} \\ 3^2 \cdot 3^{-3x} & = & 2 \cdot 2^{3x} & \textit{propriétés exp} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l}
3^{2-3x} & = & 2^{1+3x} & \log(\ldots) \\
\log(3^{2-3x}) & = & \log(2^{1+3x}) & \textit{propriétés log} \\
(2-3x)\log(3) & = & (1+3x)\log(2) & +3\log(3)\cdot x - \log(2) \\
2\log(3)-\log(2) & = & x\cdot(3\log(2)+3\log(3)) & \div(3\log(2)+3\log(3)) \\
\underbrace{\dfrac{2\log(3)-\log(2)}{3\log(2)+3\log(3)}}_{\cong 0{,}321} & = & x &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\frac{2\log(3)-\log(2)}{3\log(2)+3\log(3)}\right\}$.

20.7 Exercices

1) Mettre sous la forme $m\log(a)+n\log(b)$:

a) $\log(a^2b^{-6})$

b) $\log\left(\dfrac{b^4}{a^{-3}}\right)$

c) $\log\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{b}}\right)$

d) $\log\left(\dfrac{a^3b^{-1}}{c\sqrt{d}}\right)$

2) Résoudre les équations suivantes.

a) $2\log(3x-2)=1+\log(2)+\log(x+1)$

b) $\log(\sqrt{x+1})+\log(\sqrt{x-1})=\log(5)$

c) $\log(2x-5)+\log(3x+7)=4\log(2)$

d) $\log(x^2+3x+1)=2$

e) $\log(20)+\log(x^2-4)-\log(x-2)=1+\log(2x+4)$

f) $\log_4(x)=-3+\log_2(x+16)$

g) $\log(x^2)=(\log(x))^2$

h) $\log_3(x)\cdot\log_9(x)=2$

20.8 Solutions des exercices

1) a) $2\log(a) - 6\log(b)$ b) $3\log(a) + 4\log(b)$

c) $\dfrac{1}{3}\log(a) - \dfrac{1}{2}\log(b)$ d) $3\log(a) - \log(b) - \log(c) - \dfrac{1}{2}\log(d)$

2) a) 4 b) $\sqrt{26}$ c) 3 d) $x_1 = 8.66,\ x_2 = -11.66$

e) $x \in]2;\infty[$ f) 16 g) $x_1 = 1,\ x_2 = 100$ h) $x_1 = \dfrac{1}{9},\ x_2 = 9$

Chapitre 21

Fonctions trigonométriques

21.1 Définitions et représentations graphiques

21.1.1 Fonctions cosinus et sinus

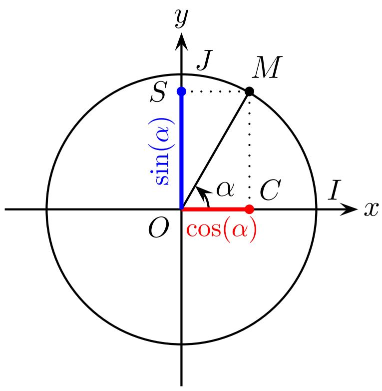
Définition 21.1

Soit $P(1;0)$ sur le cercle trigonométrique. Soit encore M, l'image de P par une rotation de centre O et d'angle α.

On appelle **cosinus** de l'angle α, noté $\cos(\alpha)$, la première coordonnée ou abscisse de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OC, où C est la projection de M sur l'axe des abscisses.

On appelle **sinus** de l'angle α, noté $\sin(\alpha)$, la seconde coordonnée ou ordonnée de M. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment OS, où S est la projection de M sur l'axe des ordonnées.

On note : $M(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$



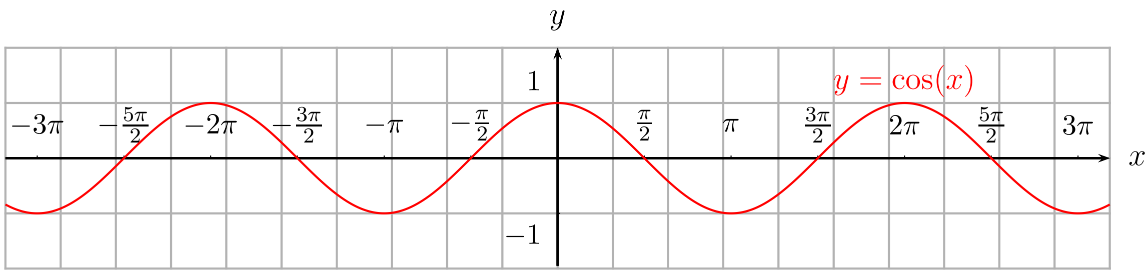
Représentations graphiques

En général, le radian sera utilisé comme unité de mesure (sauf indication contraire). Ainsi, si on parle de la fonction $f(x) = \sin(x)$, il est entendu que x est exprimé en radians. Les calculatrices doivent donc être convenablement configurées pour travailler avec les fonctions trigonométriques.

La représentation graphique de la fonction cosinus :

$$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

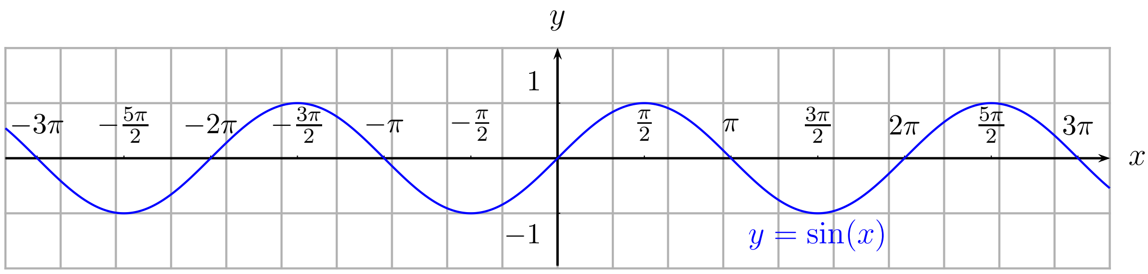
est donnée ci-dessous.



La représentation graphique de la fonction sinus :

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

est donnée ci-dessous.



Propriétés

La fonction cosinus possède les propriétés suivantes :
- son ensemble de définition est $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$.
- son ensemble image est l'intervalle $[-1;1]$.
- elle est une fonction paire car pour tout $x \in \mathcal{D}_{\cos}$ on a $\cos(-x) = \cos(x)$.
- elle est une fonction bornée.

La fonction sinus possède les propriétés suivantes :
- son ensemble de définition est $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$.
- son ensemble image est l'intervalle $[-1;1]$.
- elle est une fonction impaire car pour tout $x \in \mathcal{D}_{\sin}$ on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- elle est une fonction bornée.

21.1.2 Les fonctions tangente et cotangente

Définition 21.2
Soit $M(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ sur le cercle trigonométrique.

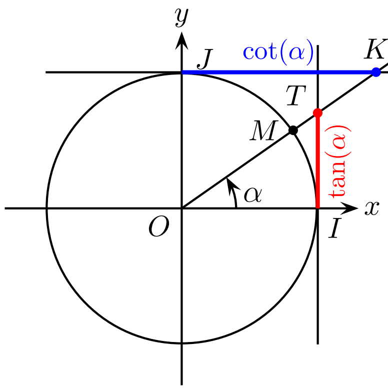
On définit le point T comme l'intersection entre la droite passant par $(0;0)$ et M et la droite verticale tangente au cercle au point $I(1;0)$.

On définit encore le point K comme l'intersection entre la droite passant par $(0;0)$ et M (la même que ci-dessus) et la droite horizontale tangente au cercle au point $J(0;1)$.

On appelle **tangente** de l'angle α, noté $\tan(\alpha)$, l'ordonnée de T. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment IT.

On appelle **cotangente** de l'angle α, noté $\cot(\alpha)$, l'abscisse de K. Celle-ci correspond à la mesure algébrique du segment JK.

On note : $T(1; \tan(\alpha))$ et $K(\cot(\alpha); 1))$.



Remarques

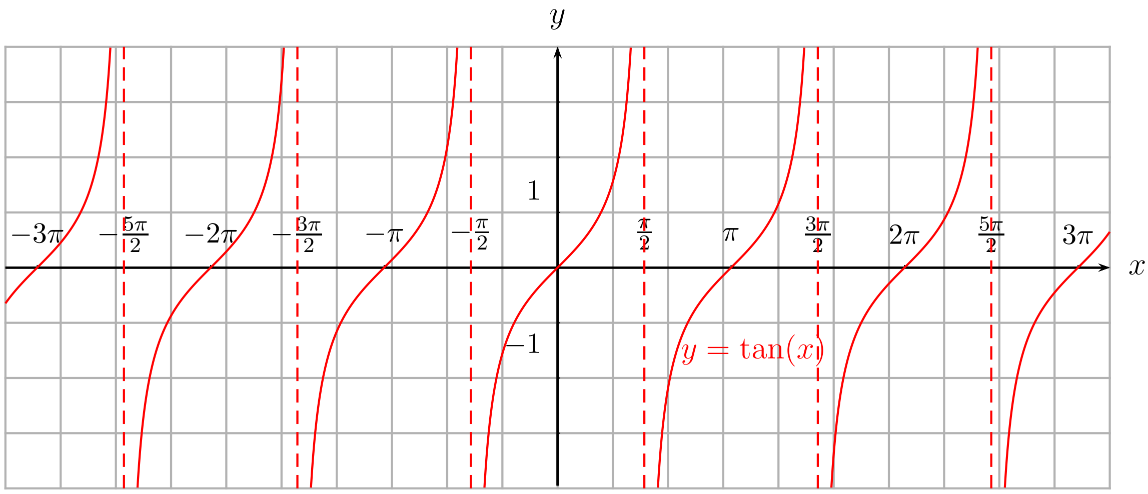
1. Lorsque la droite passant par $(0;0)$ et M est verticale, la tangente de l'angle correspondant n'est pas définie (il n'y a pas de point d'intersection comme les deux droites sont verticales). Ceci se produit pour les angles de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Lorsque la droite passant par $(0;0)$ et M est horizontale, la cotangente de l'angle correspondant n'est pas définie (il n'y a pas de point d'intersection comme les deux droites sont horizontales). Ceci se produit pour les angles de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Représentations graphiques

La représentation graphique de la fonction tangente :

$$\begin{array}{rccl} \tan : & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

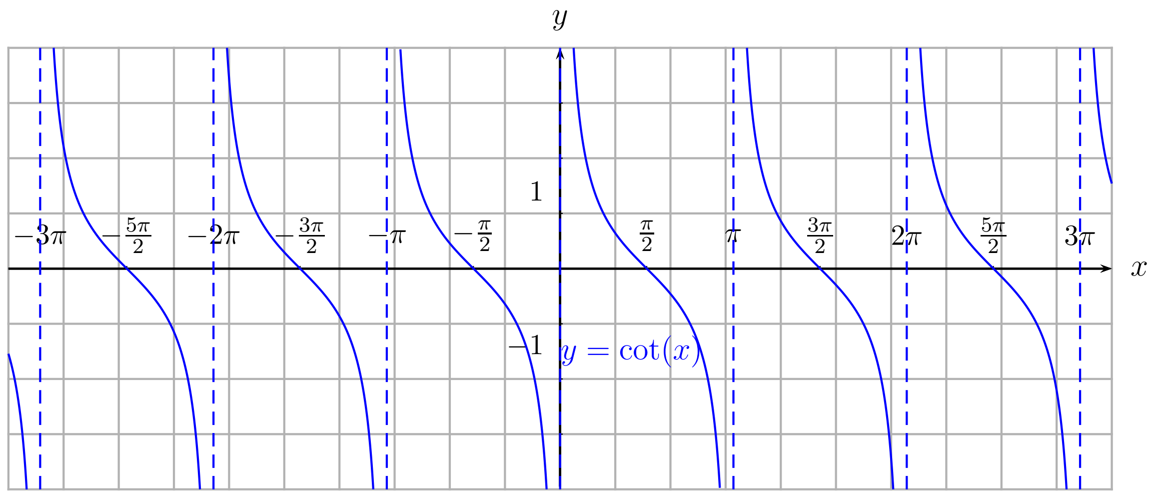
est donnée ci-dessous.



La représentation graphique de la fonction cotangente :

$$\begin{array}{rccl} \cot : & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cot(x) \end{array}$$

est donnée ci-dessous.



Propriétés

La fonction tangente possède les propriétés suivantes :
- son ensemble de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- son ensemble image est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$.
- elle est une fonction impaire car pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$ on a $\tan(-x) = -\tan(x)$.
- elle est une fonction non bornée.

La fonction cotangente possède les propriétés suivantes :
- son ensemble de définition est $\mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- son ensemble image est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$.
- elle est une fonction impaire car pour tout $x \in \mathcal{D}_{\cot}$ on a $\cot(-x) = -\cot(x)$.
- elle est une fonction non bornée.

21.1.3 Fonctions périodiques

En considérant les figures qui nous ont permis de définir les fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente, on constate que l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de 2π ne change pas le point M sur le cercle trigonométrique. De même, l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de π ne change pas le point T, ni le point K.

De même, sur les représentations graphiques, on remarque que, en "décalant" la fonction sinus ou cosinus de 2π vers la droite ou vers la gauche, elle ne se modifie pas (le dessin reste le même). La même observation peut être faite pour les fonctions tangente et cotangente avec un décalage de π.

Ainsi, par définition des fonctions trigonométriques, on a

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \cos(\alpha), && \forall k \in \mathbb{Z} \\
\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \sin(\alpha), && \forall k \in \mathbb{Z} \\
\tan(\alpha + k \cdot \pi) &= \tan(\alpha), && \forall k \in \mathbb{Z} \\
\cot(\alpha + k \cdot \pi) &= \cot(\alpha), && \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π et que les fonctions tangente et cotangente sont **périodiques** de période π.

Remarques

1. Pour les fonction sinus et cosinus, le nombre k représente le nombre de tours entre deux angles ayant, respectivement, le même sinus ou le même cosinus.
2. Pour les fonction tangente et cotangente, le nombre k représente le nombre de demi-tours entre deux angles ayant, respectivement, la même tangente ou la même cotangente.

Plus généralement, on a la définition suivante.

Définition 21.3
Une fonction f de D ($D \subset \mathbb{R}$) vers $\mathbb{R}$ est **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{R}_+^*$, tel que, pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x + p \in D \\ \text{b)} & f(x+p) = f(x) \end{array}$$

Le plus petit nombre réel strictement positif p satisfaisant cette condition est appelé la **période** de f. Pour tout multiple entier kp ($k \in \mathbb{Z}$) de p, on a :

$$x + kp \in D \quad \text{et} \quad f(x+kp) = f(x) \qquad \forall x \in D.$$

La connaissance du graphe de f restreinte à un intervalle de longueur p permet de représenter le graphe de f sur D tout entier, grâce à des translations dans la direction de l'axe Ox.

21.1.4 Fonctions sinusoïdales

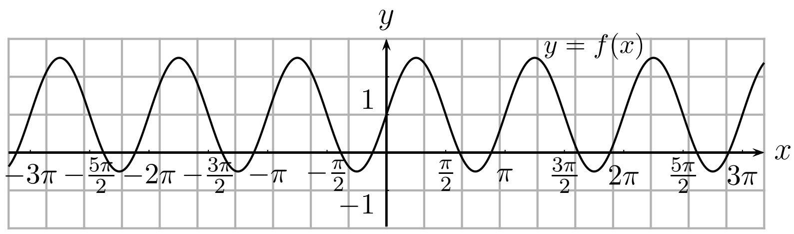
Définition 21.4
Une fonction f est dite **sinusoïdale** s'il existe quatre nombres nombres réels a, b, c et d, tel que :

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

On appelle a l'**amplitude** et c le **déphasage**.

Exemple

Le graphique de la fonction sinusoïdale $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(2(x - \pi)) + 1$ *est donnée ci-dessous.*



Effets des paramètres a, b, c et d

Durant les exercices, nous donnerons une interprétation des effets des paramètres a, b, c et d dans le cas d'une fonction sinusoïdale en se basant sur les représentations graphiques de quelques fonctions réalisées sur papier millimétré.

21.1.5 Fonctions réciproques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives si on considère comme ensemble de départ $\mathbb{R}$. En effet, elles ne sont pas injectives car plusieurs angles (une infinité) possèdent le même sinus, respectivement, le même cosinus ou la même tangente. Par contre, on peut obtenir des fonctions bijectives si on restreint l'ensemble de départ de ces fonctions.

Propriétés

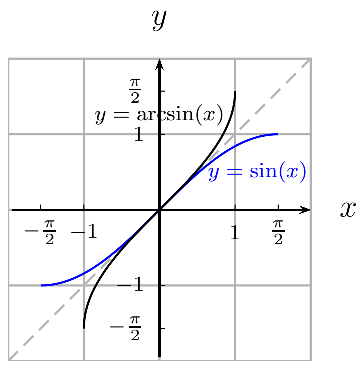
1. La fonction sinus est bijective si on considère comme ensemble de départ l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et comme ensemble d'arrivée l'intervalle $[-1; 1]$.
2. La fonction cosinus est bijective si on considère comme ensemble de départ l'intervalle $[0; \pi]$ et comme ensemble d'arrivée l'intervalle $[-1; 1]$.
3. La fonction tangente est bijective si on considère comme ensemble de départ l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et comme ensemble d'arrivée l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

L'avantage d'avoir des fonctions bijectives réside dans le fait qu'il existe alors des fonction réciproques.

Définition 21.5

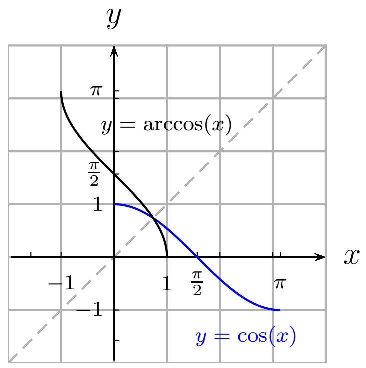
1. On appelle $\arcsin(x)$, l'arc compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x. La fonction arcsinus est alors la fonction réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{array}{rccl} \arcsin: & [-1;1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & y = \arcsin(x) \\ & & & \text{tel que } \sin(y) = x \end{array}$$



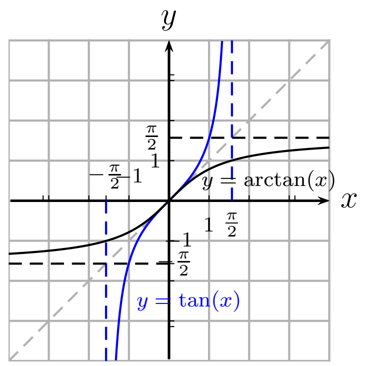
2. On appelle $\arccos(x)$, l'arc compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x. La fonction arccosinus est alors la fonction réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0; \pi]$.

$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1;1] & \longrightarrow & [0; \pi] \\ & x & \longmapsto & y = \arccos(x) \\ & & & \text{tel que } \cos(y) = x \end{array}$$



3. On appelle $\arctan(x)$, l'arc compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x. La fonction arctangente est alors la fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{array}{rccl} \arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & y = \arctan(x) \\ & & & \text{tel que } \tan(y) = x \end{array}$$



Exemples

1. $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
2. $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$
3. $\arcsin(2)$ *n'existe pas.*

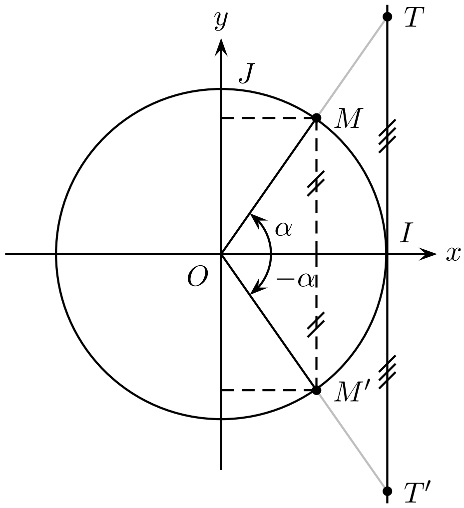
21.2 Formules de symétries, d'addition, de duplication et de bissection

21.2.1 Formules de symétries

On peut lier les valeurs des fonctions trigonométriques pour certains angles en utilisant des symétries axiales au sein du cercle trigonométrique.

La symétrie d'axe horizontal ($y = 0$)

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $-\alpha$, les points correspondants sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.



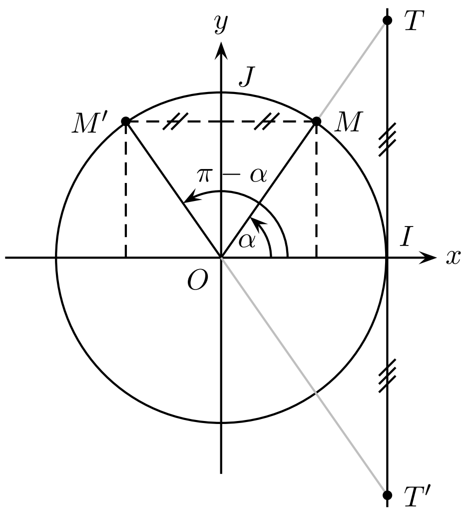
Cette symétrie ne change pas la première coordonnée d'un point du plan, mais change le signe de la deuxième coordonnée.

On a ainsi les *formules de symétrie horizontale* suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\ \tan(-\alpha) & = & -\tan(\alpha) \end{array}}$$

Symétrie d'axe vertical ($x = 0$)

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $\pi - \alpha$, les points correspondants sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe vertical.



Cette symétrie change le signe de la première coordonnée d'un point du plan, mais ne change pas la deuxième coordonnée.

Pour la tangente, on utilise la formule $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ pour obtenir que $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ (ce que montre également le dessin).

On a ainsi les *formules de symétrie verticale* suivantes :

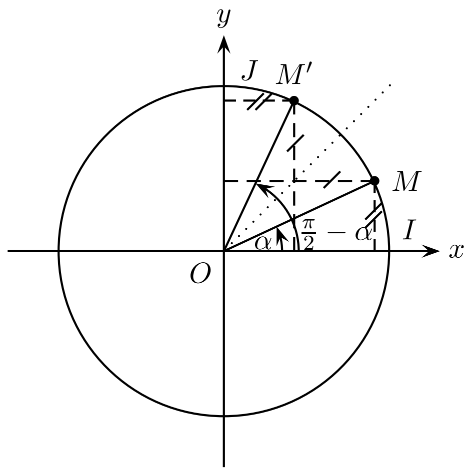
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(\pi-\alpha) & = & -\cos(\alpha) \\ \sin(\pi-\alpha) & = & \sin(\alpha) \\ \tan(\pi-\alpha) & = & -\tan(\alpha) \end{array}}$$

Symétrie dont l'axe est la première bissectrice ($y = x$)

Lorsqu'à un angle α, on associe l'angle $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, les points correspondants sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Cette symétrie échange les coordonnées : la première devient la seconde et vice-versa.

Pour la tangente, on utilise à nouveau la formule $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ pour obtenir que $\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} = \cot(\alpha)$.



On a ainsi les *formules de symétrie dont l'axe est la première bissectrice* suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & = & \sin(\alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) & = & \dfrac{1}{\tan(\alpha)} \end{array}}$$

21.2.2 Formules d'addition et de soustraction

Est-il vrai que $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)+\sin(\beta)$? Un cas particulier permet de montrer que ceci n'est pas le cas :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

mais

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$$

On voit donc par cet exemple que la fonction sinus n'est pas linéaire. En fait, aucune des fonctions trigonométriques ne l'est. Mais que vaut donc $\sin(\alpha+\beta)$?

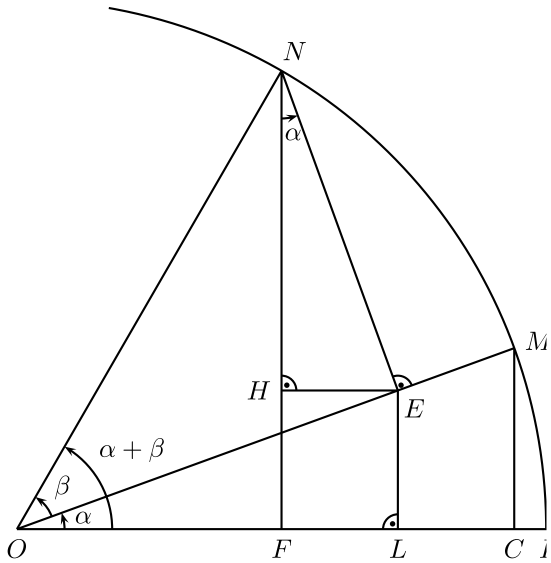
Propriétés

On a les formules d'addition et de soustraction suivantes pour chacune des fonctions trigonométriques.

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
5. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
6. $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Démonstration. Nous allons démontrer les 6 formules d'addition et de soustraction données ci-dessus.

1. A voir : $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$.



Par construction :

$OM = 1$; $OC = \cos(\alpha)$; $MC = \sin(\alpha)$; $OE = \cos(\beta)$; $NE = \sin(\beta)$; $NF = \sin(\alpha+\beta)$;
$\widehat{HNE} = \alpha$; $EL = HF$; $NH = NE\cos(\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha)$.

De plus, les triangles OEL et OMC sont semblables, d'où

$$\frac{EL}{MC} = \frac{OE}{OM} \quad \text{ou} \quad EL = \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Finalement, $\sin(\alpha+\beta) = NF = NH + HF$ et donc

$$NH + HF = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

2. A voir : $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$.

   On a immédiatement :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))=\sin(\alpha)\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos(\alpha)\\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

3. A voir : $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

   En utilisant les propriétés de symétries et celles démontrées ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+(\beta+\frac{\pi}{2})\right)\\ &= \sin(\alpha)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

   Or $\cos(\beta+\frac{\pi}{2})=-\sin(\beta)$ et $\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=\cos(\beta)$ et donc

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

4. A voir : $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

   On a immédiatement :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

5. + 6. A voir : $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

   En utilisant les formules démontrées ci-dessus et la définition de la fonction tangente, on obtient :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\pm\frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\mp\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

□

21.2.3 Formules de duplication

Propriétés

On a les formules de duplication suivantes pour chacune des fonctions trigonométriques.

1. $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
3. $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Démonstration. Les démonstrations sont immédiates en utilisant les formules d'addition.

Ainsi, $\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Les autres démonstrations sont laissées au lecteur. □

21.2.4 Formules de bissection

Propriétés

On a les formules de bissection suivantes pour chacune des fonctions trigonométriques.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2} \\ 2. & \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\alpha)}{2} \\ 3. & \tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \end{array}}$$

Les démonstrations de ces formules sont laissées au lecteur.

21.3 Equations trigonométriques

Définition 21.6
On appelle **équation trigonométrique** toute équation comportant des fonctions trigonométriques de l'inconnue (ou des inconnues).

Exemples

1. $\cos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\cos(2x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$

21.3.1 Equations du type $\sin(x) = c$

Equation : $\sin(x) = c$

Pour résoudre une équation du type $\sin(x) = c$, avec $|c| \leqslant 1$, on utilise l'équivalence (on travaille en radians) :

$$\sin(x) = c \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \arcsin(c) & +k\cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 & = & \pi - \arcsin(c) & +k\cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

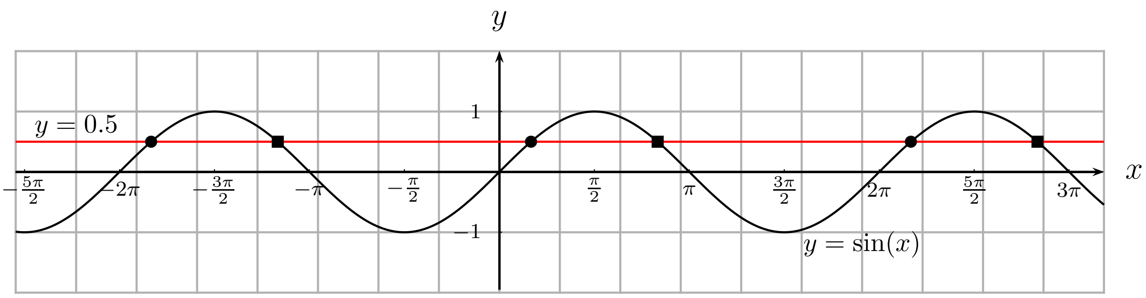
On obtient ainsi **deux** familles de solutions.

Illustration

Le schéma ci-dessous montre les intersections de la courbe $y = \sin(x)$ avec la droite horizontale $y = 0.5$. Ces points d'intersections correspondent aux solutions de l'équation :

$$\sin(x) = 0.5$$

On remarque qu'il existe bien deux familles de solutions : les "ronds" et les "carrés". Chaque famille comprend une infinité de solutions.



Equation : $\cos(x) = c$

Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = c$, avec $|c| \leqslant 1$, on utilise l'équivalence :

$$\cos(x) = c \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \arccos(c) + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

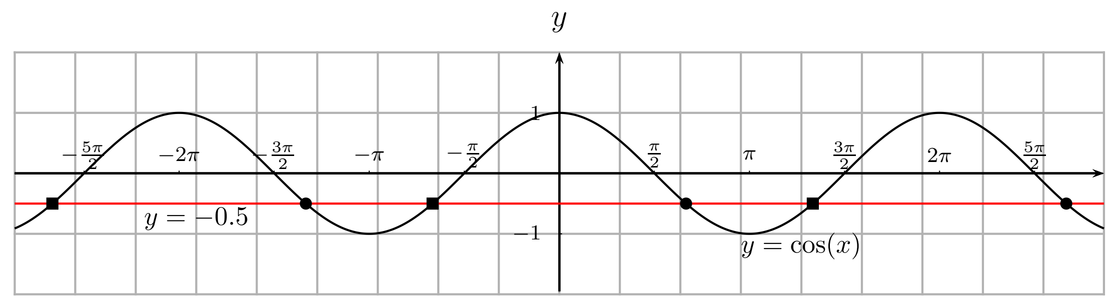
On obtient ainsi **deux** familles de solutions.

Illustration

Le schéma ci-dessous montre les intersections de la courbe $y = \cos(x)$ avec la droite horizontale $y = -0.5$. Ces points d'intersections correspondent aux solutions de l'équation :

$$\cos(x) = -0.5$$

On remarque qu'il existe bien deux familles de solutions : les "ronds" et les "carrés". Chaque famille comprend une infinité de solutions.



Equation : $\tan(x) = c$

Pour résoudre une équation du type $\tan(x) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, on utilise l'équivalence :

$$\tan(x) = c \Longleftrightarrow x = \arctan(c) + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

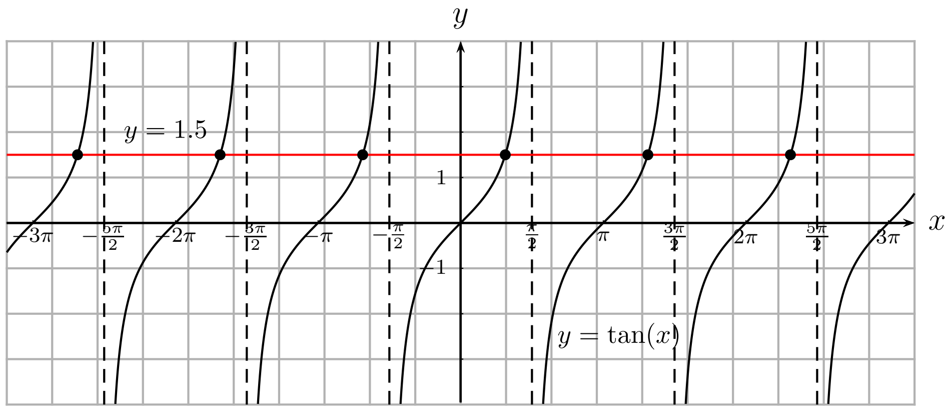
On obtient ainsi **une** famille de solutions.

Illustration

Le schéma ci-dessous montre les intersections de la courbe $y = \tan(x)$ avec la droite horizontale $y = 1.5$. Ces points d'intersections correspondent aux solutions de l'équation :

$$\tan(x) = 1.5$$

On remarque qu'il existe bien une famille de solutions : les "ronds". Cette famille comprend une infinité de solutions.



Exemples

1. *Résoudre l'équation :* $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

   Comme $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$*, on obtient immédiatement les deux familles de solutions :*

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\pi}{6} &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ x_2 &= \pi-\frac{\pi}{6} &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

   ou, en simplifiant l'expression des solutions :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\pi}{6} &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ x_2 &= \frac{5\pi}{6} &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

   Remarque : *on exprime, si cela est possible, les réponses sous forme exacte.*

2. *Résoudre l'équation :* $\cos(2x) = -0.75$.

   Comme $\arccos(-0.75) = 2.4188$*, on obtient que :*

$$\begin{cases} 2x_1 &= 2.4188 &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ 2x_2 &= -2.4188 &+k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

   On isole alors x_1 *et* x_2 *en divisant par* 2 *chacun des membres des égalités données ci-dessus pour obtenir les familles de solutions :*

$$\begin{cases} x_1 &= 1.2094 &+k\cdot \pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ x_2 &= -1.2094 &+k\cdot \pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

   Attention *: le terme* $k\cdot 2\pi$ *est également divisé par* 2.

3. *Résoudre l'équation :* $\tan(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{5}) = \sqrt{3}$.

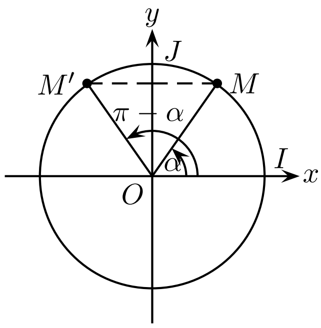
   Comme $\arctan(\sqrt{3}) = 1.0472$*, on obtient que :*

$$\frac{x}{4}+\frac{\pi}{5} \quad = \quad 1.0472 \quad +k\cdot\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

   On transforme alors cette expression afin d'isoler x *:*

$$\begin{array}{rcll|l} \frac{x}{4}+\frac{\pi}{5} &=& 1.0472 & +k\cdot\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & -\frac{\pi}{5} \\ \frac{x}{4} &=& 0.4189 & +k\cdot\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & \cdot 4 \\ x &=& 1.6755 & +k\cdot 4\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & \end{array}$$

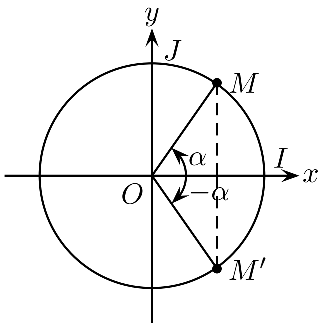
21.3.2 Equations du type $\sin(x) = \sin(\alpha)$



Equation : $\sin(x) = \sin(\alpha)$

On a **deux** familles de solutions pour une équation du type $\sin(x) = \sin(\alpha)$:

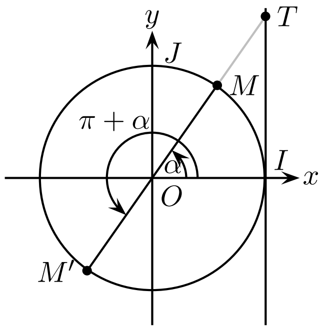
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \quad \text{(angles égaux)} \\ x_2 = \pi-\alpha + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \quad \text{(angles supplémentaires)} \end{cases}$$



Equation : $\cos(x) = \cos(\alpha)$

On a **deux** familles de solutions pour une équation du type $\cos(x) = \cos(\alpha)$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \quad \text{(angles égaux)} \\ x_2 = -\alpha + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \quad \text{(angles opposés)} \end{cases}$$



Equation : $\tan(x) = \tan(\alpha)$

On a **une** famille de solutions pour une équation du type $\tan(x) = \tan(\alpha)$:

$$x = \alpha + k\cdot\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \quad \text{(angles égaux ou de différence } \pi\text{)}$$

Exemples

1. *Résoudre l'équation :* $\sin(2x) = \sin(x+\pi)$.

   On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 2x_1 = x_1+\pi + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ 2x_2 = \pi-(x_2+\pi) + k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

   On isole alors x_1 et x_2 dans les deux égalités :

$$\left\{\begin{array}{rcll|l} 2x_1 &=& x_1+\pi & +k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & -x_1 \\ 2x_2 &=& -x_2 & +k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & +x_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcll|l} x_1 &=& \pi & +k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & \\ 3x_2 &=& 0 & +k\cdot 2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} & \cdot\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 &= \pi &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ x_2 &= 0 &+k\cdot \frac{2}{3}\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

2. *Résoudre l'équation :* $\cos(2x) = \sin(3x)$*.*

   On utilise les formules de symétrie dont l'axe est la $1^{\text{ère}}$ *bissectrice pour se ramener à une équation simple.*

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \sin(3x) \\ \cos(2x) &= \cos(\frac{\pi}{2} - 3x) \end{aligned}$$

   On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 2x_1 &= \frac{\pi}{2} - 3x_1 &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ 2x_2 &= -(\frac{\pi}{2} - 3x_2) &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} +3x_1 \\ -3x_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 5x_1 &= \frac{\pi}{2} &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ -x_2 &= -\frac{\pi}{2} &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot(-1) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\pi}{10} &+k\cdot \frac{2}{5}\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} &+k\cdot 2\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

21.3.3 Equations réductibles à une équation de degré 2 en $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ ou $\tan(x)$

Pour ce type d'équations, on présente ici uniquement une méthode de résolution appliquée à un exemple.

Exemple

Résoudre l'équation : $4\sin^2(x) - 3\cos(x) = 3$
A l'aide de la relation fondamentale $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$*, on se ramène tout d'abord à une équation du deuxième degré en* $\cos(x)$*.*

$$\begin{aligned} 4\cdot(1-\cos^2(x)) - 3\cos(x) - 3 &= 0 \\ -4\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

On pose ensuite $t = \cos(x)$ *et on résout l'équation :*

$$4t^2 + 3t - 1 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont $t_1 = \frac{1}{4}$ *et* $t_2 = -12$*.*
On résout ensuite chacune des deux équations simples :

a) $\cos(x) = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x_1 = 1.3181 + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -1.3181 + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

b) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

21.3.4 Equations du type : $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

Idées d'une méthode de résolution

a) Si $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$,

on transforme l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = 0$ comme suit :

$$\begin{aligned} a\cos(x) &= -b\sin(x) \\ \tan(x) &= -\frac{a}{b} \end{aligned}$$

On utilise ensuite la méthode usuelle pour résoudre une équation du type $\tan(x) = c$.

Pour être certain de ne pas oublier de solutions, il faut encore tester si la famille d'angles $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est solution de l'équation de départ (calculs pour $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$).

b) Si $c \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$,

on transforme l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$ en posant :

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

On obtient alors une équation du deuxième degré, au plus, en $\tan(\frac{x}{2})$, qu'on peut résoudre en utilisant les méthodes vues précédemment.

Pour simplifier les notations et les calculs, on pose généralement $t = \tan(\frac{x}{2})$ afin d'obtenir l'équation

$$a \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + b \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = c$$

Pour être certain de ne pas oublier de solutions, il faut encore tester si la famille d'angles $\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est solution de l'équation de départ (calculs pour π).

Remarques

1. Une équation du type $a\cos(x) + b\sin(x) = c$ (du premier degré en $\cos(x)$ et $\sin(x)$) est appelée une équation **linéaire**.
2. Les relations entre $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(\frac{x}{2})$ peuvent être démontrées à partir des formules de bissection.
3. D'autres méthodes de résolution sont possibles

Exemple

Résoudre l'équation $\cos(x) + 3\sin(x) = 3$
En exprimant $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ *en fonction de* $\tan(\frac{x}{2})$ *et en posant* $t = \tan(\frac{x}{2})$, *on obtient l'équation :*

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} = 3$$

On peut résoudre cette équation en utilisant les techniques habituelles :

$$\begin{aligned} 1 - t^2 + 6t &= 3 \cdot (1 + t^2) \\ 4t^2 - 6t + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ (2t - 1) \cdot (t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Les deux solutions de cette équation sont $t_1 = \frac{1}{2}$ *et* $t_2 = 1$.
On résout ensuite chacune des deux équations simples :

a) $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{lcll} \frac{x_1}{2} & = & 0.4636 & +k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_1 & = & 0.9273 & +k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

b) $\tan(\frac{x}{2}) = 1$

$$\begin{array}{lcll} \frac{x_2}{2} & = & \frac{\pi}{4} & +k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 & = & \frac{\pi}{2} & +k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Finalement, on teste si la famille d'angles : $\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *est solution de l'équation de départ.*

$$\begin{aligned} \cos(\pi) + 3\sin(\pi) &\stackrel{?}{=} 3 \\ -1 + 0 &\neq 3 \end{aligned}$$

$\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *n'est donc pas solution.*
Ainsi, l'équation $\cos(x) + 3\sin(x) = 3$ *admet comme solutions :*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_1 & = & 0.9273 & +k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 & = & \frac{\pi}{2} & +k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

21.4 Exercices

1) Représenter, dans un même système d'axe Oxy, les fonctions sinusoïdales suivantes données par leur expression fonctionnelle (dessin sur du papier millimétré) :

   a) $f(x) = \sin(x)$ b) $g(x) = 2\sin(x)$ c) $h(x) = \sin(2x)$

   d) $i(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ e) $j(x) = \sin(x) + 2$

   Interpréter les effets des paramètres a, b, c et d dans le cas d'une fonction sinusoïdale $a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ sur la base des représentations graphiques des fonctions ci-dessus.

2) Sans machine, mais en utilisant les symétries du cercle trigonométrique, trouver l'angle
   a) du deuxième quadrant ayant le même sinus que $\alpha = 20°$.
   b) du troisième quadrant ayant le même sinus que $\beta = -50°$.
   c) du troisième quadrant ayant le même cosinus que $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.
   d) du quatrième quadrant ayant le même cosinus que $\delta = \frac{\pi}{6}$.
   e) du quatrième quadrant ayant le même sinus que $\epsilon = 200°$.
   f) du deuxième quadrant ayant le même cosinus que $\varphi = 260°$.
   g) du deuxième quadrant ayant le même cosinus que $\eta = \frac{7\pi}{4}$.

3) Exprimer les valeurs suivantes au moyen de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ uniquement :

   a) $\cos(x + 2\pi)$ b) $\sin(x + 6\pi)$ c) $\cos(-x)$ d) $\sin(-x)$
   e) $\cos(\pi + x)$ f) $\sin(\pi + x)$ g) $\cos(\pi - x)$ h) $\sin(\pi - x)$
   i) $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ j) $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

4) Sans machine, mais en utilisant les propriétés de périodicité et de symétries du cercle trigonométrique, donner la valeur exacte de :

   a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ d) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
   e) $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$ f) $\tan\left(\frac{-7\pi}{3}\right)$ g) $\cos\left(\frac{-17\pi}{4}\right)$ h) $\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)$

5) Etablir les égalités toujours vraies suivantes :
   a) $\sin(\frac{\pi}{4} + t) - \sin(\frac{\pi}{4} - t) = \sqrt{2}\sin(t)$
   b) $\sin(\frac{\pi}{6} + t) + \cos(\frac{\pi}{3} + t) = \cos(t)$
   c) $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$
   d) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2(a) - \sin^2(b)$
   e) $\tan(2t) - \tan(t) = \frac{\tan(t)}{\cos(2t)}$

6) Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\cos(3t-\pi)=\dfrac{1}{2}$

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\cos(2t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\sin(2t+1)=\dfrac{1}{2}$

e) $\cos\left(\dfrac{t}{4}-2\pi\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{t}{4}\right)-\dfrac{1}{2}=0$

g) $\tan\left(3t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

h) $1-\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{2}\cdot t\right)=0$

7) Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3t\right)$

b) $\cos(5t)=\cos\left(\dfrac{t}{6}-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

c) $\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-3t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

d) $\cos(4t)=\sin\left(3t-\dfrac{4\pi}{5}\right)$

e) $\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(4t-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-5t\right)+\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

g) $\tan(2t-3\pi)=\tan(3t-\pi)$

h) $\tan\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{5}-t\right)=0$

21.5 Solutions des exercices

2) a) $160°$ b) $230°$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{6}$
e) $340°$ f) $100°$ g) impossible

3) a) $\cos(x)$ b) $\sin(x)$ c) $\cos(x)$ d) $-\sin(x)$
e) $-\cos(x)$ f) $-\sin(x)$ g) $-\cos(x)$ h) $\sin(x)$
i) $\sin(x)$ j) $\cos(x)$

4) a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$
e) $\dfrac{1}{2}$ f) $-\sqrt{3}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6) a) $\begin{cases} t_1 = \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \\ t_2 = \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \\ t_2 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} t_1 = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \\ t_2 = -\frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \end{cases}$ d) $\begin{cases} t_1 = \frac{-\pi-6}{12} + k \cdot \pi \\ t_2 = \frac{7\pi-6}{12} + k \cdot \pi \end{cases}$

e) $\begin{cases} t_1 = 3\pi + k \cdot 8\pi \\ t_2 = -3\pi + k \cdot 8\pi \end{cases}$ f) $\begin{cases} t_1 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 8\pi \\ t_2 = -2\pi + k \cdot 8\pi \end{cases}$

g) $t = \frac{\pi}{36} + k \cdot \frac{\pi}{3}$ h) $t = -\frac{\sqrt{2}\pi}{24} + k \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

7) a) $\begin{cases} t_1 = \frac{3\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \\ t_2 = -\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} t_1 = -\frac{4\pi}{29} + k \cdot \frac{12\pi}{29} \\ t_2 = \frac{4\pi}{31} + k \cdot \frac{12\pi}{31} \end{cases}$

c) $\begin{cases} t_1 = k \cdot 2\pi \\ t_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \end{cases}$ d) $\begin{cases} t_1 = \frac{13\pi}{70} + k \cdot \frac{2\pi}{7} \\ t_2 = -\frac{13\pi}{10} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

e) $\begin{cases} t_1 = \frac{5\pi}{24} + k \cdot \pi \\ t_2 = \frac{25\pi}{72} + k \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases}$ f) $\begin{cases} t_1 = -\frac{\pi}{60} + k \cdot \frac{\pi}{4} \\ t_2 = \frac{4\pi}{15} + k \cdot \pi \end{cases}$

g) $t = k \cdot \pi$ h) $t = -\frac{9\pi}{20} + k \cdot \pi$

Cinquième partie

Analyse

Chapitre 22

Limites

22.1 Notion de limites

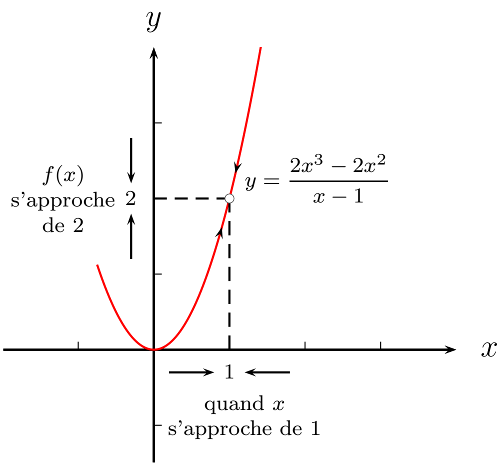
22.1.1 Exemple introductif

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^3-2x^2}{x-1}$. Le domaine de définition de cette fonction est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Nous allons examiner le comportement de la fonction f pour des valeurs de x proches de $a = 1$, car elle est **indéfinie** en ce point, puisqu'on aurait $\frac{0}{0}$.

Méthode numérique :
On construit un tableau de valeurs pour un certain nombre de valeurs de x proches de 1. On s'approche de $a = 1$ en venant **depuis la gauche** ($\equiv$ en prenant des nombres plus petits que 1) et **depuis la droite** ($\equiv$ en prenant des nombres plus grands que 1). D'après le tableau ci-dessous, on voit que lorsque x est proche de 1 (de part et d'autre), les valeurs de $f(x)$ sont proches de 2.

	gauche		$\longrightarrow$		a		$\longleftarrow$		droite
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.6200	1.9602	1.9960	1.9996	indéfini	2.0004	2.0040	2.0402	2.4200

Méthode graphique :
On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f sur un voisinage de $a = 1$ ($\equiv$ intervalle ouvert qui contient 1). On peut effectuer le même constat que ci-dessus lorsque x s'approche de 1.



Conclusion :
Il semble qu'on puisse rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de 2 en choisissant x suffisamment proche de 1. C'est le sens de l'expression "la limite de $f(x) = \frac{2x^3-2x^2}{x-1}$ quand x s'approche de 1 est 2". Cela s'écrit :

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 2x^2}{x-1} = 2$$

Remarques :
On a l'égalité suivante si $x \neq 1$ et donc si $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2}{x-1} = \frac{2x^2(x-1)}{x-1} = 2x^2$$

En considérant $g(x) = 2x^2$ au lieu de $f(x)$, on retrouverait exactement le même tableau de valeurs et la même représentation graphique, sauf pour $x = 1$. Cette remarque sera importante pour le calcul de limites dans la suite du cours.

22.1.2 Définitions

Définition 22.1
On appelle un **voisinage** du nombre réel a un intervalle I *ouvert* contenant a.

Exemples

1) $I =]-2; 4[$ *est un voisinage de* 1*,*

2) $I =]a-\delta; a+\delta[$ *est un voisinage du nombre réel* a *pour tout nombre réel* $\delta > 0$.

Pour la suite de ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un voisinage d'un nombre réel a, sauf éventuellement en a.

Définition 22.2
Le nombre L est **limite de f en a** si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L (aussi proches qu'on le veut) en prenant x suffisamment proche de a (à gauche ou à droite), mais non égal à a.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

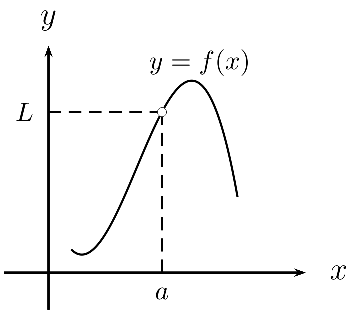
On dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a.

Remarque

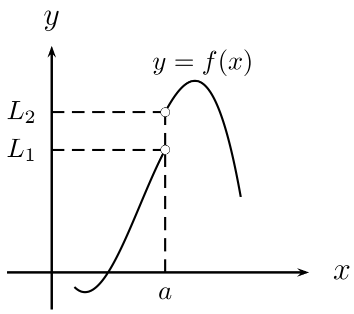
Si elle existe, la limite de la fonction f en a est **unique**.

La proposition "mais $x \neq a$" dans la définition de la limite signifie que dans la recherche de la limite de $f(x)$ quand x est proche de a, on n'envisage jamais $x = a$. En fait, $f(x)$ ne doit même pas être définie en a. La seule chose qui importe est que f soit définie tout à côté de a.

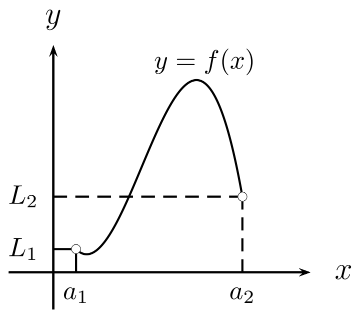
La notion de limite est particulièrement utile pour déterminer le comportement du graphe d'une fonction au voisinage d'un **trou**, d'un **saut** ou d'un **bord** de son domaine de définition. Ces trois notions sont illustrées ci-dessous.



trou



saut



bords

On a donné une définition de la notion de limite qui a du sens en français mais qui ne s'appuie pas sur des concepts mathématiques formels. Il est possible de donner une définition plus rigoureuse de cette notion, ce que nous faisons ci-dessous.

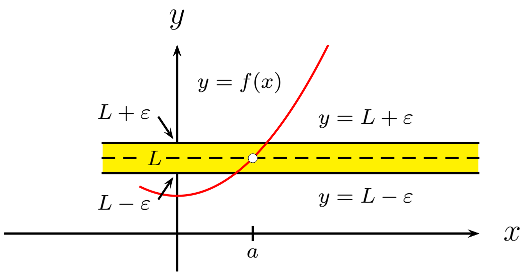
Définition 22.3 (Définition en ε - δ)
Le nombre L est **limite de f en** a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

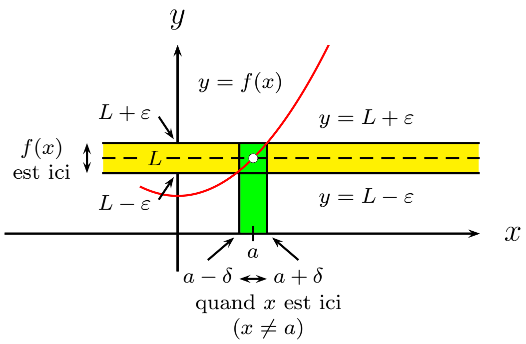
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Illustration

Les représentations graphiques ci-dessous illustrent cette définition formelle. Dès que $\varepsilon > 0$ est fixé, on trace les droites horizontales $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$ et la courbe $y = f(x)$ (voir la figure de gauche). S'il est vrai que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, alors on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que si x n'est autorisé à varier que dans l'intervalle $]a - \delta; a + \delta[$ tout en restant différent de a, alors la courbe $y = f(x)$ se trouve entre les droites $y = L - \varepsilon$ et $y = L + \varepsilon$ (voir la figure de droite). On voit aussi que, dès qu'un tel δ est trouvé, n'importe quel δ inférieur convient aussi.

Il est important de prendre conscience que le résultat illustré dans les figures ci-dessous doit être vrai pour *tout* nombre positif ε, aussi petit soit-il.



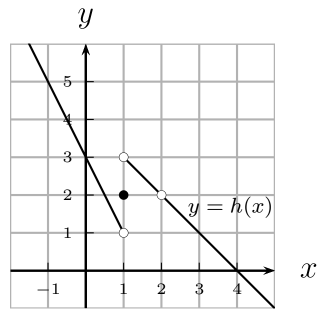


Exemples

Soit la fonction $h(x)$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et donnée par son expression fonctionnelle :

$$h(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \textit{si} \quad x < 1 \\ 2 & \textit{si} \quad x = 1 \\ -x + 4 & \textit{si} \quad 1 < x < 2 \ \textit{ou}\ x > 2 \end{cases}$$

On donne sa représentation graphique ci-dessous.



Quelques limites :

1. $\lim_{x\to 3} h(x) = 1 \longrightarrow$ *On peut rendre $h(x)$ arbitrairement proche de 1 en prenant x suffisamment proche de 3. (Ici : $h(3) = 1$.)*

2. $\lim_{x\to 2} h(x) = 2 \longrightarrow$ *On peut rendre $h(x)$ arbitrairement proche de 2 en prenant x suffisamment proche de 2. (Ici : $h(2)$ n'est pas définie.)*

3. $\lim_{x\to 1} h(x)$ *n'existe pas* $\longrightarrow$ *Si x est proche de 1 en étant strictement plus grand que 1, $h(x)$ est proche de 3, alors que si x est proche de 1 en étant strictement inférieur à 1, $h(x)$ est proche de 1. On ne peut donc par rendre $h(x)$ arbitrairement proche d'un nombre L en prenant x suffisamment proche de 1 avec $x \neq 1$. (Ici : $h(1) = 2$.)*

Limite à droite, limite à gauche

Définition 22.4
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; d[$.

Le nombre L est **limite à droite de f en a** si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de a et strictement supérieur à a ($x > a$).

On note :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]g; a[$.

Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de a et strictement inférieur à a ($x < a$).

On note :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Proposition 22.1
Soit f une fonction définie sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a.

La comparaison des définitions d'une limite et d'une limite à droite, respectivement à gauche, implique que

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L}$$

Exemples

On considère à nouveau la fonction h de l'exemple précédent. Quelques exemples de limites :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 2 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} h(x) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 1 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} h(x) \textit{ n'existe pas.}$$

22.2 Propriétés et calculs de limites

22.2.1 Limites de fonctions élémentaires

A partir de la définition de la limite en a, on peut déterminer facilement celle-ci pour des fonctions élémentaires.

Proposition 22.2
Soit $a, c \in \mathbb{R}$. Alors :

• $\lim\limits_{x\to a} c = c$	• $\lim\limits_{x\to a} x = a$
• $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$	• $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$
• $\lim\limits_{x\to a} \lvert x\rvert = \lvert a\rvert$	• $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (\text{si } a > 0)$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$

2) $\lim\limits_{x\to \pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1$

22.2.2 Propriétés

Proposition 22.3
Soit λ un nombre réel et f, g deux fonctions réelles. Supposons que les limites

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

existent. Alors :

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a}[\lambda f(x)] = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

$$\textbf{4.}\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\textbf{5.}\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad \text{si } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Il n'est pas difficile de croire que ces propriétés sont vraies. Par exemple, si $f(x)$ est près de L et $g(x)$ près de M, il est raisonnable de penser que $f(x)+g(x)$ est près de $L+M$. Par contre, toutes ces lois ne peuvent être démontrées formellement qu'en utilisant la définition rigoureuse d'une limite, ce que nous ne ferons pas ici.

En utilisant de façon répétée la loi du produit dans le cas $g(x)=f(x)$, on obtient les lois données ci-dessous.

Proposition 22.4
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f une fonction réelle tel que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Alors :

$$\textbf{6.}\quad \lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

$$\textbf{7.}\quad \lim_{x\to a} x^n = a^n$$

De manière semblable, on a les lois suivantes pour les racines.

Proposition 22.5
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f une fonction réelle tel que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Alors :

$$\textbf{8.}\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

(Dans le cas où n est pair, on suppose $\lim_{x\to a} f(x) > 0$)

$$\textbf{9.}\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

(Dans le cas où n est pair, on suppose $a>0$)

22.2.3 Calculs de limites

Pour calculer les limites, on va les classer en différentes catégories, puis on développera des techniques de résolution pour chacune de ces catégories.

Calcul d'une limite à l'aide des propriétés

Les propriétés des limites données au paragraphe précédent seront très utiles pour calculer certaines limites où il est possible, par quelques transformations, de se ramener à des limites de fonctions élémentaires.

Exemples

1) Calculer : $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4 && \textit{(lois 1, 2)}\\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 && \textit{(loi 3)}\\
&= 2\cdot 5^2 - 3\cdot 5 + 4 && \textit{(lois 7, fct. élém.)}\\
&= 39
\end{aligned}$$

2) Calculer : $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

On va utiliser la loi 5 *au départ même si on n'est pas certain que la limite du dénominateur ne soit pas nulle. Ce n'est qu'à la fin qu'on pourra juger de la validité des calculs.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)} && \textit{(loi 5)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} && \textit{(lois 1, 2, 3)}\\
&= \frac{(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - 1}{5 - 3\cdot(-2)} && \textit{(loi 7, fct. élém.)}\\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

3) Calculer : $\lim_{x\to 4}\sqrt{3x^2 - 3}$

On va utiliser la loi 8 *au départ même si on n'est pas certain que la limite du radicande soit strictement positive. Ce n'est qu'à la fin qu'on pourra juger de la validité des calculs.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\sqrt{3x^2 - 3} &= \sqrt{\lim_{x\to 4} 3x^2 - 3} && \textit{(loi 8)}\\
&= \sqrt{3\lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4} 3} && \textit{(lois 2, 3)}\\
&= \sqrt{3\cdot 4^2 - 3} && \textit{(loi 7, fct. élém.)}\\
&= \sqrt{45}
\end{aligned}$$

Remarque

Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, alors $f(5) = 39$. En d'autres mots, on aurait obtenu la réponse exacte dans la partie 1 de l'exemple ci-dessus en substituant 5 à x. De la même manière, la substitution de -2 à x dans la partie 2 et de 4 à x dans la partie 3 conduisait à la réponse correcte. Les fonctions de cet exemple sont une fonction polynomiale, une fonction rationnelle et une racine d'une fonction polynomiale. L'application des lois des limites dans de tels cas montre que la substitution directe marche toujours.

Proposition 22.6
Si f est une fonction polynomiale ou rationnelle (quotient de deux polynômes) et a un point de son domaine de définition, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Calcul d'une limite du type $\dfrac{0}{0}$

On considère, dans ce paragraphe, une fonction f qui est le quotient de deux fonctions $N(x)$ et $D(x)$,$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, et on cherche à calculer sa limite en un nombre réel a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{N(x)}{D(x)}$$

Trois cas peuvent se présenter :

- **Cas 1 :** $\lim\limits_{x \to a} N(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to a} D(x) = d \neq 0$ $(a \in \mathcal{D}_f)$

On peut utiliser la loi 5 et on obtient $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} N(x)}{\lim\limits_{x \to a} D(x)} = \dfrac{c}{d}$.

- **Cas 2 :** $\lim\limits_{x \to a} N(x) = c \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} D(x) = 0$ $(a \notin \mathcal{D}_f)$

La limite n'existe pas. On reviendra sur ce cas au paragraphe (22.3.3).

- **Cas 3 :** $\lim\limits_{x \to a} N(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} D(x) = 0$ $(a \notin \mathcal{D}_f)$

Définition 22.5
Si le numérateur $N(x)$ **et** le dénominateur $D(x)$ tendent tous les deux vers 0, on dit que la limite a une **forme indéterminée** du type $\dfrac{0}{0}$ ($\frac{0}{0}$ est indéterminée car $k \cdot 0 = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$).

Lorsque le calcul d'une limite conduit à une "expression" du type $\frac{0}{0}$, on ne peut conclure de manière immédiate, il est en général nécessaire de transformer l'expression de $f(x)$.

a) **Si $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes**

Comme $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes, on a les égalités suivantes d'après la proposition (22.6) :

$$\lim_{x \to a} N(x) = N(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} D(x) = D(a) = 0$$

Ainsi, comme $N(a) = 0$, a est un racine de $N(x)$ et donc $N(x)$ est divisible par $x - a$. De même, comme $D(a) = 0$, $D(x)$ est divisible par $x - a$.

Avec ce constat, on calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ de la manière suivante :

1. factoriser $N(x)$ et $D(x)$ en faisant apparaître le facteur $x - a$ (toujours possible),

2. simplifier la fraction $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ par $x - a \longrightarrow$ on obtient une fraction plus simple qu'on nomme $g(x)$,

3. calculer $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Exemple

Calculer : $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ *avec un polynôme au numérateur et au dénominateur.*

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

Justification de la méthode de calcul utilisée dans l'exemple : Le procédé qui consiste à remplacer $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ par une fonction plus simple $g(x) = x-1$ est valide car $f(x) = g(x)$ sauf quand $x = 1$ et car le calcul de la limite pour x tendant vers 1 est indépendant de ce qui se passe lorsque x est *égal* à 1. De façon plus générale, on peut s'appuyer sur le résultat suivant.

Proposition 22.7
Si $f(x) = g(x)$ lorsque $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, à condition que ces limites existent.

b) **Si $N(x)$ et/ou $D(x)$ ne sont pas des polynômes**

Dans certains cas, on peut suivre le même schéma que ci-dessus et simplifier la fraction, après transformation de cette dernière.

Exemple

Calculer : $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Forme indéterminée : $\frac{0}{0}$. *On peut factoriser le dénominateur en utilisant les identités remarquables :*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

ou amplifier la fraction par le conjugué du numérateur :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

Dans d'autres cas, il faut une autre méthode, par exemple numérique (voir l'exemple introductif). Nous verrons dans le chapitre consacré aux *dérivées*, le **théorème de l'Hospital**, qui pourra également être utilisé dans ces cas.

Calcul d'une limite par le théorème des deux gendarmes

Théorème 22.8
Soit f et g deux fonctions définies sur voisinage I de a, sauf éventuellement en a.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

Théorème 22.9 (Théorème des deux gendarmes)
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage I de a, sauf éventuellement en a.

Si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ existent, alors

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

Ces deux théorèmes peuvent se démontrer à partir de la définition formelle d'une limite.

Une illustration graphique du théorème des deux gendarmes est donnée à l'exemple ci-dessous.

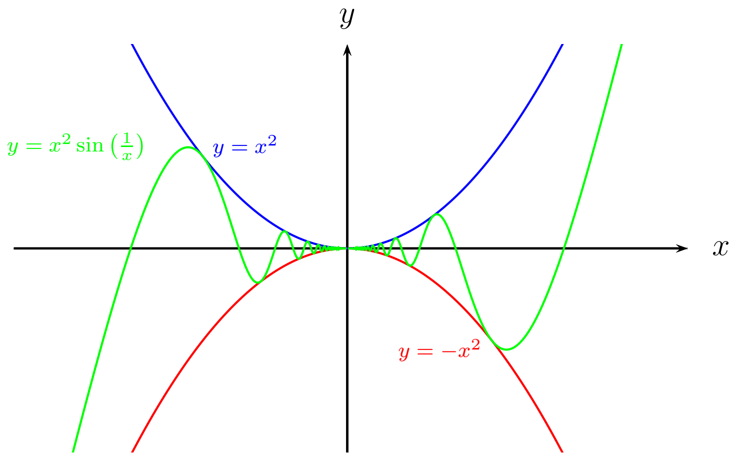
Exemple

Montrer que : $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. *Comme*

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *on a, comme le montre la représentation graphique ci-dessous,*

$$-x^2 \leqslant x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$$



Par ailleurs, on a que

$$\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Le théorème des deux gendarmes, appliqué aux fonctions $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$ *et* $h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, *conduit à la conclusion*

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Une limite importante pour la suite du cours peut aussi être calculée à l'aide du théorème des deux gendarmes (voir les exercices)

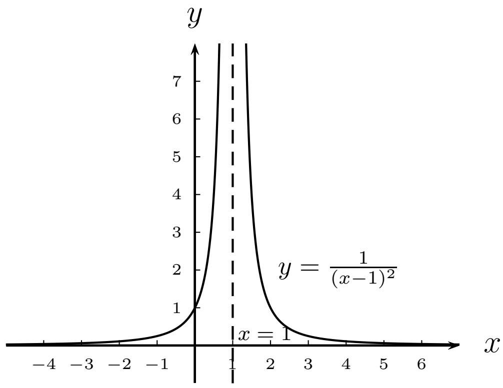
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

22.3 Extensions de la notion de limite

22.3.1 Limites infinies

Exemple introductif

Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Cette fonction est représentée graphiquement ci-dessous.



D'après cette représentation, les valeurs de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ peuvent être rendues arbitrairement grandes pourvu que x soit suffisamment proche de 1. Par conséquent, les valeurs de $f(x)$ ne s'approchant pas d'un nombre, $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas.

On traduit ce comportement par l'écriture : $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Le symbole de l'infini (∞) ne représente pas un nombre réel. Ce symbole est employé pour décrire le comportement d'une fonction lorsque les valeurs de son domaine de définition ou de son image dépassent toute borne finie. On ne peut pas utiliser ce symbole de la même façon qu'une valeur quelconque.

22.3.2 Définitions

Soit f une fonction définie sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a.

Définition 22.6
On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement grandes (aussi grandes qu'on le souhaite) à condition de prendre x suffisamment proche de a, mais non égal à a.

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \to a}(-f(x)) = +\infty$

On définit de manière semblable $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

22.3.3 Propriétés et calculs de limites infinies

Propriétés

Les propriétés des limites (page 353) ne se généralisent pas sans autre aux limites infinies. Cependant, un certain nombre d'entre elles restent valables. Par exemple

1.	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$
2.	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L < 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$
3.	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\left\|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\| = +\infty$
4.	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

On peut se convaincre intuitivement de ces propriétés.

Calcul d'une limite du type $\dfrac{c}{0}$

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x)$ et $D(x)$ deux fonctions. On cherche à calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dans le

• **Cas 2 :** $\lim\limits_{x\to a} N(x) = c \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} D(x) = 0$ $(a \notin \mathcal{D}_f)$

de la page 356. D'après la propriété 3 ci-dessus, cette limite est "∞" (en considérant une valeur absolue). Il reste à déterminer si $f(x)$ tend vers $+\infty$, $-\infty$ (même comportement de $f(x)$ à gauche et à droite de a) ou aucun des deux si le comportement de $f(x)$ est différent à gauche et à droite de a.

Pour ceci, on **calculera les limites à gauche et à droite en** a en se basant sur le tableau ci-dessous résumant l'ensembles des cas possibles.

$D(x)$ \ $N(x)$	$c > 0$	$c < 0$
0^+	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$

avec les notations :

0^+ **:** la valeur de $D(x)$ s'approche de 0 par des valeurs positives lorsque x s'approche de a (par la gauche ou par la droite),

0^- **:** la valeur de $D(x)$ s'approche de 0 par des valeurs négatives lorsque x s'approche de a (par la gauche ou par la droite).

Exemples

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)^2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} +\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1} \text{ n'existe pas.}$$

Formes indéterminées

Lorsqu'un calcul de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ conduit à des "expressions" du type ci-dessous

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$

appelées **formes indéterminées**, on ne peut pas conclure de manière immédiate ; il est en général nécessaire de transformer l'expression $f(x)$.

Exemple

Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}}$

Forme indéterminée : $\frac{\infty}{\infty}$. *Il faut donc transformer l'expression de* f.

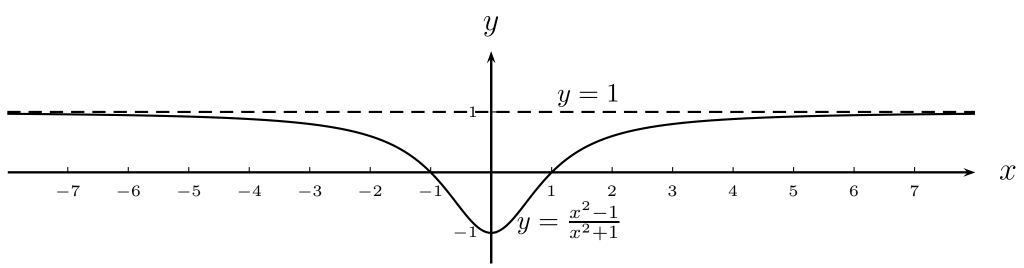
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}} &\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \cdot (x^2-1) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \end{aligned}$$

22.3.4 Limites à l'infini

Exemple introductif

Au paragraphe précédent, nous faisions tendre x vers un certain nombre et il en résultait des valeurs arbitrairement grandes (positives ou négatives) pour $f(x)$. Ici, nous rendons x arbitrairement grand et regardons ce qui en résulte pour $f(x)$.

Prenons la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Cette fonction est représentée graphiquement ci-dessous.



Plus les valeurs de x sont grandes (négatives ou positives), plus les valeurs de $f(x)$ sont proches de 1. On peut même rendre les valeurs de $f(x)$ aussi proches qu'on veut de 1, à condition de prendre des valeurs de x suffisamment grandes.

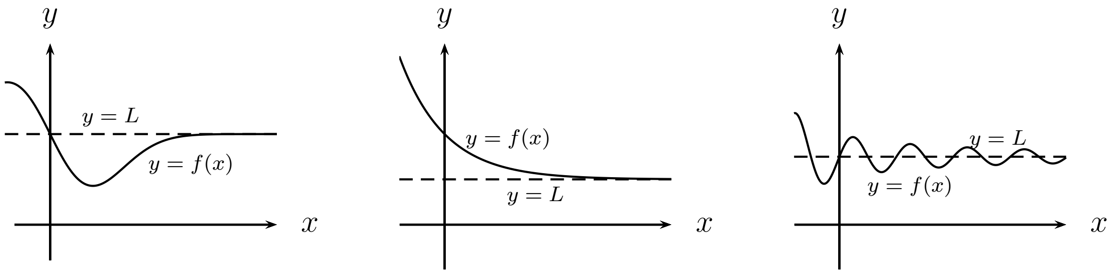
Ceci s'écrit mathématiquement $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$.

Définition

Définition 22.7
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L à condition de prendre x suffisamment grand.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$.
On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = L$.

Voici la représentation graphique de quelques fonctions qui vérifient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.



Cas particulier : fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

Théorème 22.10
La limite d'une fonction polynomiale lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) &= \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}}_{\to 0}) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n)\end{aligned}$$

□

Théorème 22.11
La limite d'une fonction rationnelle lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^n + \ldots + b_1x + b_0} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}{b_mx^m\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m}\frac{1}{x^m}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \\ \pm\infty & \text{si} \quad n > m \end{cases}\end{aligned}$$

□

Exemple

Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+12}$
Il suffit de calculer la limite des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+12} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

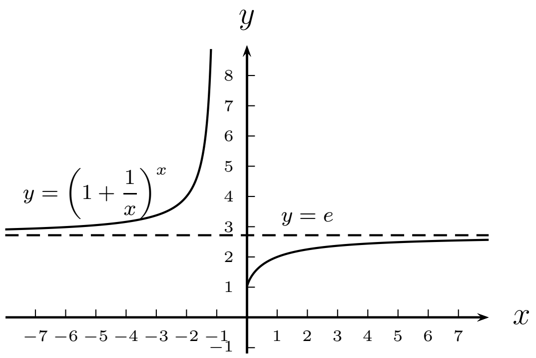
Une limite célèbre : le nombre e

Dans le chapitre consacré aux exponentielles, nous déjà déjà rencontré une limite "célèbre" en donnant la définition du nombre d'Euler, e (dont la valeur est 2.718281828459 ...) :

$$\boxed{e = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

De plus, on a aussi : $e = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

La représentation graphique de la fonction $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est donnée ci-dessous.



Remarque

On peut facilement se tromper en faisant des raisonnements qui semblent justes. On pourrait en effet se dire que quand x tend vers l'infini, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et qu'il reste alors 1 puissance infini, donc 1. Or ce n'est pas le cas comme le montre le calcul de quelques valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
On a aussi : $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$

En effet, en substituant y à $\frac{1}{x}$, on retrouve la première limite (à remarquer que, quand $x \to \pm\infty$, $y \to 0$ car $y = \frac{1}{x}$).

22.4 Limite et convergence d'une suite

22.4.1 Définitions

Exemple

On considère la suite (u_n) *donnée par* $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

On donne ci-dessous quelques termes de cette suite.

n	1	2	3	10	20	50	100	500	1000
u_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{20}{41}$	$\frac{50}{101}$	$\frac{100}{201}$	$\frac{500}{1001}$	$\frac{1000}{2001}$
$\cong$	0.333	0.400	0.428	0.476	0.488	0.495	0.4975	0.4995	0.4997

On observe que les termes de la suite croissante (u_n) *s'approchent de plus en plus du nombre* $\frac{1}{2}$ *lorsque l'indice* n *devient grand. On peut alors déterminer les indices* n *pour lesquels la différence entre* $\frac{1}{2}$ *est inférieure à un milliardième, soit* 10^{-9}*)*
On a

$$\frac{1}{2} - u_n = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{2n+1-2n}{2(2n+1)} = \frac{1}{4n+2}$$

et la condition

$$\frac{1}{4n+2} < 10^{-9} \Rightarrow 10^9 < 4n+2 \Rightarrow \frac{10^9-2}{4} < n \Rightarrow 249'999'999.5 < n$$

Ainsi, cette différence est inférieure à 10^{-9} *pour* $n \geqslant 250'000'000$.

En suivant l'idée de la définition de la limite d'une fonction, on peut également définir la notion de limite d'une suite.

Définition 22.8
Soit (u_n) une suite infinie. Un nombre réel L est appelé **limite de la suite** (u_n), et on note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si u_n est arbitrairement proche de a dès que n est suffisamment grand.
Lorsqu'une suite infinie admet un nombre limite L, on dit qu'elle **converge** vers ce nombre. Une suite infinie qui ne converge pas **diverge**.

Il est possible de donner une définition plus rigoureuse de cette notion.

Définition 22.9 (Définition en ε - δ)
Le nombre L est **limite de la suite** (u_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > p \Longrightarrow |u_n - L| < \varepsilon$$

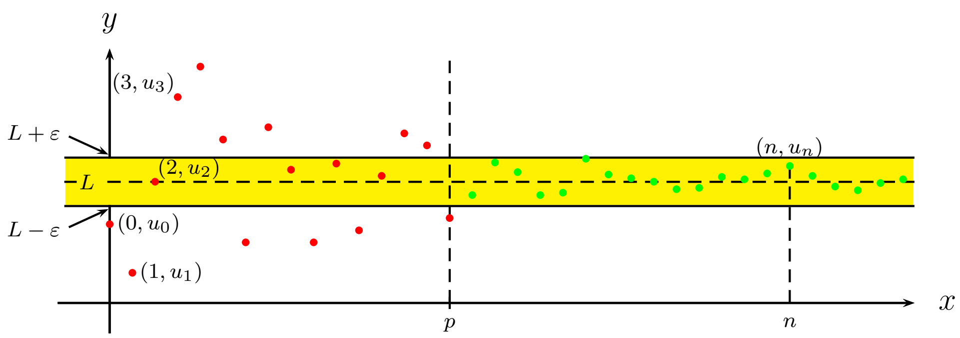
Illustration

Dans la représentation graphique ci-dessous, on a représenté une suite (u_n) par un ensemble de points. Chaque point admet comme première coordonnée le rang d'un terme de la suite, n, et comme deuxième coordonnée le terme de la suite associé, u_n.

On a ensuite fixé une valeur de ε arbitraire et on a tracé les droites horizontales $y = L+\varepsilon$, $y = L - \varepsilon$. Comme la valeur $|u_n - L|$ mesure la proximité du terme u_n de la limite L, on peut remarquer que, si un point se trouve entre les deux droites horizontales (dans la surface jaune), la condition $|u_n - L| < \varepsilon$ est vérifiée. Si un point se trouve hors de la surface jaune ou sur une des deux droites, on a alors que $|u_n - L| \geqslant \varepsilon$.

S'il est vrai que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, alors on peut trouver un nombre $p \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > p$, les points représentant les termes de la suite se trouvent tous entre les deux droites. On voit aussi que, dès qu'un tel p est trouvé, n'importe quel p supérieur convient aussi.

Pour que la limite existe, il faut que le résultat illustré dans la figure ci-dessous soit vrai pour *tout* nombre positif ε, aussi petit soit-il.



Exemples

1. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$.

   Cette suite (u_n) *est convergente car elle admet* 2 *pour limite en* $+\infty$. *En effet, on a que* $\left|\dfrac{2n-1}{n} - 2\right| = \dfrac{1}{n}$ *et* $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ *dès que* $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Le plus petit* p *possible est alors la partie entière de* $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

2. *Soit la suite* (v_n) *définie par* $v_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2}$.

   Cette suite (v_n) *est convergente car elle admet* $\dfrac{4}{3}$ *pour limite en* $+\infty$. *En effet, on a que* $\left|\dfrac{4n^2+1}{3n^2} - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{1}{3n^2}$ *et* $\dfrac{1}{3n^2} < \varepsilon$ *dès que* $n > \dfrac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$. *Le plus petit* p *possible est alors la partie entière de* $\dfrac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$.

3. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ *n'existe pas, la suite*$((-1)^n)$ *diverge.*

22.4.2 Propriétés

Théorème 22.12
Si une suite admet une limite, cette limite est unique.

On parlera donc de **la** limite d'une suite convergente.

Théorème 22.13
Une suite croissante et majorée converge.

Une suite décroissante et minorée converge.

Une suite monotone et bornée converge.

Ce théorème permet de démontrer la convergence de certaines suites, mais non d'en calculer la limite.

Démonstration. On considère, par exemple une suite (u_n) croissante et majorée. On note L le plus petit de ses majorants. Étant donné un réel strictement positif, il doit exister au moins un terme, noté u_p, appartenant à l'intervalle $]L-\varepsilon, L]$, sinon L ne serait pas le plus petit majorant de la suite (le nombre $L-\varepsilon$ serait alors un majorant de la suite plus petit que L).
La suite (u_n) étant de plus croissante, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant L$ à partir du rang p. Ainsi, si $n > p$, alors $|u_n - L| < \varepsilon$. □

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

Cette suite est croissante et majorée (démonstration par récurrence), donc convergente.

Théorème 22.14
Une suite convergente est bornée.

Remarques

1. La contraposée de ce théorème est un critère de divergence. Une suite qui n'est pas bornée diverge.
2. La réciproque de ce théorème est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est bornée mais pas convergente.

Théorème 22.15
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent respectivement vers L et M, et si λ est un nombre réel, alors :

1. la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $L + M$;
2. la suite de terme général $\lambda \cdot u_n$ converge $\lambda \cdot L$;
3. la suite de terme général $u_n \cdot v_n$ converge vers $L \cdot M$;
4. la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pout tout n.

Ces propriétés découlent directement des propriétés générales des limites.

Exemples

On montre aisément que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$*, avec* $n \in \mathbb{N}^*$*, converge vers* 0 *et que toute suite constante* $(u_n = \lambda)$ *converge vers* λ*. Le théorème précédent permet alors d'en déduire que la suite de terme général*

1. $u_n = \dfrac{3n+1}{n} = 3 + \dfrac{1}{n}$ *converge vers* 3 *;*
2. $u_n = \dfrac{2n-3}{7n} = \dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{7n}$ *converge vers* $\dfrac{2}{7}$ *;*
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2$ *converge vers* 0 *;*
4. $u_n = \dfrac{2n^2-2n+3}{5n^2-7} = \dfrac{n^2\left(2-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(5-\frac{7}{n^2}\right)} = \dfrac{2-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{7}{n^2}}$ *converge vers* $\dfrac{2}{5}$.

22.5 Exercices

1) Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x^2-7x-52}{-2x^2+5x+12}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-14x-5}{-x^2+10x-25}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{(x+2)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x-12}{-x^2+6x-9}$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2+6x-9}{x^3-4x^2-3x+18}$

g) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{2x^2+7x-15}{3x^2+11x-20}$

h) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+12x+18}{2x^2+7x+3}$

2) Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{-3+4x}}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4-\sqrt{5x-9}}{\sqrt{2x-1}-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-|x|}{|x^2|-|3x|}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot\sin\left(\frac{x}{5}\right)}{6x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(2x)}{x\cdot\tan(2x)}$

j) $\lim\limits_{x\to -\frac{3\pi}{2}} \dfrac{1+\sin^2(x)}{\cos(x)}$

k) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(5x)}{1-\cos(4x)}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}$

n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{-3+\cos(2x)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

3) Calculer, si elles existent, les limites suivantes ($\lim\limits_{x\to -\infty}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}$ séparément) :

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(2x-3)^3}{3x^3-2x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(\sqrt{2}x-3)^2-2x^2}{\sqrt{3}x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{x^2+3x-1}-x$

d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x-\sqrt{x^2-8x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{\sqrt{3x^2+x-2}}$

f) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x-\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$

4) Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+3\tan^2(x)\right)^{\cot^2(x)}$

5) En utilisant la définition de la limite d'une suite, puis en utilisant les critères de convergence, montrer que

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{3n^2+1}=0$ d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{7n^2+5}=\frac{2}{7}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n^2+3)}{\sqrt{n+1}}=0$ f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{5-n^2}{n+2}=-\infty$

6) Étudier la convergence des suites dont on donne le terme général

a) $\displaystyle\frac{n^2+1}{n^2+n-1}$ b) $\displaystyle\frac{n^4+2n+2}{n+4}$ c) $\displaystyle\frac{n^2+6}{n(n+1)(n+2)}$

7) On définit la suite de terme général v_n de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_1 &= 1 \\ v_{n+1} &= \sqrt{12+v_n} \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que $0 < v_n < 4$ pour tout n strictement positif.

b) On pose $4 - v_n = w_n$. Démontrer que $w_{n+1} < \dfrac{1}{4}w_n$ et en déduire la limite de w_n puis celle de v_n quand n tend vers l'infini.

8) La suite de terme général u_n est définie par $u_1 = 0$ et $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$ pour n strictement supérieur à 1.

a) Montrer que si (u_n) a pour limite L, L est nécessairement solution de l'équation $L = \sqrt{L+1}$.

b) Montrer que (u_n) est croissante et majorée, donc convergente. En déduire la valeur de L.

22.6 Solutions des exercices

1) a) -3 b) $-$ c) $-$ d) -3

e) $-$ f) $-\dfrac{1}{5}$ g) $\dfrac{13}{19}$ h) 0

2) a) 2 b) $-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $-\dfrac{15}{8}$

e) -1 f) $\dfrac{1}{3}$ g) $\dfrac{2}{5}$ h) $\dfrac{1}{10}$

i) 2 j) $-$ k) $\dfrac{2}{\pi}$ l) $\dfrac{25}{8}$

m) 2 n) $-\infty$

3) a) $\dfrac{8}{3}$ et $\dfrac{8}{3}$ b) $-\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

c) $+\infty$ et $\dfrac{3}{2}$ d) $-\infty$ et 4

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ et 0 f) $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4) a) e b) e^3 c) e^2 d) e^{-1}

e) e^{-4} f) e^{-1} g) e^4 h) e^3

6) a) converge b) diverge c) converge

7) b) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$

8) b) $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sixième partie

Statistiques

Chapitre 23

Statistique descriptive

23.1 Introduction et vocabulaire

La statistique est la branche des mathématiques qui s'occupe de *rassembler*, d'*organiser*, d'*analyser* et d'*interpréter* des observations numériques. Ces observations portent sur un ensemble d'objets de même nature, que l'on désigne par le terme de **population**. Ces objets présentent tous un certain **caractère** qu'il s'agit d'étudier pour en révéler les tendances principales. Le caractère étudié est soit de nature **discrète** (c'est-à-dire qu'il ne peut prendre que des valeurs réelles isolées), soit de nature **continue** (c'est-à-dire qu'il peut prendre toute valeur d'un certain intervalle réel).

Exemple

On donne ci-dessous quelques exemples de populations et de caractères étudiés.

Population	*Elèves d'une classe*	*Poulets d'un élevage*	*Tiges usinées*	*Ampoules*
Caractère	*Note de français*	*Poids*	*Longueur*	*Durée de vie*
Nature	*Discret*	*Continue*	*Continue*	*Continue*

La phase de rassemblement des données est très importante, puisque c'est sur la base de ces données que vont se développer les phases ultérieures. Les données étant souvent nombreuses et en désordre, il faut essayer de les représenter de manière claire, à l'aide de **tableaux** et de **graphiques** : c'est l'organisation des données. L'analyse essaie de résumer un tableau de données à l'aide d'un petit nombre de valeurs caractéristiques. Parmi celles-ci, les **mesures de tendance centrale** (aussi appelées **paramètres de position**) jouent un rôle essentiel. La plus connue est la **moyenne**, mais on utilise aussi la **médiane** ou le **mode**. Les mesures de tendance ne suffisent pas à donner une idée de la manière dont les valeurs sont distribuées au voisinage de ces valeurs centrales. Ainsi, il est souvent utile d'introduire une **mesure de dispersion**. La plus utilisée est l'**écart-type**.

Ces trois phases ont en commun le fait que les renseignements que l'on essaie de tirer des données se rapportent justement à l'ensemble soumis à l'observation. Elles constituent la **statistique descriptive**, dont nous parlerons ici.

Le problème de l'interprétation est différent. L'ensemble soumis à observation est un sous-ensemble convenablement choisi, que l'on appelle **échantillon**, d'un ensemble plus vaste, et on voudrait, à partir de l'étude de cet échantillon, arriver à tirer des conclusions sur l'ensemble total d'où est issu cet échantillon. Il est clair que ces conclusions auront d'autant plus de chances d'être valables que la **taille** de l'échantillon sera grande. Cette interprétation, basée sur le calcul des probabilités, constitue un aspect de la **statistique inductive** ou **inférentielle**, que nous n'étudierons pas ici.

23.2 Symbole de sommation (Rappel)

Dans la suite de ce cours, nous allons fréquemment utiliser le signe : Σ (Sigma). Il est défini comme suit :

Définition 23.1
Le **symbole de sommation**, noté à l'aide de la lettre grecque Σ, s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes.
Soit n termes x_1, x_2, ..., x_n. La somme de ces n termes s'écrit de la manière suivante à l'aide du symbole de sommation :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

On appelle k l'**indice de sommation**. Il permet de décrire la manière dont on somme les éléments.
Le nombre se trouvant à droite de l'égalité sous le symbole de sommation est la valeur de départ de l'indice de sommation, ici 1, et le nombre au-dessus du symbole la valeur finale de l'indice, ici n. La somme porte sur toutes les valeurs de k comprises entre ces deux bornes (bornes comprises).

Le symbole de sommation permet donc d'écrire des sommes d'un nombre important de termes de manière précise et condensée sans utiliser les points de suspension.

L'indice de sommation peut être utilisé pour décrire les termes de la somme de manière directe et les bornes sur l'indice de sommation peuvent avoir d'autre valeurs que 1 et n.

Par exemple, la somme des puissance de 2 comprises entre 2^6 et 2^{27} peut s'écrire

$$\sum_{k=6}^{27} 2^k$$

au lieu de $2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{26} + 2^{27}$.
Donnons d'autres exemples pour bien comprendre cette notation.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} k = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

3. $\sum_{k=1}^{4}(k^2-1) = (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1) = 0+3+8+15 = 26$

4. $\sum_{k=1}^{n}(k^2-1) = 0+3+8+15+\ldots+(n^2-1)$

5. $\sum_{k=2}^{4}(k-1)^3 = (2-1)^3+(3-1)^3+(4-1)^3 = 1^3+2^3+3^3 = 36$

Proposition 23.1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$; $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Le symbole de sommation possède les propriétés suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} a \cdot x_k = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} a = n \cdot a$

Ces propriétés du symbole de sommation découlent directement de l'associativité et de la commutativité de l'addition ainsi que de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

23.3 Tableaux des données et principales représentations graphiques

Le caractère que l'on étudie est soit de nature discrète soit de nature continue. Dans le cas discret, on regroupe les données en un tableau où figurent les k valeurs possibles x_1, x_2, x_3, …, x_k du caractère et le nombre "d'individus" n_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ correspondant qui prennent cette valeur. Ce nombre est appelé **effectif**. Dans le cas continu, on regroupe les valeurs possibles du caractère en **classes** de même **amplitude** (de même "largeur"). En règle générale, on choisit un nombre de classes compris entre 8 et 15.

Exemple - Cas discret

On donne ci-dessous l'ensemble des résultats du concours d'Innsbruck lors de la Tournée des Quatre Tremplins, le 4 *janvier* 2012.

	Nom	Saut 1	Saut 2	Note		Nom	Saut 1	Saut 2	Note
1.	Stoch Kamil	132,5	108,0	232,0	26.	Janda Jakub	125,5	121,5	224,4
2.	Mechler Maximilian	119,0	126,0	235,1	27.	Hocke Stephan	122,5	118,5	218,0
3.	Freund Severin	118,5	116,5	211,8	28.	Gangnes Kenneth	124,5	111,5	206,2
4.	Schlierenzauer Greg	130,5	123,0	247,6	29.	Happonen Janne	122,5		112,2
5.	Bardal Anders	128,0	125,5	244,4	30.	Ito Daiki	129,5	91,5	193,6
6.	Koudelka Roman	123,5	122,5	239,5	31.	Hayboeck Michael	116,5	121,5	213,0
7.	Velta Rune	115,5	123,5	225,0	32.	Tepes Jurij	107,0		90,7
8.	Kranjec Robert	117,0	105,0	192,8	33.	Meznar Mitja	106,5		86,0

	Nom	Saut 1	Saut 2	Note		Nom	Saut 1	Saut 2	Note
9.	Morgenstern Thomas	120,5	123,0	237,1	34.	Sklett Vegard Hauk	119,5		109,5
10.	Zauner David	119,5	116,5	218,5	35.	Unterberger David	111,0		94,0
11.	Neumayer Michael	132,0	121,5	234,4	36.	Matura Jan	118,0		106,4
12.	Prevc Peter	129,5	118,0	227,9	37.	Takeuchi Taku	131,5	124,0	246,7
13.	Ammann Simon	119,5	120,5	221,0	38.	Hula Stefan	101,5		82,6
14.	Kasai Noriaki	118,0		107,5	39.	Boyd-Clowes Mack	121,0		109,6
15.	Damjan Jernej	122,5	113,5	211,6	40.	Vassiliev Dimitry	133,0	120,0	222,4
16.	Kot Maciej	118,5	101,0	185,4	41.	Ito Kenshiro	117,5		110,5
17.	Koivuranta Anssi	123,0	102,0	192,1	42.	Hautamaeki Matti	116,0		108,6
18.	Koch Martin	113,5	122,0	210,6	43.	Colloredo Sebastia	114,5		104,2
19.	Loitzl Wolfgang	115,0	115,5	209,0	44.	Roensen Atle Pede	111,5		92,6
20.	Kaliniteschenko Ant	108,0		89,3	45.	Mueller Lukas	107,5		94,1
21.	Freitag Richard	128,5	114,0	227,2	46.	Evensen Johan Re	110,5		98,7
22.	Hlava Lukas	126,0	118,0	229,5	47.	Morassi Andrea	110,0		94,5
23.	Romoeren Bjorn Ein	120,0		103,5	48.	Kobayashi Junshiro	107,0		95,6
24.	Watase Yuta	124,0	113,5	208,7	49.	Fettner Manuel	110,5		98,0
25.	Kornilov Denis	128,0	114,0	212,9	50.	Kofler Andreas	127,5	131,5	252,8

Pour la suite, on considérera uniquement le premier saut. On regroupe alors ces résultats dans le tableau ci-dessous. Dans la première colonne de ce tableau (colonne i), on numérote les observations possibles (de 1 *à* 66*). Dans la deuxième colonne (colonne x_i), on inscrit les valeurs que prend le caractère longueur du premier saut en mètres (de* $101,0$ *à* $133,5$*). Dans la troisième colonne (colonne n_i), on inscrit l'effectif de chaque observation (le nombre de fois qu'apparaît chaque observation). Le tableau a été découpé en trois parties pour des questions de lisibilité.*

Obs. i	Long. x_i	Eff. n_i	Obs. i	Long. x_i	Eff. n_i	Obs. i	Long. x_i	Eff. n_i
1	101,0	0	23	112,0	0	45	123,0	1
2	101,5	1	24	112,5	0	46	123,5	1
3	102,0	0	25	113,0	0	47	124,0	1
4	102,5	0	26	113,5	1	48	124,5	1
5	103,0	0	27	114,0	0	49	125,0	0
6	103,5	0	28	114,5	1	50	125,5	1
7	104,0	0	29	115,0	1	51	126,0	1
8	104,5	0	30	115,5	1	52	126,5	0
9	105,0	0	31	116,0	1	53	127,0	0
10	105,5	0	32	116,5	1	54	127,5	1
11	106,0	0	33	117,0	1	55	128,0	2
12	106,5	1	34	117,5	1	56	128,5	1
13	107,0	2	35	118,0	2	57	129,0	0
14	107,5	1	36	118,5	2	58	129,5	2
15	108,0	1	37	119,0	1	59	130,0	0
16	108,5	0	38	119,5	3	60	130,5	1
17	109,0	0	39	120,0	1	61	131,0	0
18	109,5	0	40	120,5	1	62	131,5	1
19	110,0	1	41	121,0	1	63	132,0	1
20	110,5	2	42	121,5	0	64	132,5	1
21	111,0	1	43	122,0	0	65	133,0	1
22	111,5	1	44	122,5	3	66	133,5	0
						$\sum$		50

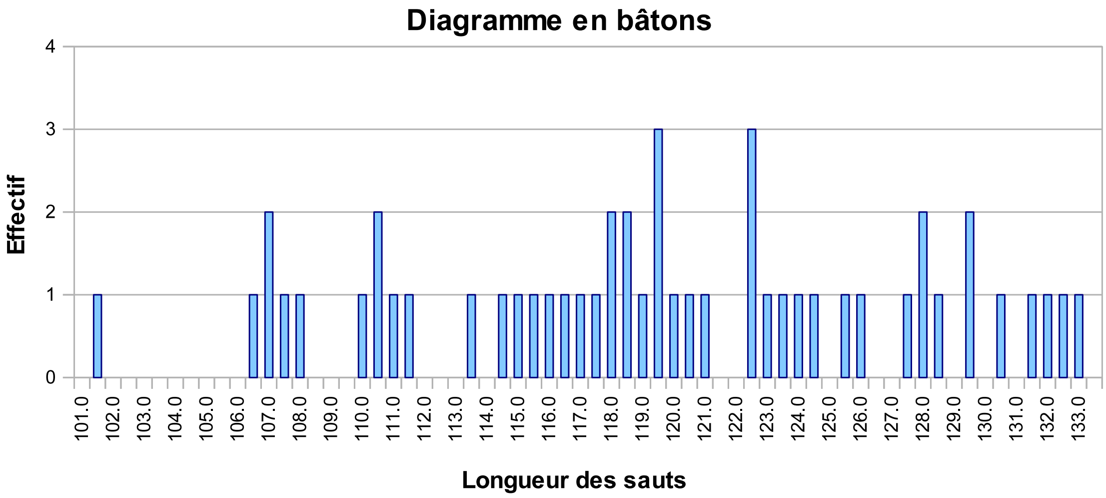
Par la suite, on va ajouter quelques colonnes à ce tableau afin de réaliser plus simplement le calcul de certaines mesures de tendance centrale ou de dispersion. Dans la dernière ligne du tableau, on peut indiquer la somme des valeurs contenues dans la colonne correspondante.

On note par $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{66} n_i$ *l'***effectif total** *(qui correspond à la taille de la population).*

Digramme en bâtons

Afin de rendre plus lisible les données observées, il est intéressant de les représenter graphiquement. Plusieurs représentations sont possibles dans chaque situation. Il faut souvent chercher la plus adaptée à la situation donnée.

Dans le cas de l'exemple précédent, on pourrait représenter les données par un **diagramme en bâtons**. On associe alors à chaque observation un rectangle fin (ou bâton) dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif de l'observation.



Dans cet exemple, on remarque que cette représentation graphique n'apporte pas une lisibilité supplémentaire. Elle n'est donc pas adéquate.

Pour améliorer la lisibilité des données, on peut regrouper les longueurs observées en classes.

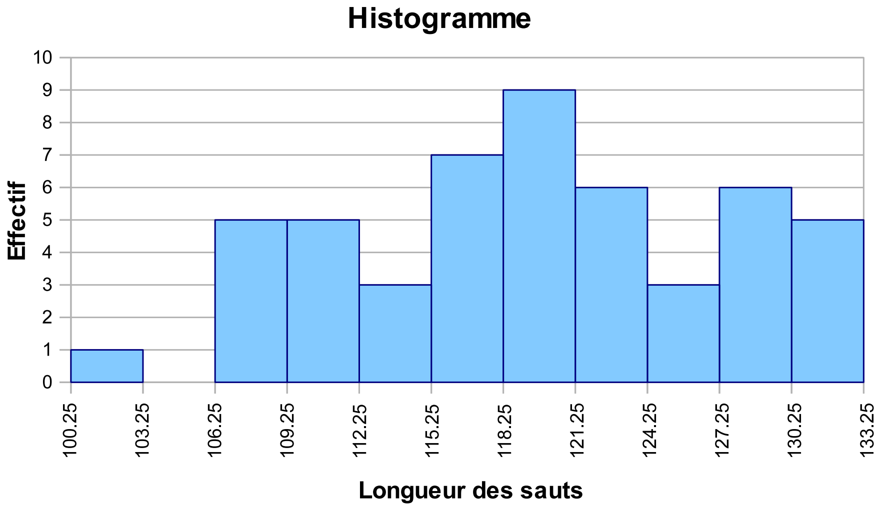
> ***Exemple - Cas continu***
>
> *Dans notre exemple, on peut regrouper les sauts en classes de largeur* 3 *m et obtenir le tableau suivant.*

Observations i	Longueur des sauts	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
1	$[100,25;103,25[$	101,75	1
2	$[103,25;106,25[$	104,75	0
3	$[106,25;109,25[$	107,75	5
4	$[109,25;112,25[$	110,75	5
5	$[112,25;115,25[$	113,75	3
6	$[115,25;118,25[$	116,75	7
7	$[118,25;121,25[$	119,75	9
8	$[121,25;124,25[$	122,75	6
9	$[124,25;127,25[$	125,75	3
10	$[127,25;130,25[$	128,75	6
11	$[130,25;133,25[$	131,75	5
$\sum$			50

Histogramme

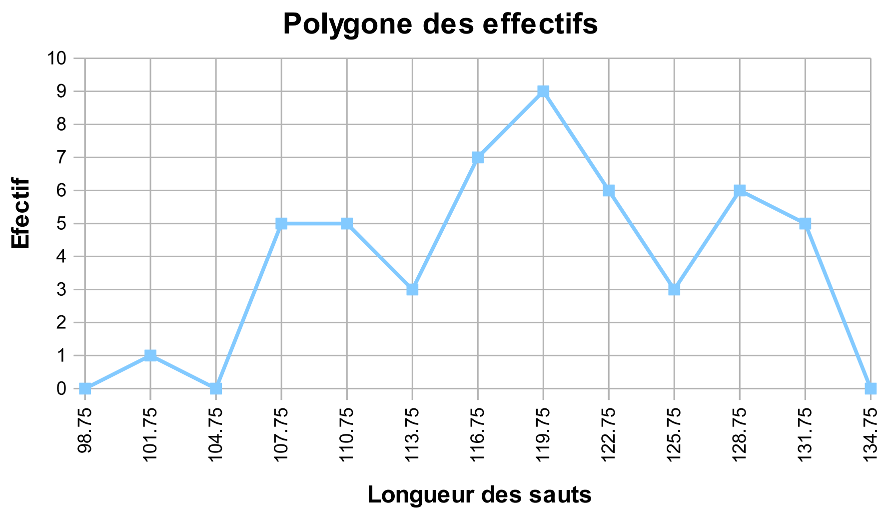
On représente généralement les données, dans le cas continu, par un **histogramme** dans lequel chaque classe se voit attribuer un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.

Le graphique suivant est dessiné d'après les données présentées à l'exemple précédent.



Polygone des effectifs

Une autre représentation graphique équivalente est le **polygone des effectifs** dans lequel on trace une ligne brisée passant par les points qui ont pour abscisses les centres des classes et pour ordonnées les effectifs de ces classes. On fait précéder et suivre les classes considérées par deux classes d'effectif zéro.



Polygone des fréquences cumulées

Il est souvent intéressant de faire figurer dans un tableau statistique, pour chaque valeur x_i que peut prendre le caractère (ou pour chaque classe, dans le cas d'une distribution continue), la proportion f_i des individus qui présentent cette valeur x_i. Ces proportions sont appelées **fréquences**.

Définition 23.2

Si n représentent l'effectif total ($n = \sum_{i=1}^{k} n_i$), alors la **fréquence** f_i de l'observation i ($i = 1, 2, \ldots, k$) est donnée par

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n}}$$

La proportion $F(x)$, appelée **fréquence cumulée**, est la proportion des observations qui présentent des valeurs x_i du caractère inférieures ou égales à x. Elle se calcule en additionnant toutes les fréquences f_i correspondant aux x_i tels que $x_i \leqslant x$.

On peut également considérer la proportion des observations qui présentent des valeurs x_i du caractère supérieures ou égales à une valeur x. On les appelle les fréquences cumulées décroissantes.

Exemple

On reprend ici les longueurs des premiers sauts des 50 *participants au concours de saut d'Innsbruck et on ajoute les valeurs des fréquences et des fréquences cumulées.*

Observations i	Longueur des sauts	Centres des classes x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées $F(x_i + 1.5)$
1	$[100.25; 103.25[$	101.75	1	0.02	0.02
2	$[103.25; 106.25[$	104.75	0	0.00	0.02
3	$[106.25; 109.25[$	107.75	5	0.10	0.12
4	$[109.25; 112.25[$	110.75	5	0.10	0.22
5	$[112.25; 115.25[$	113.75	3	0.06	0.28
6	$[115.25; 118.25[$	116.75	7	0.14	0.42
7	$[118.25; 121.25[$	119.75	9	0.18	0.60
8	$[121.25; 124.25[$	122.75	6	0.12	0.72
9	$[124.25; 127.25[$	125.75	3	0.06	0.78
10	$[127.25; 130.25[$	128.75	6	0.12	0.90
11	$[130.25; 133.25[$	131.75	5	0.10	1.00
$\sum$			50	1	

On peut remarquer, dans ce tableau, que la somme des fréquences est égale à 1*. Ceci sera toujours le cas. En effet, on a*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Dans le cas continu, on représente souvent les fréquences cumulées par le **polygone des fréquences cumulées**. Ce dernier est obtenu en reliant chacun des points $(s_i; F(s_i))$, où s_i est la borne supérieure de la classe i, par un segment de droite. Pour réaliser ceci, on suppose que les observations se répartissent de manière uniforme dans leur classe. Pour le polygone des fréquences cumulées décroissantes, on considère les bornes inférieures des classes.

Pour l'exemple précédent, on obtient les représentations graphiques ci-dessous.

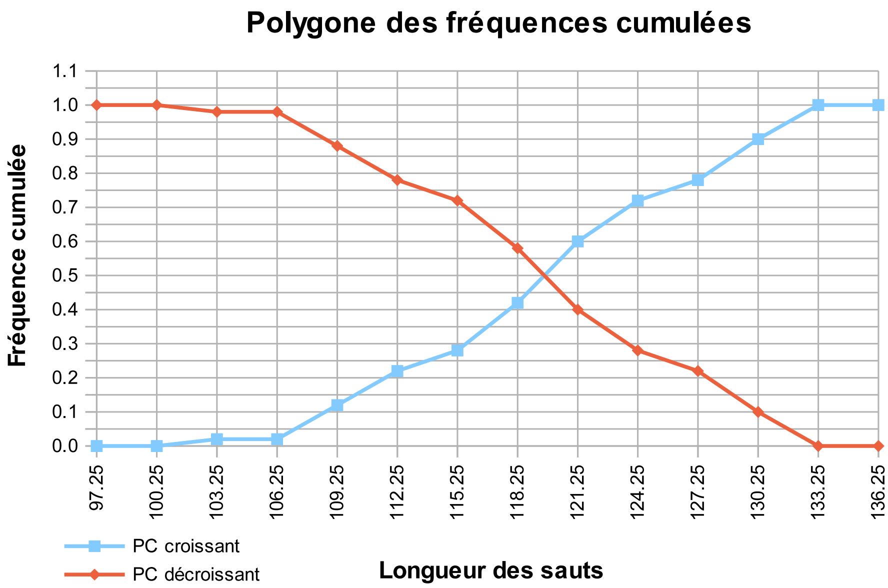


Diagramme circulaire

Pour le diagramme circulaire, on associe à chaque observation un secteur circulaire dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de l'observation.

On donne ci-dessous l'exemple des dépenses de l'état jurassien par catégorie.

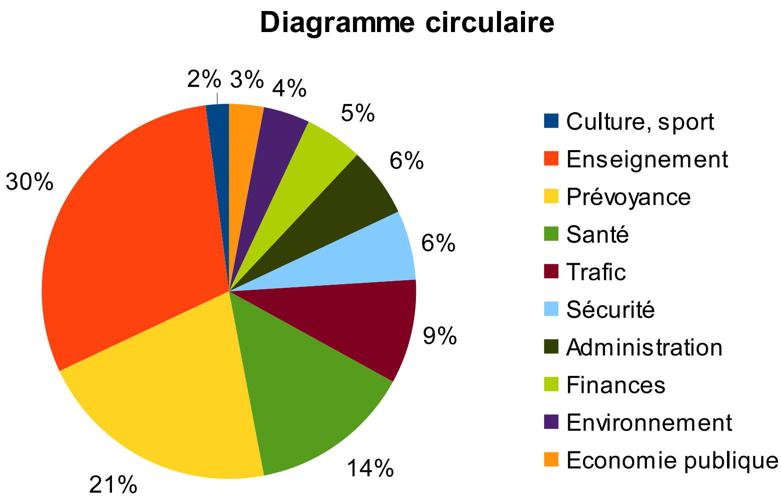


Diagramme en bandes

Le même exemple, que celui donné ci-dessus, peut être représenté par un rectangle séparé en plus petits rectangles dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de l'observation.

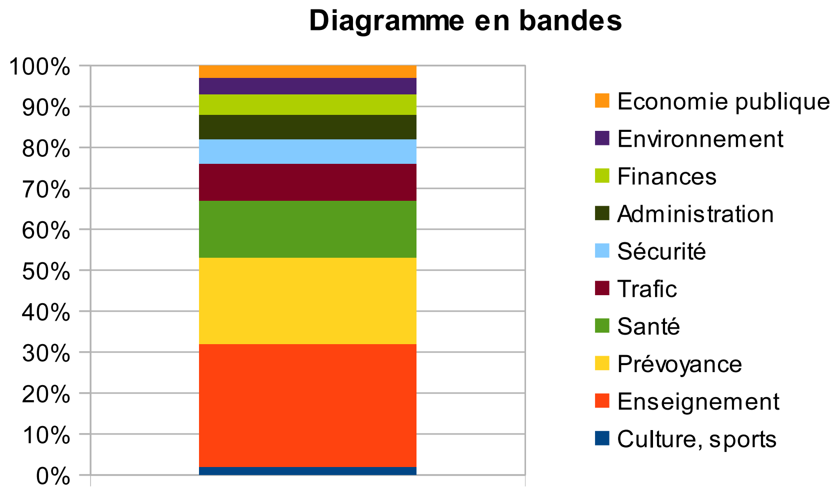


Diagramme polaire

Le diagramme polaire est surtout utilisé pour représenter des données chronologiques. Pour ce diagramme, on associe à chaque observation une demi-droite ayant pour origine un point fixe O, deux demi-droites consécutives formant toujours le même angle. Pour représenter les effectifs, on place sur chaque demi-droite un point dont la distance à O est proportionnelle à l'effectif de l'observation.

On donne ci-dessous l'exemple des précipitations mensuelles mesurées durant l'année 2011 à Payerne.

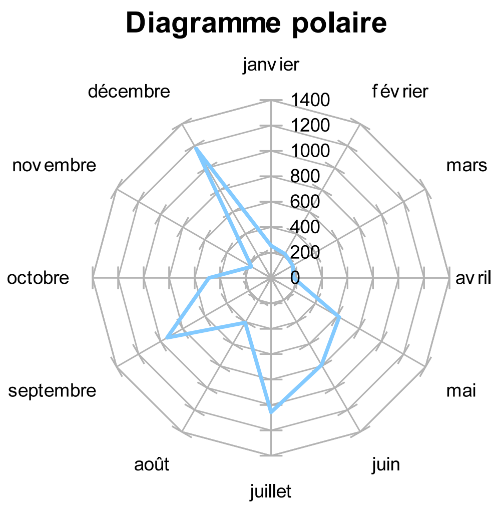
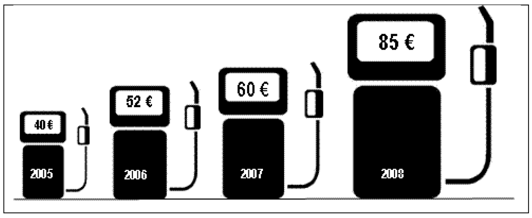


Diagramme figuratif

Dans un diagramme figuratif, les observations sont représentées à l'aide d'images plus ou moins grandes selon la valeur des effectifs.

On donne ci-dessous un exemple de diagramme figuratif représentant l'évolution du prix du carburant.



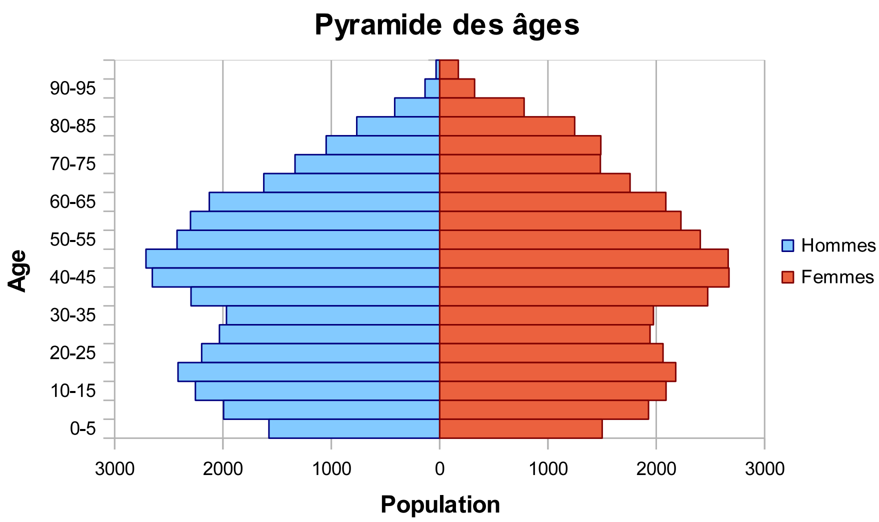
On peut également représenter les observations à l'aide d'images de même taille en quantités proportionnelles aux effectifs.

On représente ci-dessous le nombre de véhicules vendus en Suisse en 2011 par marque. Une voiture équivaut à 5'000 véhicules neufs vendus.

Pyramide des âges

La pyramide des âges est un double histogramme représenté horizontalement. Les classes d'âges d'une population sont représentées en vertical et les effectifs en horizontal. A gauche, on représente les effectifs des personnes de sexe masculin et, de l'autre côté, ceux des personnes de sexe féminin.

Ci-dessous, on donne la pyramide des âges de la population du canton du Jura en 2008.



Ce type de graphique porte le nom de pyramide car sa forme était (ce qui n'est plus le cas aujourd'hui) celle d'un triangle presque isocèle.

23.4 Mesures de position ou de tendance centrale

Les tableaux et les graphiques donnent une bonne idée de la manière dont un caractère est distribué. Cependant, on cherche souvent à illustrer cette distribution de manière plus sommaire par quelques nombres caractéristiques.

23.4.1 Moyenne arithmétique

Cas discret

La **moyenne arithmétique**, plus communément appelée moyenne, est la plus utilisée des mesures de tendance centrale. Elle s'obtient en divisant la somme des valeurs par le nombre de valeurs.

Définition 23.3
La **moyenne arithmétique** $\overline{x}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est définie par

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}}$$

où $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ est l'effectif total.

Le calcul de la moyenne peut se faire également à partir des fréquences f_i :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Remarques

1) La moyenne est influencée par toutes les valeurs x_i et n_i observées et, à ce titre, très sensible aux valeurs extrêmes, au point d'en perdre parfois une bonne partie de sa représentativité, surtout dans les échantillons de petite taille.

   Ainsi la moyenne des six salaires mensuels suivants :

   $$3'500 \quad 4'200 \quad 4'600 \quad 5'000 \quad 6'200 \quad 36'500$$

   est égale à $10'000$, alors qu'un seul salaire dépasse cette moyenne.

2) Les deux définitions données de la moyenne sont bien équivalente. En effet :

   $$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \overline{x}$$

3) La moyenne des écarts $x_i - \overline{x}$ est nulle. En effet :

   $$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} - \frac{\overline{x} \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} n_i}{n} = \overline{x} - \frac{\overline{x} \cdot n}{n} = 0$$

Exemple

Dans une classe de 25 *élèves (population), on a relevé les notes suivantes :*

$$4\ 5\ 3\ 4\ 2\ 3\ 5\ 6\ 5\ 3\ 4\ 4\ 6\ 0\ 5\ 5\ 4\ 3\ 5\ 4\ 2\ 5\ 3\ 4\ 5$$

Pour effectuer le calcul de la moyenne et de la variance des notes, on reprend le tableau statistique présenté précédemment pour le cas discret (numéro de l'observation, i, valeur du caractère, x_i et effectif, n_i) et on le complète par les notes pondérées n_ix_i ($4^{\text{ème}}$ colonne). Pour calculer la moyenne, on peut aussi compléter le tableau par les fréquences f_i ($5^{\text{ème}}$ colonne)et les fréquences pondérées f_ix_i ($6^{\text{ème}}$ colonne).

i	x_i	n_i	n_ix_i	f_i	f_ix_i
1	0	1	0	0,04	0,00
2	1	0	0	0,00	0,00
3	2	2	4	0,08	0,16
4	3	5	15	0,20	0,60
5	4	7	28	0,28	1,12
6	5	8	40	0,32	1,60
7	6	2	12	0,08	0,48
$\sum$		25	99	1,00	3,96

On obtient facilement la valeur de la moyenne en utilisant les résultats contenus dans ce tableau.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_ix_i}{n} = \frac{99}{25} = 3,96$$

On peut également lire directement la moyenne 3,96 *comme somme des f_ix_i.*

Cas continu

Dans de le cas d'un caractère continu, la moyenne se calcule comme dans le cas discret en utilisant comme valeurs x_i les centres de classes.

La moyenne changera légèrement selon la manière dont on aura formé les classes.

23.4.2 Autres moyennes

Nous venons de présenter la moyenne arithmétique. Or, il existe d'autres types de mesure de tendance centrale aussi appelés moyennes.

Moyenne géométrique

Définition 23.4
La **moyenne géométrique** $\overline{g}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est définie par

$$\boxed{\overline{g} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}}}$$

où $\prod_{i=1}^{k}$ représente le produit des éléments qui suivent ce symbole, avec i variant de 1 à k.

Exemple

Si l'augmentation d'un pays est de 5% la première année et de 15% la suivante, l'augmentation moyenne des prix se calcule grâce à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,05 *et* 1,15 *soit une coefficient moyen de*

$$\overline{g} = \sqrt{1,05 \cdot 1,15} = 1,0988$$

et une augmentation moyenne de 9,88%.

Moyenne harmonique

Définition 23.5
La **moyenne harmonique** $\overline{h}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est définie par

$$\boxed{\overline{h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}}$$

où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ est l'effectif total.
Lorsqu'on parle de vitesse moyenne sur un parcours, on fait parfois référence à la moyenne harmonique.

Exemple

Un automobiliste roule sur 1 *km à* 30 *km/h,* 7 *km à* 60 *km/h, puis sur* 16 *km à* 80 *km/h et encore* 48 *km à* 120 *km/h. Il aura donc parcouru* 72 *km en* $2+7+12+24=45$ *min, soit une vitesse moyenne de*

$$\overline{v} = \frac{72}{\frac{45}{60}} = 96 \ km/h$$

qui est bien la moyenne harmonique des vitesses :

$$\overline{v} = \frac{72}{\frac{1}{30} + \frac{7}{60} + \frac{16}{80} + \frac{48}{120}} = 96 \ km/h$$

Moyenne quadratique

Définition 23.6
La **moyenne quadratique** $\overline{q}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est définie par

$$\boxed{\overline{q} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}}$$

où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ est l'effectif total.

Moyenne pondérée

Définition 23.7
La **moyenne pondérée** $\overline{x}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les poids respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$ est définie par

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i x_i}{p}}$$

où $p = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ est le poids total.

Le rôle des p_i est d'accorder une importance plus grande à certaines observations qu'à d'autres. Ils jouent en quelque sorte le rôle de l'effectif. Un enseignant qui donne différents poids à ses travaux écrits utilisera la moyenne pondérée.

23.4.3 Médiane

Cas discret

La médiane est une valeur telle que la moitié des valeurs x_i de la population (ou de l'échantillon) lui soient inférieures ou égales et l'autre moitié supérieures ou égales.

Définition 23.8
La **médiane** $\widetilde{x}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (où n représente l'effectif total), *rangé dans l'ordre des grandeurs croissantes*, est la valeur du "milieu" :

– si n est impair, on considère la valeur centrale :

$$\boxed{\widetilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}}$$

– si n est pair, on considère la moyenne arithmétique des deux valeurs centrales :

$$\boxed{\widetilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}$$

Remarques

1) La médiane n'est pas affectée par les valeurs extrêmes de la distribution.
2) Dans le cas des six salaires (voir remarque 1 moyenne), la médiane vaut $4'800$.
3) Dans les distributions asymétriques la médiane donne également une idée plus "équilibrée" de la tendance centrale.

Exemple

Nous reprenons ici les données de l'exemple sur les notes d'une classe. On commence par trier les 25 *valeurs par ordre croissant :*

$$0\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 6$$

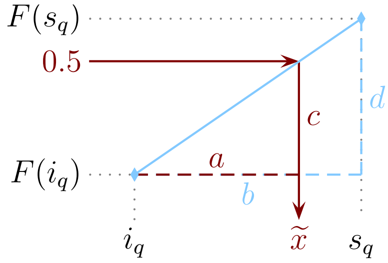
On peut ensuite déterminer la médiane comme étant la $13^{\text{ème}}$ *note :* $\widetilde{x} = x_{\frac{25+1}{2}} = x_{13} = 4$

Cas continu

Définition 23.9
Dans le cas d'un caractère continu, dont le polygone des fréquences cumulées est donné par la fonction $F(x)$, la **médiane** est la valeur $\widetilde{x}$ telle que $F(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}$

Pour son calcul, on repère la classe $[i_q; s_q[$ où la fréquence cumulée dépasse pour la première fois $0,5$ et on ne considère alors plus que le segment du polygone des fréquences cumulées qui correspond à cette classe. On détermine ensuite $\widetilde{x}$ par interpolation linéaire en posant, d'après le schéma ci-dessous, que (grâce au théorème de Thalès sur les triangles semblables ou à la définition de la pente d'une droite) :

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \qquad \text{ou} \qquad \frac{0,5 - F(i_q)}{\widetilde{x} - i_q} = \frac{F(s_q) - F(i_q)}{s_q - i_q}$$

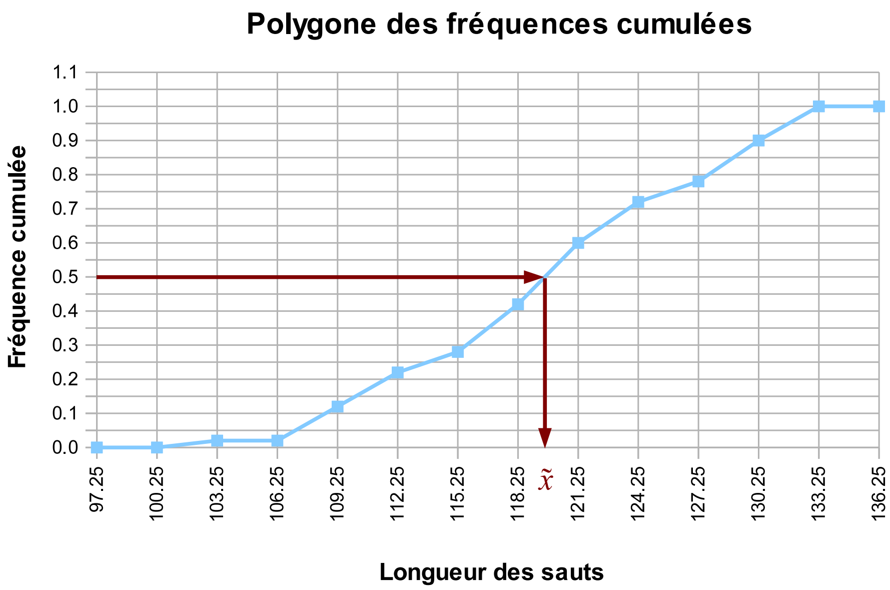


Ainsi :

$$\widetilde{x} = i_q + \frac{0,5 - F(i_q)}{F(s_q) - F(i_q)} \cdot (s_q - i_q)$$

Exemple

On donne ci-dessous le polygone des fréquences cumulées des longueurs des sauts donné dans un précédant exemple en indiquant la manière de déterminer graphiquement la médiane.



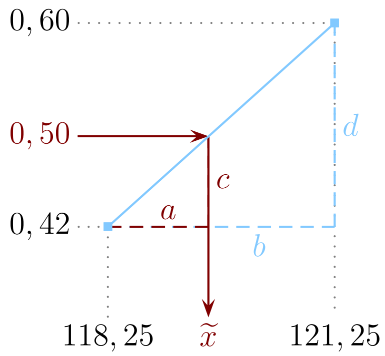
Par lecture graphique, la médiane vaut environ $119,5$ *m. On peut la calculer plus précisément selon la méthode donnée ci-dessus.*

La classe où la fréquence cumulée dépasse $0,5$ *est :* $[118,25; 121,25[$. *On peut donc poser, d'après la représentation ci-contre, que*

$$\frac{0,50 - 0,42}{\widetilde{x} - 118,25} = \frac{0,60 - 0,42}{121,25 - 118,25}$$

et donc en isolant $\widetilde{x}$ *:*

$$\widetilde{x} = 118,25 + \frac{0,08}{0,18} \cdot 3 = 119,58$$



23.4.4 Mode

Cas discret

Définition 23.10
Le **mode** est la valeur la plus fréquente dans une série de données.

Remarques

1) Dans certaines distributions, il y a plusieurs modes.
2) Le mode est insensible aux valeurs extrêmes.
3) Il est moins utilisé que la moyenne ou la médiane.

Exemple

Pour les données de l'exemple sur les notes d'une classe, le mode vaut 5 *car* 8 *observations (maximum au niveau du nombre d'observations par valeur du caractère) ont été réalisées de la valeur* 5.

Cas continu

Définition 23.11
Dans le cas d'un caractère continu, le **mode** se trouve dans la classe $[i_m; s_m[$ ayant le plus grand effectif, appelée la **classe modale**. Il se calcule à partir de l'histogramme (voir exemple ci-dessous pour une représentation graphique) en tenant compte comme suit du "gain" en fréquence de la classe modale par rapport aux deux classes voisines (d'après théorème de Thalès sur les triangles semblables) :

$$\frac{x}{c - x} = \frac{b}{d}$$

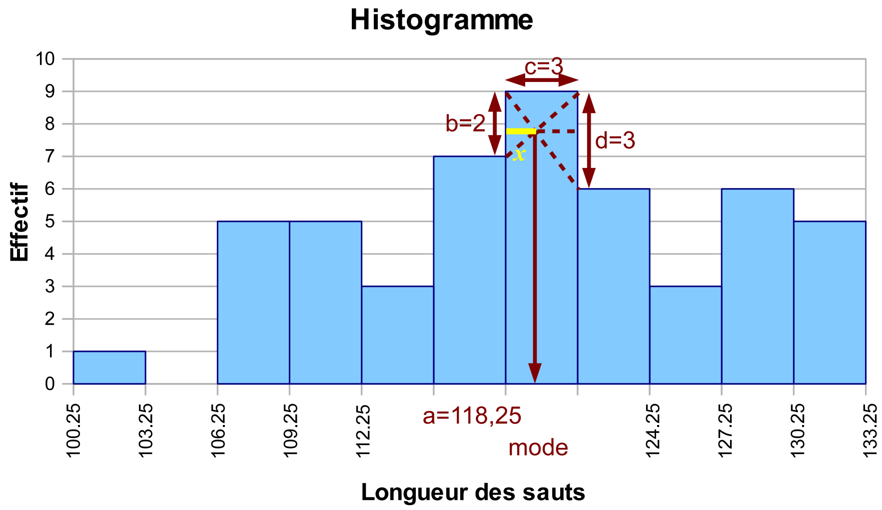
et ainsi, en isolant x dans cette expression :

$$\text{mode} = a + \frac{bc}{b + d}$$

où $a = i_m$.

Exemple

On donne ci-dessous l'histogramme des longueurs des sauts vu dans un précédant exemple.



Dans ce cas, on voit que la classe modale est la classe $[118,25; 121,25[$ *et que le mode est égal à environ* $119,5$. *Il se calcule exactement à partir de la classe modale de la manière suivante :*

$$mode = 118,25 + \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 119,45$$

23.5 Mesures de dispersion

Pour affiner l'analyse des données, il faut pouvoir évaluer la dispersion plus ou moins grande des données autour d'une valeur centrale. En effet, un même valeur centrale ne permet pas d'affirmer que deux jeux d'observations sont identiques, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

Un élève français a obtenu les notes suivantes à sept travaux écrits de mathématiques :

$$12 \quad 15 \quad 11 \quad 8,5 \quad 10 \quad 14 \quad 10$$

Cette série de notes pour être "résumée" en calculant la moyenne qui vaut $11,5$.

Un élève de la même classe a obtenu les notes :

$$15 \quad 14 \quad 5 \quad 9,5 \quad 8 \quad 12 \quad 18$$

La moyenne est encore ici de $11,5$. *Mais, le premier élève a des notes moins dispersées que le second. Par exemple, l'écart entre la note la plus basse et la note la plus haute est de* $6,5$ *pour le premier et de* 13 *pour le second.*

Pour différencier ces deux jeux de données, on peut utiliser une **mesure de dispersion**.

23.5.1 Variance et écart-type

Cas discret

Si l'on désire se faire une idée de la manière dont les valeurs du caractère s'écartent de la moyenne $\overline{x}$ de ce caractère, on peut calculer la moyenne des écarts absolus $|x_i - \overline{x}|$. Pour des raisons essentiellement théoriques et pratiques, on préfère néanmoins calculer la moyenne des écarts quadratiques.

Définition 23.12
La **variance** ν d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec les effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est définie par

$$\boxed{\nu = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

L'**écart-type** σ est défini comme la racine carré de la variance :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\nu}}$$

Remarques

1) Si l'on utilise la moyenne pour mesurer la tendance centrale, on lui associe naturellement l'écart-type pour mesurer la dispersion (par rapport à la moyenne).
2) Le calcul de la variance est plus simple si l'on utilise la formule suivante :

$$\boxed{\nu = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

qui se justifie comme suit :

$$\begin{aligned}
\nu = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot 2x_i\overline{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \overline{x}^2}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n} + \overline{x}^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

La variance d'une série statistique est donc égale à la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne. Cette formule simplifie énormément les calculs puisque $\overline{x}$ n'intervient qu'une fois. Si on avait utiliser la moyenne des écarts absolus, une formule de ce type n'existerait pas. Il faudrait donc pour chaque observation calculer la différence à la moyenne et en prendre la valeur absolue.
3) Lorsqu'on calcule la variance d'un échantillon et non de la population entière, le dénominateur est $n - 1$ dans la formule de la définition.
4) Dans le cours de troisième année, nous verrons que lorsque la population a une distribution "normale", alors :

- $68,3\%$ des valeurs sont situées entre $\overline{x}-\sigma$ et $\overline{x}+\sigma$
- $95,4\%$ des valeurs sont situées entre $\overline{x}-2\sigma$ et $\overline{x}+2\sigma$
- $99,7\%$ des valeurs sont situées entre $\overline{x}-3\sigma$ et $\overline{x}+3\sigma$

5) Les calculatrices modernes comprennent des touches spéciales pour calculer efficacement la moyenne et l'écart-type.

Exemple

Nous reprenons ici les données de l'exemple sur les notes d'une classe. Pour effectuer de la variance et de l'écart-type des notes, on reprend le tableau statistique donné dans cet exemple et on le complète par le carré des notes x_i^2 ($4^{\text{ème}}$ colonne) et par le carré des notes pondérées $n_i x_i^2$ ($5^{\text{ème}}$ colonne).

i	x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	2	2	4	8
4	3	5	9	45
5	4	7	16	112
6	5	8	25	200
7	6	2	36	72
$\sum$		99		437

On obtient facilement les valeurs de la variance et de l'écart-type des notes en utilisant les résultats contenus dans ce tableau.

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{437}{25} - 3,96^2 = 1,80 \\ \sigma &= \sqrt{1,80} = 1,34\end{aligned}$$

On peut remarquer que dans cet exemple 20 *notes sur* 25*, soit le* 80%*, sont situées entre $\overline{x}-\sigma$ et $\overline{x}+\sigma$ et* 24 *notes sur* 25*, soit le* 96%*, sont situés entre $\overline{x}-2\sigma$ et $\overline{x}+2\sigma$.*

Cas continu

Dans de le cas d'un caractère continu, la variance et l'écart-type se calculent comme dans le cas discret en utilisant comme valeurs x_i les centres de classes.

La variance et l'écart-type changeront légèrement selon la manière dont on aura formé les classes.

23.5.2 Intervalle semi-interquartile

Définition 23.13
L'**intervalle semi-interquartile** $\widetilde{x}$ d'un caractère prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est calculé de la manière suivante :

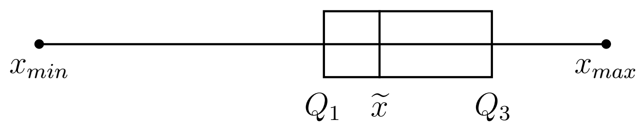
1. Trier les données dans l'ordre croissant.

2. Diviser les données en deux groupes de taille égale : le groupe A avant la médiane, le groupe B après la médiane (si la population de départ a une taille impaire, rajouter la médiane en tête du groupe B).
3. Calculer la médiane du groupe A, que l'on appellera le **premier quartile** et qu'on notera Q_1.
4. Calculer la médiane du groupe B, que l'on appellera le **troisième quartile** et qu'on notera Q_3.
5. L'intervalle semi-interquartile (isi) vaut alors :

$$\boxed{\text{isi} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

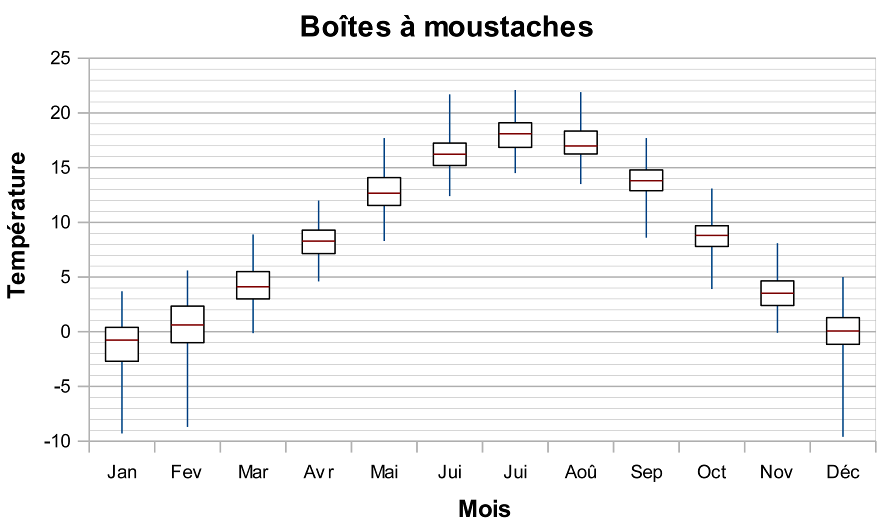
Remarques

1) Le **deuxième quartile**, noté Q_2, est égal, par définition, à la médiane $\widetilde{x}$.
2) Si on utilise la médiane pour mesurer la tendance centrale, on lui associera l'intervalle semi-interquartile pour mesurer la dispersion.
3) On peut encore affiner la caractérisation de la distribution en réalisant une **boîte à moustache** (ou box plot) qui indique les emplacements respectifs des quartiles et de la médiane relativement à la plus petite et à la plus grande des valeurs de la population (on nomme **étendue** la distance $x_{max} - x_{min}$).



Ce type de diagramme peut être utilisé, par exemple, pour comparer un même caractère dans deux populations de tailles différentes. On peut également représenté les boîte à moustaches verticalement.

On donne ci-dessous la représentation sous forme de boîtes à moustaches des températures mensuelles moyennes à Berne de 1826 à 2004.



Exemple

Nous reprenons les données de l'exemple précédent et nous les séparons en deux groupes comme indiqué dans la définition de l'intervalle semi-interquartile :

Groupe A	*Groupe B*
0 2 2 3 3 **3** **3** 3 4 4 4 4	4 4 4 5 5 5 **5** 5 5 5 5 6 6
$Q_1 = \dfrac{3+3}{2} = 3$	$Q_3 = 5$

$$\text{isi} = \frac{5-3}{2} = 1$$

Cas continu

Définition 23.14

Dans le cas d'un caractère continu, dont le polygone des fréquences cumulées est donné par la fonction $F(x)$, on appelle respectivement premier, deuxième et troisième **quartile** les valeurs Q_1, Q_2 et Q_3 telles que

$$F(Q_1) = \frac{1}{4}\ ;\ F(Q_2) = \frac{1}{2}\ ;\ F(Q_3) = \frac{3}{4}$$

L'**intervalle semi-interquartile** est égal à la moitié de la longueur de l'intervalle $[Q_1; Q_3]$:

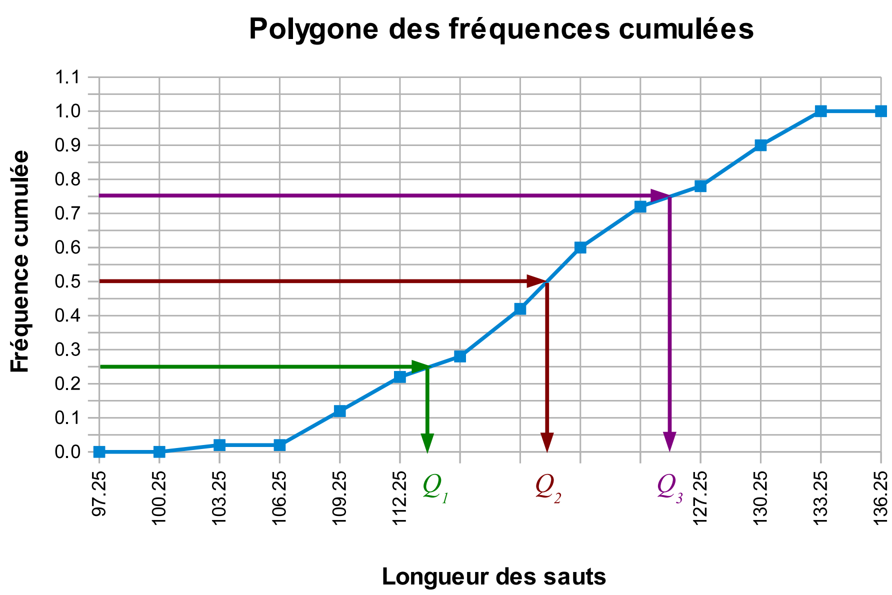
$$\text{isi} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Remarque

L'intervalle $[Q_1; Q_3]$ contient le 50% des valeurs de la population.

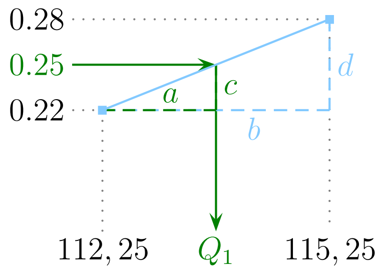
Exemple

On donne ci-dessous le polygone des fréquences cumulées des longueurs des sauts donné dans un précédant exemple en indiquant la manière de déterminer graphiquement les premier, deuxième et troisième quartiles.



Par lecture graphique, la premier quartile vaut environ $113,7$ *m, le deuxième environ* $119,5$ *m et le troisième environ* $125,7$ *m. On peut réaliser les calculs suivants pour déterminer plus précisément l'****intervalle semi-interquartile****.*

La classe où la fréquence cumulée dépasse $0,25$ *est :* $[112,25;115,25[$. *On peut donc poser que*

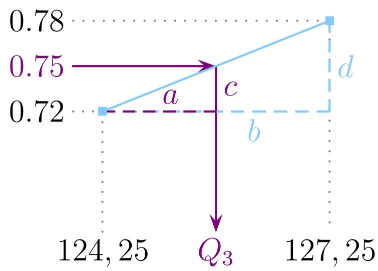


$$\frac{0,25-0,22}{Q_1-112,25}=\frac{0,28-0,22}{115,25-112,25}$$

et donc en isolant Q_1 *:*

$$Q_1=112,25+\frac{0,03}{0,06}\cdot 3=113,75$$

La classe où la fréquence cumulée dépasse $0,75$ *est :* $[124,25;127,25[$. *On peut donc poser que*



$$\frac{0,75-0,0,72}{Q_3-124,25}=\frac{0,78-0,72}{127,25-124,25}$$

et donc en isolant Q_3 *:*

$$Q_3=124,25+\frac{0,03}{0,06}\cdot 3=125,75$$

Et finalement : $isi=\dfrac{125,75-113,75}{2}=6$

23.6 Exercices

1) On donne les valeurs de $x_1, \ldots, x_7$ et $n_1, \ldots, n_7$ dans le tableau ci-dessous.

Indice i	Valeur de x_i	Valeur de n_i
1	0	2
2	1	5
3	2	3
4	3	6
5	4	2
6	5	9
7	6	1

Avec les données ci-dessus, calculer les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} x_i$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} n_k$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i \sum_{j=1}^{4} x_j$

2) Les trois élèves suivants ont 4 de moyenne. Et pourtant, ils sont très différents. Calculer l'écart-type de leurs quatre notes et réaliser un digramme en bâtons pour chaque situation. Quels constats peut-on réaliser ?

a) 4 4 4 4 b) 2 2 6 6 c) 2 3 5 6

3) Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants :

9,95 9,85 10,13 9,69 9,47 9,98 9,87 9,46 10,00

Calculer la moyenne et l'écart-type de ces résultats.

4) On a pesé 100 poussins âgés de deux semaines. Les résultats de ces pesées ont été regroupés par classe (de centre x_i et d'effectif n_i) dans le tableau suivant

x_i	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123	128	133
n_i	1	1	4	9	14	20	17	15	10	5	3	1

Représenter ces données sous forme d'un diagramme en bâtons. Calculer la moyenne et l'écart-type du poids.

5) Lors d'une journée, on a relevé les âges de 20 personnes venant se présenter à l'examen théorique du permis de conduire :

18	19	19	23	36	21	57	23	22	19
18	18	20	21	19	26	32	19	21	20

Calculer la moyenne, la médiane, le mode, la variance, l'écart-type et l'intervalle semi-interquartile de ces valeurs.

6) Les températures mensuelles moyennes de cinq villes suisses ont été les suivantes (entre 1901 et 1960) :

Bâle	0,2	1,4	5,2	8,9	13,4	16,6	18,4	17,6	14,3	9,2	4,3	1,4
Neuchâtel	0,0	1,0	4,9	8,8	13,4	16,6	18,6	17,9	14,7	9,2	4,3	1,3
Genève	0,2	1,1	4,9	8,7	13,1	16,5	18,3	17,6	14,3	9,1	4,5	1,5
Lausanne	0,2	1,2	5,0	8,5	13,0	16,2	18,2	17,6	14,5	9,5	4,5	4,4
Sion	-0,2	1,6	6,2	10,3	14,9	18,0	19,6	18,6	15,3	10,0	4,6	0,8

Calculer pour chaque ville la température moyenne annuelle, l'écart-type, la médiane, les premier et troisième quartiles et l'intervalle semi-interquartile.

7) L'enseignant de mathématiques dit à un élève : "*Tu as réussi à obtenir* $4,5$ *de note de semestre*". Quelle est sa dernière note, sachant que dans les quatre premières il a obtenu $5,1$, $4,6$, $3,2$ et $4,3$?

8) $41'250'000$ personnes d'un pays ont atteint leur taille définitive ($1,67$ mètres de moyenne). Si l'on dit que, dans ce pays, la femme moyenne mesure $1,61$ mètre et l'homme moyen $1,74$ mètre, quel est le nombre de femmes dans ce pays ?

9) Chaque élève de la classe est prié de relever le prix de trente articles **différents** choisis **au hasard**, soit en se promenant dans un grand magasin, soit en parcourant un catalogue de vente par correspondance. Il notera ensuite combien de fois apparaît chaque premier chiffre significatif (le chiffre tout à gauche, 0 excepté), i.e. combien de fois le prix des articles commence par 1, par 2, ..., par 9.

   Les résultats seront rassemblées et analysés en classe.

10) Calculer la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la moyenne harmonique et la moyenne quadratique pour l'exemple des longueurs des sauts lors du concours d'Innsbruck. Utiliser les données regroupées en classes.

11) Les salaires mensuels payés aux ouvriers d'une entreprise se répartissent comme suit :

4	ouvriers gagnent entre $3'400$ et $3'700$ francs
21	ouvriers gagnent entre $3'700$ et $4'000$ francs
104	ouvriers gagnent entre $4'000$ et $4'300$ francs
163	ouvriers gagnent entre $4'300$ et $4'600$ francs
121	ouvriers gagnent entre $4'600$ et $4'900$ francs
57	ouvriers gagnent entre $4'900$ et $5'200$ francs
22	ouvriers gagnent entre $5'200$ et $5'500$ francs
10	ouvriers gagnent entre $5'500$ et $5'800$ francs

   a) Dessiner l'histogramme et le polygone des fréquences cumulées.
   b) Calculer le mode, la médiane et l'intervalle semi-interquartile.
   c) Calculer le salaire mensuel moyen et l'écart-type.

12) Lors d'un contrôle de vitesse on a relevé les vitesses suivantes (arrondies à l'entier inférieur ou égal) :

117	134	130	113	127	125	98	110	124	122	126	101
106	121	121	104	124	117	109	128	134	146	111	139
123	124	130	123	120	133	111	143	145	111	110	119
114	104	126	99	140	105	119	134	128	119	137	109
122	130	92	104	113	130	120	84	166	138	129	119

a) Grouper ces données par classes : $[80; 90[$, $[90; 100[$, ...

b) Dessiner le diagramme à secteur correspondant

c) Calculer le mode, la médiane et l'intervalle semi-interquartile.

d) Calculer la vitesse moyenne et l'écart-type.

13) Un fabricant de cigarettes souhaite commercialiser une nouvelle sorte de cigarettes. Pour cela, il a fait mesurer la quantité de goudron (en mg) d'un échantillon de 50 de ces cigarettes. Voici les résultats :

11,70	11,02	11,24	11,12	12,23	10,32	10,33	10,89	11,88	10,72
10,86	11,05	11,23	9,67	10,88	11,36	10,65	11,33	12,00	10,71
10,90	10,74	11,42	10,03	10,35	10,31	11,85	10,88	10,97	10,77
11,06	11,68	10,82	10,16	9,89	10,66	10,94	11,14	10,28	10,35
10,87	11,14	10,79	10,65	11,07	11,43	10,98	10,92	11,20	11,49

a) Réunir ces données en 9 classes d'amplitude égale entre $9,60$ mg et $12,30$ mg.

b) Dessiner l'histogramme en utilisant les classes du point a).

c) Calculer la valeur moyenne de la quantité de goudron par cigarette ainsi que l'écart-type en utilisant 1) les 50 mesures, 2) les 9 classes.

d) La qualité de cette nouvelle cigarette est jugée stable si la quantité de goudron d'au moins $\frac{3}{4}$ des cigarettes se situe entre $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$. Est-ce que cet échantillon donne satisfaction ?

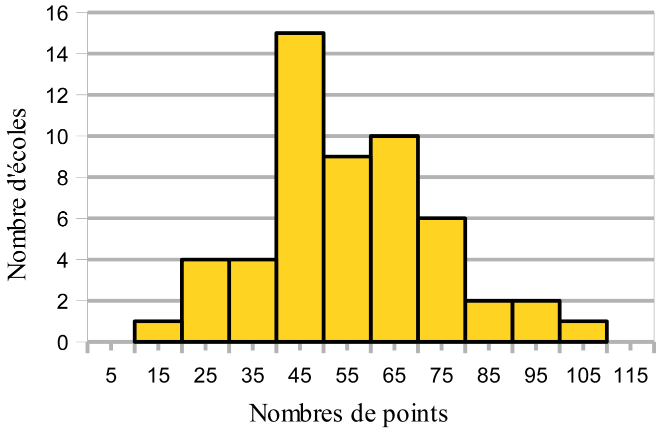
14) On donne, dans le tableau suivant, la population du canton du Jura en 2009 et la population (estimée) du Sénégal en 2010.

Classes	Jura	Sénégal
$[0; 5[$	3073	2060535
$[5; 10[$	3832	1656892
$[10; 15[$	4321	1486441
$[15; 20[$	4585	1397139
$[20; 25[$	4300	1228971
$[25; 30[$	4009	1028779
$[30; 35[$	3858	791366
$[35; 40[$	4670	653021
$[40; 45[$	5267	525850
$[45; 50[$	5439	419856
$[50; 55[$	4911	338742
$[55; 60[$	4559	277726
$[60; 65[$	4356	211036
$[65; 70[$	3450	147084
$[70; 75[$	2900	119899
$[75; 80[$	2538	68501
$[80; 85[$	2039	84462
$[85; 90[$	1233	
$[90; 95[$	469	
$[95; 100[$	219	

a) Calculer la moyenne, la médiane, l'écart-type et les premier et troisième quartiles pour la population du Jura.

b) Calculer la moyenne, la médiane, l'écart-type et les premier et troisième quartiles pour la population du Sénégal.

15) Lors d'un concours de *Mathématiques sans Frontières*, le nombre de points obtenus par les écoles de Suisse se répartit selon l'histogramme suivant :



a) Calculer la moyenne de cette série.

b) En utilisant l'histogramme, trouver le pourcentage des écoles qui ont moins de 64 points.

16) Après avoir constaté que la moyenne de classe était catastrophique, l'enseignant décide de monter tout le monde d'un demi-point. Laquelle de ces mesures statistiques ne changera pas : la moyenne, l'écart-type, le mode ou la médiane ?

23.7 Solutions des exercices

1) a) 10 b) 27 c) 29 d) 96

2) a) 0 b) 2 c) $1,581$

3) $\overline{x} = 9,82$, $\sigma = 0,22$

4) $\overline{x} = 106,25$, $\sigma = 10,52$

5) $\overline{x} = 23,55$, $\widetilde{x} = 20,5$, mode $= 19$,
$\nu = 79,74$, $\sigma = 8,93$, isi $= 2$

6)

	$\overline{x}$	σ	$\widetilde{x}$	Q_1	Q_3	isi
Bâle	9,24	6,43	9,05	2,85	15,45	6,30
Neuchâtel	9,23	6,61	9,00	2,80	15,65	6,43
Genève	9,15	6,42	8,90	3,00	15,40	6,20
Lausanne	9,40	6,13	9,00	4,45	15,35	5,45
Sion	9,98	6,98	10,15	3,10	16,65	6,78

7) note : $5,3$

8) environ $22'211'538$ femmes

10) Moyenne arithmétique : $119,51$, moyenne géométrique : $119,26$, moyenne harmonique : $119,00$, moyenne quadratique : $119,76$

11) b) mode $= 4475$, $\widetilde{x} = 4'525$, $isi \cong 260$ c) $\overline{x} \cong 4'559$, $\sigma = 393,6$

12) c) mode $= 123,6$, $\widetilde{x} = 122,2$, $isi = 9,4$ d) $\overline{x} = 121,7$, $\sigma = 14,5$

13) c) 1) $\overline{x} = 10,938$, $\sigma = 0,530$ 2) $\overline{x} = 10,944$, $\sigma = 0,545$ d) non

14) a) $\overline{x} = 41,9$, $\tilde{x} = 42,2$, $\sigma = 23,4$, $Q_1 = 22,0$, $Q_3 = 59,7$
b) $\overline{x} = 22,9$, $\tilde{x} = 18,7$, $\sigma = 18,3$, $Q_1 = 8,20$, $Q_3 = 33,2$

15) a) $\overline{x} = 55,37$ b) $68,52\%$ des écoles

16) l'écart-type

Chapitre 24

Ajustements

Dans beaucoup de recherches statistiques, on ne s'intéresse pas qu'à un seul caractère mais à plusieurs en même temps. On s'occupe alors fréquemment de leur dépendance les uns avec les autres.

Quand on considère deux caractères x et y, un **couple** de valeurs $(x_i; y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ correspond à chacun des n individus de la population. L'ensemble des couples obtenus est appelé **série statistique double**.

On représente généralement cette série dans un repère cartésien. Cette représentation graphique de tous les couples $(x_i; y_i)$ de la série est appelée **nuage de points**. Quand il existe une relation entre les deux caractères, on peut *résumer* le nuage de points par une courbe telle que le nuage de points a une forte densité au voisinage de la courbe et faible ailleurs.

Définition 24.1
La démarche d'**ajustement** consiste à déterminer une courbe C qui *résume* un nuage de points.

La courbe C permet d'**estimer** les valeurs d'un caractère en fonction de valeurs de l'autre caractère. Les valeurs ainsi estimées sont des **approximations**.

Lorsque cette courbe est une droite, on parle d'**ajustement linéaire**.

24.1 Ajustements linéaires

On considère ici les n points d'un nuage représentant la série des n couples de valeurs (x_i, y_i) de deux caractères x et y déterminés à partir d'une population de n individus. L'ajustement d'une droite D à ce nuage de points consiste à remplacer chaque point $(x_i; y_i)$ par un point de même abscisse et d'ordonné $\hat{y}_i$, les points $(x_i, \hat{y}_i)$ étant alignés sur la droite D.

Il existe plusieurs possibilités d'effectuer ceci. Le problème qu'on peut se poser est de trouver la "meilleure" droite qui résume le nuage de points.

Une fois l'équation de la droite D déterminée, on pourra l'utiliser pour faire des *interpolations* (calculs de valeurs intermédiaires) et des *extrapolations* (calculs de valeurs futures).

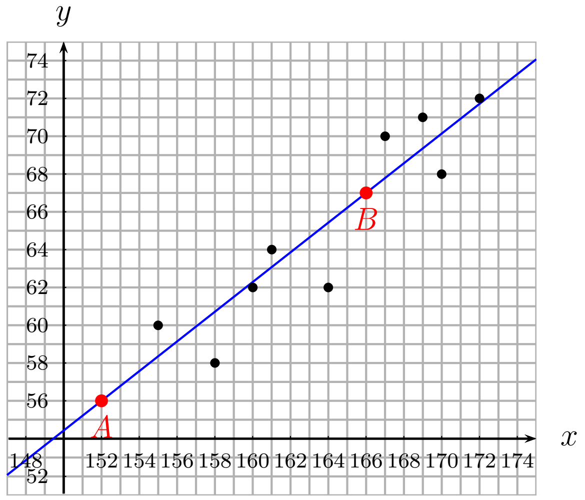
24.1.1 Ajustement linéaire graphique

Nous allons travailler sur un exemple pour donner l'idée de la démarche à mettre en oeuvre.

Lors d'une expérience, on a étudié les caractères taille (caractère x) en cm et masse (caractère y) en kg de 9 personnes (expérience fictive). On a obtenu les résultats suivants :

Taille (x_i)	155	158	160	161	164	167	169	170	172
Masse (y_i)	60	58	62	64	62	70	71	68	72

La méthode graphique consiste à tracer, à l'**œil**, à l'aide d'une règle transparente, une droite $y = mx + h$ s'ajustant le mieux possible au nuage de points.



Une fois la droite tracée, on choisit sur le dessin deux points A et B quelconques de la droite pour en déterminer l'équation. Ces points ne doivent pas obligatoirement faire partie du nuage de points.

L'équation de la droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par :

$$y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$$

Les points A et B choisis dans notre exemple ont comme coordonnées $(152; 56)$ et $(166; 67)$. La droite passant par ces deux points est :

$$y - 67 = \frac{67 - 56}{166 - 152}(x - 166)$$

On obtient après simplification : $y = 0,78x - 63,43$.

L'équation de la droite étant déterminée et les valeurs de x étant fixées, on peut en déduire les **valeurs ajustées** correspondantes du caractère y et **extrapoler** la masse d'une personne mesurant 180 cm.

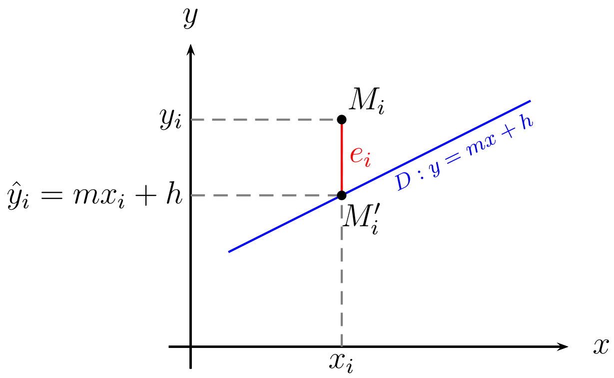
Taille (x_i)	155	158	160	161	164	167	169	170	172	*180*
Masse ($\widehat{y_i}$)	58,4	60,7	62,3	63,1	65,4	67,8	69,4	70,1	71,7	*78,0*

24.1.2 Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Remarque préliminaire

On considère à nouveau les n points $M_i(x_i; y_i)$ d'un nuage de points. Soit maintenant une droite D quelconque d'équation $y = mx + h$. On appelle e_i l'écart du point M_i à la droite D :

$$e_i = \overline{M_i' M_i} = y_i - (mx_i + h)$$



A quelle condition doit satisfaire la droite D pour que la somme des écarts des points M_i à la droite soit nulle : $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$? Cette relation s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - h) = 0$$

ou :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot h = 0$$

ou enfin :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}_{\overline{y}} - m \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\overline{x}} - h = 0$$

Elle signifie donc que la droite D passe par le *point moyen* ω, ayant pour abscisse la moyenne $\overline{x}$ des abscisses et pour ordonnée la moyenne $\overline{y}$ des ordonnées.

Ainsi la condition $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ ne suffit pas à déterminer la droite D, puisqu'elle lui impose uniquement de passer par un point. De plus, cette condition n'est pas satisfaisante du point de vue de l'ajustement : elle exige seulement que les écarts s'équilibrent algébriquement (les écarts peuvent être grands en valeur absolue).

Droite de Mayer

Une droite étant déterminée par deux points, le résultat ci-dessus conduit au procédé suivant.

On divise l'ensemble des points M_i en 2 sous-ensembles , à peu près d'égale importance, et tels que l'abscisse de tout point du premier soit inférieure à l'abscisse de tout point du second. On les appelle sous-ensemble de gauche et sous-ensemble de droite.

La droite D d'ajustement de Mayer doit alors vérifier les deux conditions :

– la somme des écarts des points du sous-ensemble de gauche est nulle $\Rightarrow$ D passe par le point moyen ω_g du sous-ensemble de gauche,
– la somme des écarts des points du sous-ensemble de droite est nulle $\Rightarrow$ D passe par le point moyen ω_d du sous-ensemble de droite.

Remarques

1) Comme la somme des écarts pour l'ensemble total est nulle, la droite de Mayer passe par le point moyen ω de l'ensemble total.
2) On sépare l'ensemble de points en sous-ensemble de gauche et sous-ensemble de droite pour que les points moyens de ces sous-ensembles soient les plus éloignés possible, de façon à augmenter la précision dans la détermination de la droite.

Exemple

On reprend ici les données du paragraphe précédent sur la taille et la masse de 9 *personnes. On divise tout d'abord l'ensemble des couple en deux sous-ensembles :*
– *sous-ensemble de gauche : longueur de* 155 *cm à* 164 *cm,*
– *sous-ensemble de droite : longueur de* 167 *cm à* 172*cm.*
On calcule ensuite les points moyens de ces deux sous-ensembles :

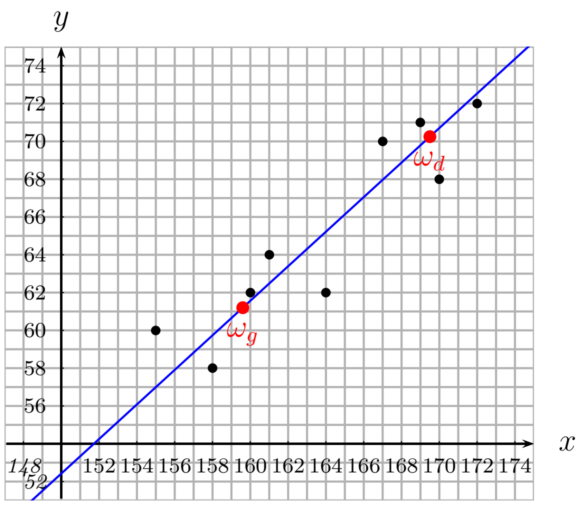
$$\omega_g(159,6;61,2) \qquad et \qquad \omega_d(169,5;70,25)$$

La droite de Mayer cherchée passe par ces deux points :

$$y - 61,2 = \frac{70,25 - 61,2}{169,5 - 159,6}(x - 159,6)$$

On obtient après simplification : $y = 0.91x - 84,70$.

Graphiquement, on obtient l'ajustement suivant :



24.1.3 Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

On considère toujours les n points $M_i(x_i; y_i)$ d'un nuage de points. L'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer la droite (que l'on appelle aussi **droite de régression**) telle que la somme des carrés des n écarts $e_i = y_i - \hat{y}_i$ soit minimale (ce qui explique le nom de la méthode), où $\hat{y}_i$ est l'ordonnée du point de la droite de régression d'abscisse x_i. On veut donc minimiser la quantité

$$q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Mise en place de la méthode

1) On s'intéresse d'abord au problème restreint suivant.

   Parmi toutes les droites de pente donnée m_0, trouver celle pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum.

   Pour commencer, on pose que l'équation de la droite cherchée est :

$$y = m_0 x + h$$

   où h est le coefficient à déterminer. A partir de ceci, on peut poser que, pour tout i, l'écart e_i est donné par $e_i = y_i - (m_0 x_i + h)$. La somme des carrés de ces écarts est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} ((y_i - m_0 x_i) - h)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_0 x_i)^2 - 2h \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_0 x_i) + n \cdot h^2 \end{aligned}$$

   Cette expression est un trinôme du second degré en b. Il est représenté par une parabole ouverte vers le haut car le coefficient b^2 est multiplié par n, un nombre positif. Ce trinôme est donc minimal pour [1] :

$$h_{min} = -\frac{-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_0 x_i)}{2n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - m_0 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{y} - m_0 \overline{x}$$

   Cette relation signifie que parmi toutes les droites de pente m_0, celle d'équation $y = m_0 x + h_{min}$, pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum, est celle qui passe par le point moyen $\omega(\overline{x}; \overline{y})$. En effet, ce dernier vérifie l'équation de la droite comme $\overline{y} = m_0 \overline{x} + h_{min}$. On en déduit que la droite de régression passe nécessairement par le point moyen ω.

2) Nous sommes donc ramenés au problème : parmi toutes les droites qui passent par ω, trouver celle pour laquelle la somme des carrés des écarts est minimum.

   Pour ceci, on réalise une translation du système d'axe (ou un changement de variables) de manière à obtenir un nouveau système de coordonnées tel que l'origine de ce dernier corresponde au point ω. On note (X_i, Y_i) les coordonnées des n points du nuage dans ce nouveau système d'axes. Ainsi, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a la relation suivante entre anciennes et nouvelles coordonnées :

$$x_i = \overline{x} + X_i \qquad \text{et} \qquad y_i = \overline{y} + Y_i$$

1. Le trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a > 0$, est minimum pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$ qui correspond à l'abscisse du sommet de la parabole

Dans ce nouveau système d'axes, la droite recherchée passe donc par l'origine et admet une équation de la forme :

$$Y = mX$$

où m est le coefficient à déterminer. Les écarts e_i sont donc donné par $e_i = Y_i - mX_i$. La somme des carrés de ces écarts est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - mX_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2m \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_iX_i + m^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2\end{aligned}$$

Cette expression est encore un trinôme du second degré en m. Comme le coefficient de a^2 est positif, ce trinôme est minimum pour

$$m_{min} = -\frac{-2\sum\limits_{i=1}^{n} X_iY_i}{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_iY_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}$$

En revenant aux coordonnées $(x_i; y_i)$ (voir exercices pour la démonstration), la droite $D_{y/x}$ d'ajustement de y par rapport à x passe par le point $\omega(\overline{x}; \overline{y})$ et a pour pente

$$m = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

On appelle le nombre σ_{xy} la **covariance de x et y**. Le nombre σ_x^2 correspond lui à la varaince de x.

Méthode de calcul et représentation graphique

1. Dans un tableau, on effectue le calcul des moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. On calcule :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \bar{x}\bar{y} \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

   ce qui nécessite, dans le tableau, le calcul des valeurs x_iy_i et x_i^2.

   On en déduit :

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

   qui est la pente de la droite.

3. On écrit l'équation de la droite $D_{y/x}$ d'ajustement de y par rapport à x (elle passe par le point $\omega(\overline{x}; \overline{y})$) :

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$

4. On trace cette droite sur le graphique. Pour cela, $D_{y/x}$ passant par $\omega(\bar{x}, \bar{y})$, il suffit de trouver un autre point de cette droite.

Remarques

1) Certaines calculatrices ont des fonctions statistiques qui fournissent ces valeurs très rapidement. Consultez le mode d'emploi de votre machine !
2) On pourrait également calculer la pente m en utilisant les X_i et Y_i définis dans la partie mise en place de la méthode. Cette démarche peut être intéressante si les valeurs des x_i et y_i sont "grandes", mais regroupées autour des moyennes, afin d'obtenir obtenir des produits et des carrés, dans le tableau, moins "grands".

Exemple

On reprend l'exemple sur la taille (caractère x) et la masse (caractère y) de 9 personnes. On complète tout d'bord le tableau suivant :

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1	155	60	9'300	24'025
2	158	58	9'164	24'964
3	160	62	9'920	25'600
4	161	64	10'304	25'921
5	164	62	10'168	26'896
6	167	70	11'690	27'889
7	169	71	11'857	27'889
8	170	68	11'560	28'900
9	172	72	12'384	29'584
$\sum$	1'476	587	96'489	242'340

D'après ce tableau, on peut calculer :

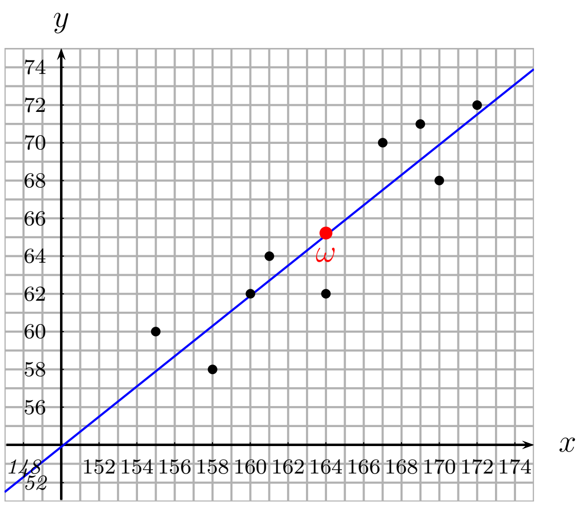
– $\bar{x} = \dfrac{1'476}{9} = 164$ *et* $\bar{y} = \dfrac{587}{9} = 65,22$

– $\sigma_{xy} = \dfrac{96'489}{9} - 164 \cdot 65,22 = 24,55$ *et* $\sigma_x^2 = \dfrac{242'340}{9} - 164^2 = 30,66$

– *D'où* $m = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,80$.

Équation de $D_{y/x}$ *:* $y - 65,22 = 0,80 \cdot (x - 164)$*, d'où* $\boxed{y = 0,80x - 66,10}$.

Graphiquement, on obtient l'ajustement suivant :



24.2 Coefficient de corrélation linéaire

Jusqu'à maintenant, nous avons vu comment ajuster une droite à un nuage constitué de n points $(x_i; y_i)$. Par contre, nous ne nous sommes pas demandé si les points était "suffisamment" alignés pour que cette démarche ait un sens ou, de manière équivalente, si la relation qui lie chaque x_i et y_i est bien linéaire (du type $y_i = mx_i + h$).

Le coefficient de corrélation linéaire est une mesure possible de ce lien. Il détermine s'il existe une relation linéaire entre les deux caractères et donne également une indication sur la valeur de l'ajustement linéaire.

Définition 24.2
On appelle **coefficient de corrélation linéaire** relatif aux caractères x et y, le nombre réel :

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

avec $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$, $\quad \sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}$, $\quad \sigma_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2}$.

Propriétés du coefficient de corrélation

1. r est un nombre réel compris entre -1 et 1.
2. Quand $|r| = 1$, tous les points sont alignés.

Remarques

1. Si $|r|$ est voisin de 1, la corrélation entre les caractères x et y est forte. Ainsi, si x augmente y va également augmenter, si r est positif, ou diminuer, si r est négatif. Les points (x_i, y_i), représentés dans un graphique, seront pratiquement alignés.
2. Si $|r|$ est voisin de 0, la corrélation entre les caractères x et y est faible. On ne pourra pas dégager une relation linéaire entre les caractères x et y.
3. $r > 0$ indique une corrélation positive, $r < 0$ indique une corrélation négative.

Méthode de calcul

1. Dans un tableau, on effectue le calcul des moyennes arithmétiques :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. On calcule :

$$\sigma_{xy}, \quad \sigma_x, \quad \sigma_y$$

   ce qui nécessite, dans le tableau, le calcul des valeurs $x_i y_i$, x_i^2 et y_i^2.
3. On en déduit le coefficient de corrélation $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Exemples

1. *Les criquets ont un organe spécial sur leurs ailes qui produit un son lorsqu'ils frottent leurs ailes les unes contre les autres. En règle générale, plus la température est élevée, plus ils frottent leurs ailes rapidement. On a relevé les mesures suivantes :*

Température (°C) (x_i)	15	17	20	23	27
Nbre de pulsations par sec. (y_i)	$13,5$	$14,1$	$14,5$	$16,3$	$17,1$

On utilise le tableau de calcul suivant :

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	15	$13,5$	$202,5$	225	$182,3$
2	17	$14,1$	$239,7$	289	$198,8$
3	20	$14,5$	$290,0$	400	$210,3$
4	23	$16,3$	$374,9$	529	$265,7$
5	27	$17,1$	$461,7$	729	$292,4$
$\sum$	102	$75,5$	$1'568,8$	$2'172$	$1'149,5$

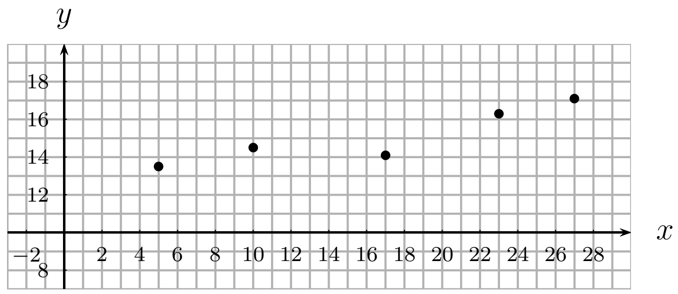
D'après ce tableau, on peut calculer :

– $\bar{x} = \dfrac{102}{5} = 20,4$ *et* $\bar{y} = \dfrac{75,5}{5} = 15,1$

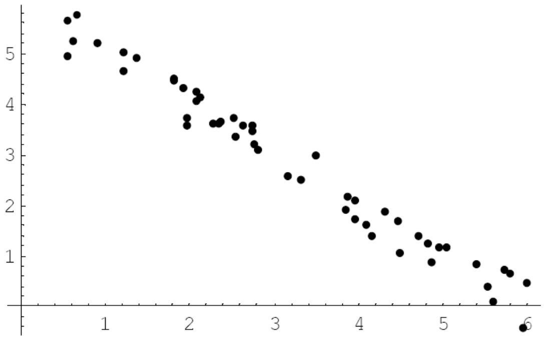
– $\sigma_{xy} = \dfrac{1'568,8}{5} - 20,4 \cdot 15,1 = 5,72$, $\sigma_x^2 = \dfrac{2'172}{5} - 20,4^2 = 18,24$ *et* $\sigma_y^2 = \dfrac{1149,5}{5} - 15,1^2 = 1,87$

– *D'où* $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,98.$

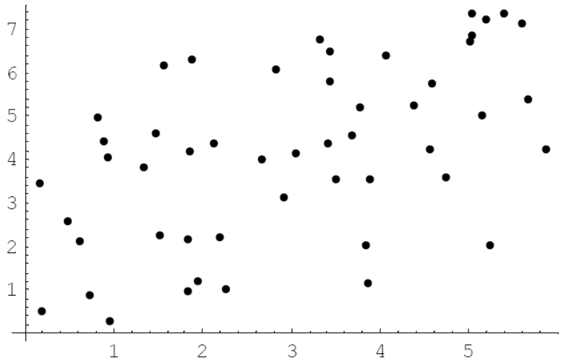
On donne ci-dessous, la représentation graphique du nuage de points considéré dans cet exemple.



2. *On a représenté deux jeux de données dans les graphiques ci-dessous.*
   – *Le coefficient de corrélation entre les caractères x et y est de -0.98. Les points sont pratiquement alignés. On peut supposer qu'il existe une dépendance linéaire entre les caractères x et y.*



– *Le coefficient de corrélation entre les caractères x et y est de* 0.53. *Il est difficile de conclure à une dépendance linéaire entre les caractères x et y.*



24.3 Ajustements non-linéaires

Lorsque le nuage de points manifeste en tendance courbe et que le coefficient de corrélation linéaire n'est pas proche de 1 en valeur absolue, l'ajustement de ce nuage par une droite est hasardeux et aboutira à des estimations de mauvaise qualité. Dans ce cas, on peut tenter d'utiliser un des modèles proposés dans ce chapitre.

En fait, chacun de ces modèles utilise le principe d'ajustement par la méthode des moindres carrés (donc ils utilisent tous une droite) mais en "transformant" au préalable les données pour obtenir un modèle linéaire à partir du modèle non-linéaire considéré.

24.3.1 Ajustement par une fonction homographique

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une certaine hyperbole de la forme $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

Pour utiliser la méthode des moindres carrés, on doit transformer cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$. On réalise ceci de la manière suivante :

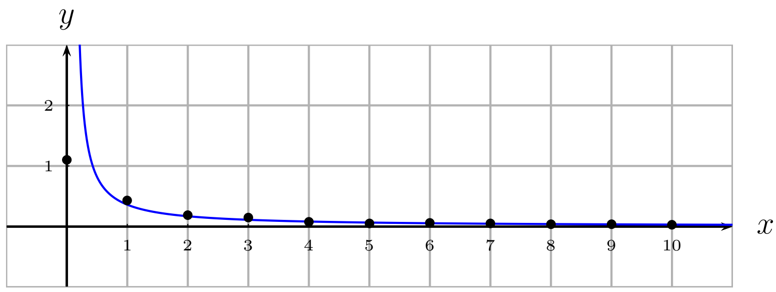
$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{v} = \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{x}_{u} + \underbrace{b}_{B}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = x_i$ et $v_i = \frac{1}{y_i}$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.

3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de l'hyperbole d'ajustement $y = \frac{1}{ax+b}$, en utilisant que $a = A$ et $b = B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 6.



24.3.2 Ajustement par une fonction puissance

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction puissance de la forme $y = b \cdot x^a$.

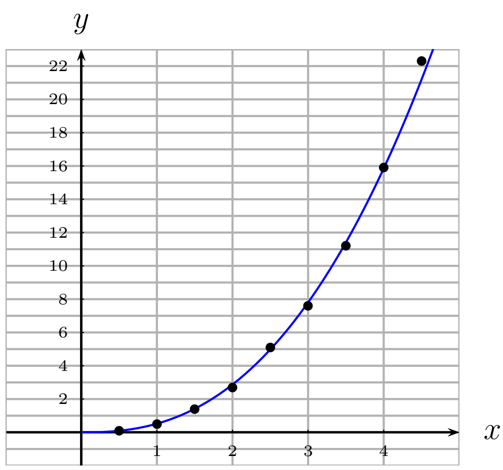
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \ln(b \cdot x^a) \\ \ln(y) & = & \ln(x^a) + \ln(b) \\ \underbrace{\ln(y)}_{v} & = & \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} + \underbrace{\ln(b)}_{B} \end{array}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = \ln(x_i)$ et $v_i = \ln(y_i)$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = b \cdot x^a$, en utilisant que $a = A$ et $b = e^B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 7.



24.3.3 Ajustement par une fonction exponentielle

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction exponentielle de la forme $y = b \cdot a^x$.

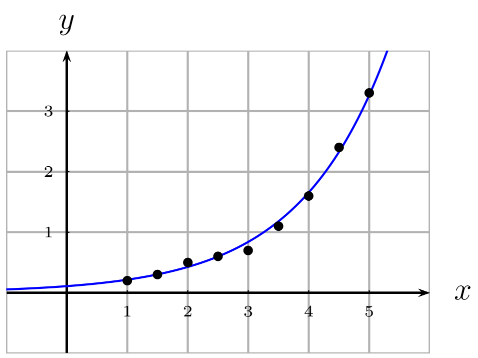
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \ln(b \cdot a^x) \\ \ln(y) & = & \ln(a^x) + \ln(b) \\ \underbrace{\ln(y)}_{v} & = & \underbrace{\ln(a)}_{A} \cdot \underbrace{x}_{u} + \underbrace{\ln(b)}_{B} \end{array}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = x_i$ et $v_i = \ln(y_i)$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au + B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = b \cdot a^x$, en utilisant que $a = e^A$ et $b = e^B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 8.



24.3.4 Ajustement par une fonction logarithme

Les n points $(x_i; y_i)$ ne sont pas alignés, mais plutôt proches d'une courbe représentant une fonction logarithme de la forme $y = a\ln(x) + b$.

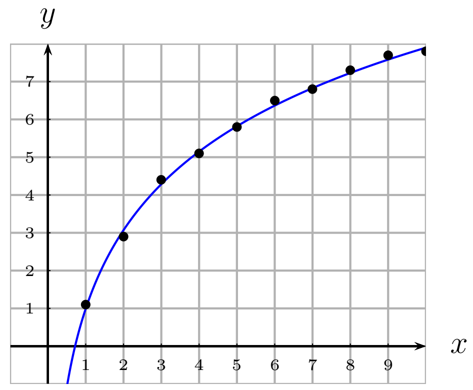
On transforme cette expression pour obtenir une expression de la forme $v = A \cdot u + B$ de la manière suivante :

$$\underbrace{y}_{v} = \underbrace{a}_{A} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} + \underbrace{b}_{B}$$

Méthode de calcul

1. Calculer $u_i = \ln(x_i)$ et $v_i = y_i$.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de v par rapport à u par la méthode des moindres carrés.
3. De l'équation $v = Au+B$, déduire l'équation de la courbe d'ajustement $y = a\ln(x)+b$, en utilisant que $a = A$ et $b = B$.

Par exemple, on obtient l'ajustement ci-dessous si on applique cette méthode aux données de l'exercice 9.



24.4 Exercices

1) Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	3,1	4,7	7,3	9,2	11,1	12,9	15,4	17	18,8

   a) Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode Mayer ;
      3) par la méthode des moindres carrés.
   b) Dessiner les droites obtenues en 2 et en 3.
   c) Interpoler la valeur de $\hat{y}$ pour $x = 6,3$ grâce aux droites obtenues en 2 et en 3.

2) Le tableau ci-dessous compare des voitures de même catégorie. Il met en rapport la cylindrée (en pouces) et le nombre de miles parcourus avec un gallon d'essence ($3,78$ litres aux USA).

Voiture	Cylindrée	Miles par gallon
VW Rabbit	97	24
Datsun 210	85	29
Chevette	98	26
Dodge Omni	105	24
Mazda 626	120	24
Oldsmobile Starfire	151	22
Mercury Capri	140	23
Toyota Celica	134	23
Datsun 810	146	21

   a) Donner l'équation d'une droite ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode des moindres carrés.
   b) Dessiner la droite obtenue en 2.
   c) Estimer le nombre de miles par gallon d'une voiture ayant une cylindrée de 125 grâce à la droite obtenue en 2.

3) Le tableau de la page suivante montre l'évolution des temps olympiques du 200 m plat, en secondes, pour les hommes et pour les femmes.
   a) Donner l'équation des droites (celle des performances des hommes et celle des performances des femmes) ajustant ces valeurs
      1) à l'œil ;
      2) par la méthode des moindres carrés.

b) Dessiner les droites obtenues en 2.

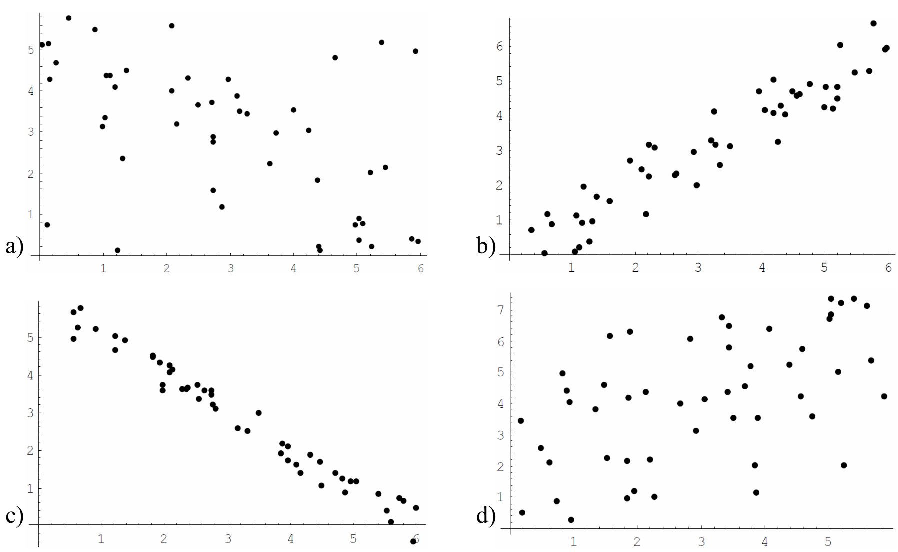
c) Estimer les temps olympiques de 2004 et 2008 puis les comparer aux valeurs réelles. Constats ?

d) D'après les droites obtenues en 2, en quelle année les femmes courront-elles le 200 m plat aussi vite que les hommes ?

e) Ces ajustements affines sont-ils adéquats ?

	200 m hommes	200 m femmes
Londres 1948	21,1	24,4
Helsinki 1952	20,7	23,7
Melbourne 1956	20,6	23,4
Rome 1960	20,5	24,0
Tokyo 1964	20,3	23,0
Mexico 1968	19,83	22,5
Munich 1972	20,00	22,40
Montréal 1976	20,23	22,37
Moscou 1980	20,19	22,03
Los Angeles 1984	19,80	21,81
Séoul 1988	19,75	21,34
Barcelone 1992	19,73	21,72
Atlanta 1996	19,32	22,12
Sydney 2000	20,09	21,84
Athènes 2004		
Pékin 2008		

4) Rendre à chacun des nuages de points ci-dessous sons coefficient de corrélation linéaire : $-0,98$, $-0,50$, $0,53$ et $0,94$



5) Dans une entreprise qui fabrique et vend un seul produit, le relevé des ventes mensuelles et des charges mensuelles correspondantes (en milliers de francs) donne le tableau suivant :

Ventes	18	16	21	22	29	28	10	11	27	25	26	19
Charges	20	16	18	21	25	24	12	12	22	20	22	16

a) Donner l'équation de la droite ajustant ces valeurs par la méthode des moindres carrés.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

6) Ajuster ce nuage de points par une hyperbole de la forme $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	0,43	0,19	0,15	0,08	0,05	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03

7) Ajuster ce nuage de points par une fonction puissance de la forme $y = bx^a$.

x_i	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
y_i	0,1	0,5	1,4	2,7	5,1	7,6	11,2	15,9	22,3	28,1

8) Ajuster ce nuage de points par une fonction exponentielle de la forme $y = ba^x$.

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
y_i	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	1,1	1,6	2,4	3,3

9) Ajuster ce nuage de points par une fonction logarithme de la forme $y = a\ln(x) + b$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,1	2,9	4,4	5,1	5,8	6,5	6,8	7,3	7,7	7,8

24.5 Solutions des exercices

1) a) 1) $y = 1,99x - 0,9$ 2) $y = 1.992x - 0896$ c) 1) $\hat{y} = 11.64$ 2) $\hat{y} = 11.65$

2) a) 2) $y = -0.08x + 34.01$ c) 2) $\hat{y} = 23,54$

3) hommes : a) 2) $y = 66.34 - 0.02x$ c) 19.44 et 19.35
femmes : a) 2) $y = 122.17 - 0.05x$ c) 21.17 et 20.97
d) en 2068

4) a) -0.50 b) 0.94 c) -0.98 d) 0.53

5) a) $y = 0,64x + 5,61$ b) $0,95$

6) $y = \dfrac{1}{3,1x - 0,33}$

7) $y = 0,52x^{2,45}$

8) $y = 0,11 \cdot 1,97^x$

9) $y = 3\ln(x) + 0,99$

Index