Algèbre

Chapitre 1

Notions fondamentales

1.1 Ensembles et sous-ensembles

Définition 1.1
Une collection d'objets est un **ensemble** lorsqu'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection. Ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.

N'importe quel objet (mathématique ou non) peut être considéré comme un élément d'un ensemble (y compris un ensemble !).

Notation

1. On représente généralement un ensemble par une lettre latine majuscule : E.
2. Les éléments d'un ensemble sont notés entre accolades et séparés par des points-virgules.
3. Si l'élément x **appartient** à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.
4. Si l'élément x **n'appartient pas** à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

> ***Exemples***
>
> – *L'ensemble des nombre de 0 à 6 y compris :* $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
> *Ici, on a :*
> $$0 \in E, \qquad 4 \in E, \qquad 10 \notin E.$$
> – *L'ensemble des élèves d'une classe :* $F = \{\text{Aline}; \text{Bernard}; \ldots\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières différentes :

1. en énumérant ses éléments, $G = \{5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$.

2. en donnant une condition d'appartenance. La notation est alors légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\text{"}\underbrace{\text{H est}}_{H=}\ \underbrace{\text{l'ensemble}}_{\{...\}}\ \text{des}\ \underbrace{\text{éléments de } E}_{\substack{n\in E \\ \text{on donne un nom} \\ \text{général aux éléments} \\ \text{de l'ensemble}}}\ \underbrace{\text{tels que}}_{|}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 15}}_{\substack{n^2\geqslant 15 \\ \text{on écrit la condition à l'aide d'une formule} \\ \text{grâce au fait qu'on a donné un nom aux éléments}}}\text{"}$$

par

$$H = \{n \in E \mid n^2 \geqslant 15\}$$

Cas particulier

Si un ensemble E ne contient aucun élément, on l'appelle **ensemble vide** et on le note $\{\}$ ou $\varnothing$.

Définition 1.2
Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B.

> ***Exemple***
>
> $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *et* $C = \{3; 4; 5; 6\}$
>
> *L'ensemble A est un sous-ensemble de B, mais A n'est pas un sous-ensemble de C.*

Définition 1.3
Soit A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. On dit que

1. A est **inclus dans** B si tout élément de A appartient à B. On note $A \subset B$. Dans ce cas, A est un sous-ensemble de B.
2. A **contient** B, lorsque tout élément de B appartient à A. On note $A \supset B$. Dans ce cas, B est un sous-ensemble de A.
3. A est **égal** à B, lorsque tout élément de A appartient à B et que tout élément de B appartient à A. On note $A = B$.

Syntaxe

Nous venons de rencontrer deux signes mathématiques qu'il s'agit de ne pas confondre :

Nom	Terme de gauche	Symbole	Terme de droite
Appartenir à	Elément	$\in$	Ensemble
Etre inclus dans	Ensemble	$\subset$	Ensemble
Etre égal à	Elément	$=$	Elément
Etre égal à	Ensemble	$=$	Ensemble
Contenir	Ensemble	$\ni$	Elément
Contenir	Ensemble	$\supset$	Ensemble

On a l'équivalence suivante lorsque A est un ensemble.

$$\boxed{x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A}$$

Remarques

1. $A \not\subset B$ signifie qu'il existe au moins un élément de A qui n'appartient pas à B.
2. Soit un ensemble $E = \{a; b; c\}$.
   $a \in E$ et $\{a\} \subset E$ sont des notations correctes, $a \subset E$ ne l'est pas.

1.2 Les ensembles de nombres

Les mathématiciens ont classé les nombres dans des ensembles, appelés **ensembles de nombres**. Ces derniers sont désignés par des symboles universellement adoptés :

1. $\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 \dots\}}$: l'ensemble des **nombres naturels**.

   C'est cet ensemble de nombres que nous utilisons la plupart du temps pour compter (des objets, de l'argent, etc.). Historiquement, le zéro n'est pas apparu en même temps que les autres nombres. On le rencontre pour la première fois en Inde. Les Hindous (sanscrit) l'ont désigné par le mot "sunya" qui signifie : vide ou nul. Les Arabes l'ont repris en le transformant quelque peu pour donner "sifr". Le zéro n'a été importé en Europe qu'au début du XIII^{e} siècle par Fibonacci. Les Européens (en latin) ont transformé "sifr" en "zephirum" qui donnera zéro et en "cifra" qui donnera chiffre.

2. $\boxed{\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}}$: l'ensemble des **nombres entiers** (relatifs).

   Ensuite, les nombres négatifs sont apparus et, mis ensemble avec les nombres naturels, ont formé l'ensemble des nombres entiers. Moins utilisés que les nombres naturels dans la vie de tous les jours, on les trouve notamment dans l'expression de la température. Leur présence permet à la soustraction d'exister quels que soient les nombres que l'on soustrait : sans eux, $2 - 3$ n'existerait pas.

3. $\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}}$: l'ensemble des **nombres rationnels** (fractions).

   Tous les nombres pouvant se mettre sous forme de fraction sont des nombres rationnels. On en utilise tous les jours lorsqu'on parle de centimètres, de décilitres, de centièmes de seconde, de moitié, de tiers, etc.

   Exemples

   – *Les nombres entiers* ($x = \frac{x}{1}$).
   – *Les nombres à virgules ayant un développement décimal limité ou périodique* ($1.25 = \frac{5}{4}$, $1.\overline{3} = \frac{4}{3}$).

   En termes mathématiques, p est le **numérateur** (vient du mot numéro ou nombre, car il compte) et q est le **dénominateur** (vient de dénommer, car il correspond à un nom comme demi, tiers, dixième, etc.).

4. $\boxed{\mathbb{R}}$: l'ensemble des **nombres réels**.

   Finalement, il y a des nombres qui ne sont pas des fractions. Ils sont appelés les **nombres irrationnels** (les nombres à virgule ayant un développement décimal illimité non périodique). Ils ont été découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence). Ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle, le périmètre d'un cercle, etc.

   L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

On a les inclusions

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Proposition 1.1
Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre réel irrationnel (il n'est pas un nombre rationnel).

Démonstration. Nous allons effectuer une démonstration par l'absurde. Principe d'un telle démonstration : supposer le contraire de ce que l'on désire démontrer et montrer que cette supposition est impossible (en exhibant une contradiction).

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\Rightarrow$ il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et a, b premiers entre eux (c'est-à-dire $\frac{a}{b}$ irréductible) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

$\Rightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc $a^2 = 2b^2$. On en conclut que a^2 un nombre pair.

$\Rightarrow$ a est pair. En effet, élever au carré conserve la parité :

- si m est pair, $m = 2n$, $m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$, m^2 est pair.
- si m est impair, $m = 2n + 1$, $m^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, m^2 est impair.

$\Rightarrow$ il existe a' tel que $a = 2a'$. On obtient que $a^2 = 4(a')^2 = 2b^2$ et donc que $b^2 = 2(a')^2$.

$\Rightarrow$ b^2 est pair. Par la même réflexion que ci-dessus, il existe b' tel que $b = 2b'$.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2a'}{2b'} = \frac{a'}{b'}$

$\Rightarrow$ La fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. Ceci est en totale contradiction avec notre supposition de départ.

Il découle de cette remarque que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. $\square$

Conventions complémentaires

On introduit encore les conventions d'écriture suivantes :

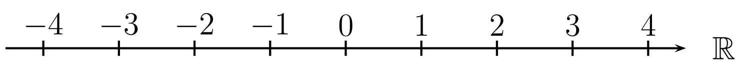
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$

Les combinaisons de ces conventions sont possibles : $\mathbb{R}_+^*$,...

Ces combinaisons s'appliquent par analogie aux autres ensembles de nombres (naturels,...).

1.2.1 La droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la **droite réelle**.



1.2.2 Ecriture décimale

L'**écriture décimale** permet de représenter TOUS les nombres réels d'une façon agréable, mais qui n'est en général PAS EXACTE. Cette écriture permet de placer avec une précision relative n'importe quel nombre réel sur la droite réelle.

Voici quelques nombres écrits sous forme décimale.

$$2 = 2.0 \qquad \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \frac{1}{8} = 0.125 \qquad \frac{2}{3} = 0.\overline{6} \qquad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \qquad \sqrt{2} = 1.414213\ldots$$

Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous forme de nombres décimaux limités (comme $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{8}$) ou périodiques (comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{13}$), contrairement aux nombres irrationnels dont le développement décimal est TOUJOURS infini et non-périodique (comme $\sqrt{2}$ et $\pi = 3.14159265\ldots$).

1.2.3 Notation scientifique

La **notation scientifique** permet d'écrire des nombres "très grands" ou "très petits".

Si on se donne un nombre $a \in \mathbb{R}$, on l'écrira de la manière suivante en notation scientifique

$$a = \pm x \cdot 10^n$$

avec $1 \leqslant x < 10$ ($x \in \mathbb{R}$) et $n \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, on écrit le premier chiffre non nul du nombre suivi d'une virgule et des chiffres suivants. On multiplie ensuite par la puissance de 10 adéquate pour retrouver le nombre de départ (on doit avoir une *égalité* !). Le nombre de chiffres écrits est appelé **le nombre de chiffres significatifs**. Il est en général fixé par le contexte. Afin de raccourcir l'écriture la plupart des calculatrices écrivent :

$$\pm x\,\mathtt{E}\,n \quad \text{au lieu de} \quad \pm\, x \cdot 10^n$$

Exemples

nombre exact	nombre décimal arrondi	notation scientifique	nb de chiffres significatifs
2	2	$2 \cdot 10^0$	1
$\frac{1}{2}$	0.5	$5 \cdot 10^{-1}$	1
$\frac{1}{2}$	0.50	$5.0 \cdot 10^{-1}$	2
$\frac{13}{10}$	1.3	$1.3 \cdot 10^0$	2
$-\frac{1}{3}$	-0.333	$-3.33 \cdot 10^{-1}$	3
$\sqrt{119}$	10.9087	$1.09087 \cdot 10^1$	6
2^{20}	1048576	$1.048576 \cdot 10^6$	7
$(-2)^{49}$	$-5629499534\cdots?$	$-5.629 \cdot 10^{15}$	4
3^{100}	$5153775207\cdots?$	$5.1537752 \cdot 10^{47}$	8
$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$	$0.0000000\cdots?$	$1.9403 \cdot 10^{-48}$	5

La notation scientifique permet de se donner un ordre de grandeur du nombre en question. Plutôt superflue dans les premiers exemples, elle est ESSENTIELLE dans les deux derniers exemples !

1.2.4 PPMC, PGDC et nombres premiers

Définition 1.4 (Rappel)
Soit a et b deux nombres naturels non nuls ($a, b \in \mathbb{N}^*$), alors :

1. a est un **multiple** de b s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.
2. b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.

Exemples

1. *32 est un multiple de 8, car* $32 = 4 \cdot 8$.
2. *7 est un diviseur de 21, car* $21 = 7 \cdot 3$.

Définition 1.5 (Rappel)

1. Un **multiple commun** de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est multiple de chacun d'eux. Le **plus petit multiple commun** de plusieurs nombres est appelé le **ppmc** de ces nombres.
2. Un **diviseur commun** de plusieurs nombres naturels est un nombre naturel qui est diviseur de chacun d'eux. Le **plus grand diviseur commun** de plusieurs nombres est appelé le **pgdc** de ces nombres.

Exemples

1. *36 est le ppmc de 3, 9 et 12.*
2. *8 est le pgdc de 16, 24 et 40.*

Définition 1.6
Un nombre entier naturel p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Propriétés

1. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
2. Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Nous allons démontrer la seconde propriété. On doit cette preuve à Euclide.

Supposons que cet ensemble soit fini. Il contient n nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Posons $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. N n'est pas premier par hypothèse. N admet donc au moins un diviseur premier p_i qui doit être p_1, p_2, … ou p_n : $N = q \cdot p_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &= N - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q \cdot p_i - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \\ 1 &= p_i(q - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n) \end{aligned}$$

De $1 = p_i(q - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n)$, on tire que p_i divise 1, ce qui est impossible. □

Théorème 1.2 (Théorème fondamental de l'arithmétique)
Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

On appelle cette décomposition la **décomposition en facteurs premiers** du nombre.

> ***Exemples***
>
> - *La décomposition de* 720 *en facteurs premiers est :* $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.
> - *La décomposition de* 4200 *en facteurs premiers est :* $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

1.3 Calcul littéral

Le calcul arithmétique consiste à prendre des nombres "connues" et à exécuter sur ces derniers des opérations : addition, soustraction, multiplication et division.

Le calcul littéral (ou algébrique), quant à lui, consiste à manipuler des expressions littérales (c'est-dire avec des nombres et des lettres qui représentent des nombres). Par rapport au calcul arithmétique, une partie des nombres "connus" est remplacée par des lettres désignant des nombres "inconnus". Il y a plusieurs raisons pour lesquelles le calcul algébrique est essentiel.

La première est pour éviter de faire le même calcul un nombre important de fois en raison du fait qu'une ou plusieurs données du problème peuvent varier, tel que le prix de l'essence, par exemple. Le calcul algébrique permet d'arriver à une réponse simplifiée dépendant des (ou de la) données qui varient.

La deuxième est que, parfois, les valeurs de certaines données d'un problème ne seront connues que plus tard, mais que cela ne devrait pas nous empêcher d'avancer dans la résolution du problème.

La règle d'or est la suivante :

La présence de lettres dans un calcul ne change rien à la façon de calculer. Une lettre ne fait que représenter un nombre quelconque !

1.3.1 Propriétés des opérations

Propriétés de l'addition

1)	L'addition est **commutative** :	$a + b = b + a$	$(3 + 4 = 7 = 4 + 3)$
2)	L'addition est **associative** :	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$(2+(3+4) = (2+3)+4)$
3)	0 est l'**élément neutre** :	$a + 0 = a$	$(2 + 0 = 2)$
4)	$-a$ est l'**élément opposé** de a :	$a + (-a) = 0$	$(3 + (-3) = 0)$

Propriétés de la multiplication

1)	La multiplication est **commutative** :	$a \cdot b = b \cdot a$	$(3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3)$
2)	La multiplication est **associative** :	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$(2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4)$
3)	1 est l'**élément neutre** :	$1 \cdot a = a$	$(1 \cdot 2 = 2)$
4)	Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ est l'**élément inverse** de a :	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$(3 \cdot \frac{1}{3} = 1)$

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition

$$\boxed{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c} \tag{1.1}$$

Pour réaliser le produit de deux sommes, on utilise plusieurs fois la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples

1) *Distributivité :* $2 \cdot (3+4) = 14 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
2) *Produit de deux sommes :* $(2+3) \cdot (4+5) = 2 \cdot (4+5) + 3 \cdot (4+5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 45$

Définition 1.7
Deux termes techniques sont liés à la distributivité.

Développer : C'est l'opération qui consiste à passer du membre de gauche de l'égalité (1.1) au membre de droite de la même égalité. Elle consiste donc à **transformer un produit en une somme** en "effectuant" la multiplication selon la règle de distributivité.

Mettre en évidence : C'est l'opération qui consiste à passer du membre de droite de l'égalité (1.1) au membre de gauche de la même égalité. Elle consiste donc à repérer dans une somme de termes le facteur qui est commun à tous les termes de la somme et à **transformer cette somme en le produit du terme commun et de la somme (entre parenthèses) des termes restant** selon la règle de distributivité.

Exemples

1) *Pour développer l'expression* $2 \cdot (5+8)$ *on effectue la multiplication pour obtenir :*

$$2 \cdot (5+8) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$$

2) *Dans la somme* $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$, *on peut mettre le facteur* 2 *en évidence car il est commun aux deux termes de la somme :*

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 2 \cdot (5+8)$$

On réalise donc l'opération inverse de celle effectuée en 1.

Il est possible de montrer que ces propriétés impliquent :

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

C'est une relation nous utiliserons très fréquemment.

Propriétés des nombres opposés

1) $-(-a) = a$ $\quad (-(-4) = 4)$
2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ $\quad ((-4) \cdot 5 = -(20) = 4 \cdot (-5))$
3) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $\quad ((-3) \cdot (-4) = 12)$
4) $(-1) \cdot a = -a$ $\quad ((-1) \cdot 4 = -4)$

Propriétés des fractions

Rappel

Une **fraction** représente le quotient ($\equiv$ division) de deux nombres a et b. Elle est un nombre qu'on note

$$\frac{a}{b}$$

où a est le **numérateur** (ou dividende), b le **dénominateur** (ou diviseur) et — la **barre de fraction**.

Exemple : $\dfrac{2}{5}$ *est un fraction qui correspond au nombre* $0,4$. *Elle se lit "deux cinquième".*

Plusieurs fractions peuvent représenter le même nombre (penser à $3 = \frac{6}{2} = \frac{-15}{-5} = \frac{9}{3} = \ldots$).

On peut utiliser le produit en croix pour vérifier si deux fractions sont égales.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ , si } \; a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple : $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ *car* $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Les opérations sur les fractions suivent les règles ci-dessous :

1) Addition : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right)$

2) Multiplication : $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 3}\right)$

3) Division : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$ $\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)$

4) Opposé : $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ $\left(-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}\right)$

On transforme une fraction en une autre fraction équivalente par la suite d'opérations :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

En lisant de gauche à droite, on **amplifie** la fraction. En lisant de droite à gauche, on **simplifie** la fraction. On dit qu'une fraction est **irréductible** si on ne peut pas la simplifier (comme pour $\frac{2}{3}$).

Nous reviendrons plus en détails sur ces concepts au paragraphe (1.5).

Priorité des opérations

L'ordre de priorité des opérations s'établit ainsi (plus le numéro est élevé, plus la priorité est grande) :

Priorité 4 - les parenthèses ()

Priorité 3 - l'exponentiation y^x et les fonctions (sinus, cosinus, etc.)

Priorité 2 - la multiplication et la division

Priorité 1 - l'addition et la soustraction

La règle de priorité est la suivante :

1. en lisant de gauche à droite, quand un nombre se trouve entre deux signes opératoires, c'est l'opération prioritaire qui est effectuée en premier.
2. si les deux opérations ont le même niveau de priorité, elles sont effectuées dans l'ordre d'écriture.

Règle des signes

Lorsqu'on a une multiplication ou une division entre deux nombres, la **règle des signes** s'applique.

nombre	multiplication ou division	nombre	nombre
$+$	$\cdot$ ou $\div$	$+$	$+$
$+$	$\cdot$ ou $\div$	$-$	$-$
$-$	$\cdot$ ou $\div$	$+$	$-$
$-$	$\cdot$ ou $\div$	$-$	$+$

On peut aussi utiliser des phrases mnémotechniques du style : les amis de mes amis sont mes amis ; les amis de mes ennemis sont mes ennemis ; les ennemis de mes amis sont mes ennemis ; les ennemis de mes ennemis sont mes amis.

1.3.2 Les puissances et les exposants

Définition 1.8
Un nombre a multiplié n fois par lui-même, $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{a \text{ apparaît } n \text{ fois}}$, est appelé **puissance n-ème** de a et est noté a^n. On dit également *"a élevé à la puissance n"* ou plus rapidement *"a puissance n"*. Dans l'écriture a^n, on appelle a la **base** et n l'**exposant**.

Exemple : $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \textit{ apparaît } 6 \textit{ fois}} = 3^6$

Propriétés

– Pour multiplier 2 puissances de même base, on additionne les exposants :

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Exemple : $2^5 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9$

Pour $n = 0$: $a^n \cdot a^0 = a^n \Rightarrow$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

De plus :

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

si $n \geqslant m$.

– Pour multiplier 2 puissances de même exposant, on multiplie les bases :

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Exemple : $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^3$

– Pour élever à des puissances successives, on multiplie les exposants :

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Exemple : $(3^2)^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$

Ces formules ne sont valables, pour l'instant, que pour a et b des nombres réels ($a, b \in \mathbb{R}$) et n et m des nombres naturels ($n, m \in \mathbb{N}$). On les généralisera dans la suite du cours.

1.3.3 Les racines

Définition 1.9
L'opération prendre la racine d'un nombre est l'inverse de l'élévation d'un nombre à une certaine puissance. On définit la **racine n-ème** ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un nombre a (avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \geqslant 0$), notée $\sqrt[n]{a}$, comme l'unique nombre réel $x \geqslant 0$ qui satisfait

$$x^n = a$$

Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ est appelé **radical** , l'expression sous le radical est appelé **radicande** et n l'**indice**.

Si $n = 2$, on écrit simplement $\sqrt{a}$ et on lit **racine carrée** de a.

Exemples

1. *$\sqrt{0} = 0$ (car $0^2 = 0$)*
2. *$\sqrt{4} = 2$ (car 2 est l'unique nombre réel positif tel que $2^2 = 4$. Remarque : $(-2)^2 = 4$ également, mais -2 est un nombre réel négatif!)*
3. *$\sqrt[3]{8} = 2$ (car $2^3 = 8$)*

Si a et b sont des nombres réels strictement positifs ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$) et n, m, p des nombres naturels strictement positifs ($n, m, p \in \mathbb{N}^*$), on a les propriétés suivantes :

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Longleftrightarrow a = b$		
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Attention !

– $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, en effet : $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$

– $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, en effet : $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

1.3.4 Identités remarquables

Les **identités remarquables** sont des formules qu'il est bon de reconnaître en toute circonstance. Elles vont revenir dans tous les chapitres. Pour la plupart ce n'est qu'un rappel.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \ldots$$

Ces égalités se lisent dans les DEUX sens (comme toute égalité). Il est facile de les retrouver en développant le terme de gauche. Par contre, il est important de les connaître afin de pouvoir les reconnaître lorsque seul le terme de droite est présent.

Reprenons la première de ces formules. On peut écrire : $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$. On appelle le "1" devant a^2 le **coefficient** de a^2 ; le coefficient de ab est 2, celui de b^2 est 1.

Dans les formules de la première colonne, la puissance à laquelle on a élevé $(a+b)$ est chaque fois augmentée de 1. Observez ce qui se passe :

- A chaque puissance correspond une suite de coefficients.
  Exemples : à la puissance 2 correspond : $(1; 2; 1)$*, à celle de 3 correspond :* $(1; 3; 3; 1)$.
- En lisant de gauche à droite, les exposants de a sont décroissants par pas de 1, ceux de b croissants par le même pas.

Pour le cas général $(a+b)^n$, les coefficients sont donnés par le triangle de Pascal.

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
⋮	...						

Le triangle de Pascal

D'autre identités sont également très utiles

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Applications

1. $38 \cdot 42 = (40-2)\cdot(40+2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$
2. $21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2\cdot 20 + 1 = 400 + 40 + 1 = 441$
3. $35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2\cdot 150 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

Démonstration. Nous allons démontrer quelques-unes des identitées proposés ci-dessus. Les autres démonstrations sont laissées au lecteur.

1. $\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$
2. $\mathbf{(a-b)^2} = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$
3. $\mathbf{(a+b)(a-b)} = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$
4. $\mathbf{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = \mathbf{a^3 + b^3}$
5. $\mathbf{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = \mathbf{a^3 - b^3}$

□

1.4 Polynômes

1.4.1 Monômes

Définition 1.10
On appelle **monôme** les nombres réels, les lettres, qui sont appelées **indéterminées** ou les expressions qui peuvent être obtenues par la multiplication à partir des nombres réels et des lettres.

Un **monôme en une indéterminée** est le produit d'un nombre réel, a, et d'une puissance d'une indéterminée, généralement noté x, :

$$\boxed{a \cdot x^n}$$

Le nombre réel a est le **coefficient** du monôme.
La puissance de l'indéterminée, x^n, est la **partie littérale** du monôme et son exposant, $n \in \mathbb{N}$, est le **degré** du monôme.
Deux monômes sont **semblables** si et seulement si leurs parties littérales sont égales.

Exemples

1) $4x^2y$, xy^2z, $-2x$, 5, 0 *sont des monômes.*

2) $x + x + x$ *est un monôme,* ***forme réduite*** *:* $3x$.
$1 + 3x$ *n'est pas un monôme car cette expression n'est pas le produit de nombres et/ou de lettres.*

3)

Monôme	$5x$	$-3x^2$	$\frac{7}{2}x^4$	x^2	$-\sqrt{2}x^3$	$7,8$
Coefficient	5	-3	$\frac{7}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$7,8$
Partie littérale	x	x^2	x^4	x^2	x^3	$x^0 = 1$
Degré	1	2	4	2	3	0

4) x^2 *et* $-3x^2$ *sont deux monômes semblables.*

Opérations sur les monômes

Somme : On obtient la somme de monômes semblables en conservant la partie littérale commune et en additionnant les coefficients. On utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Produit : On obtient le produit de deux monômes en multipliant leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles (addition des puissances). On utilise la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Exemples

1) *Somme :* $5x^2 + 8x^2 \overset{dis.}{=} (5+8) \cdot x^2 = 13x^2$
2) *Produit :* $5x^2 \cdot 8x^3 \overset{com.}{=} 5 \cdot 8 \cdot x^2 \cdot x^3 \overset{ass.}{=} 40x^{2+3} = 40x^5$

1.4.2 Polynômes

Définition 1.11
On appelle **polynôme** tout monôme et toute somme de monômes.

Exemples

1) $7x^2y + 8xyz - 3y^3z^3$ *et* $-4x^2 + 5xy - x + 2y - 4$ *sont des polynômes.*
2) $\frac{1}{x} + 3x$, $\frac{x-5}{x^2+2}$ *et* $3x + 2\sqrt{x}$ *ne sont pas des polynômes.*

Pour la suite de ce cours nous considérerons uniquement des polynômes formés de monômes en une indéterminée, que nous noterons x.

On polynôme est **sous forme réduite** si ses monômes semblables sont regroupés en un seul terme. Pour obtenir un polynôme sous forme réduite, on somme ses monômes semblables en utilisant la règle d'addition ci-dessus.

Exemples

1) $2x^2 - 3x + 2$ *est un polynôme sous forme réduite. Il a trois termes.*
2) $7x^2 - 3x + 2x^2 - 4$ *n'est pas un polynôme sous forme réduite, puisqu'il contient les deux termes semblables* $7x^2$ *et* $2x^2$*. Forme réduite :* $9x^2 - 3x - 4$

Définition 1.12
Un **polynôme** (en une indéterminée), nommé $p(x)$, s'écrit de manière "générale"

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
La valeur de l'exposant le plus grand, n, est appelée le **degré** de $p(x)$, noté $\deg(p(x))$.
Le nombre a_i est appelé le **coefficient** de rang i de $p(x)$ et a_n le **coefficient dominant**.

On écrira généralement un polynôme de manière **ordonnée**, c'est-à-dire en écrivant ses termes dans l'ordres des degrés décroissants.

Exemples

Polynôme	*Degré*	*Coeff. dom.*	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$p(x) = 5x^5 + 2x^4 + 3x^2 + x$	5	5	5	2	0	3	1	0
$p(x) = -x^3 + x^2 + 5$	3	-1	–	–	-1	1	0	5
$p(x) = \frac{4}{3}x + 2$	1	$\frac{4}{3}$	–	–	–	–	$\frac{4}{3}$	2
$p(x) = 6$	0	6	–	–	–	–	–	6

Evaluation d'un polynôme

On peut **évaluer** un polynôme $p(x)$ en n'importe quel nombre réel a en remplaçant l'indéterminée x par le nombre a et en évaluant la valeur de l'expression ainsi obtenue. On note cette valeur $p(a)$.

Exemple

Soit le polynôme $p(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 7$
Si $a = 2$: $p(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 7 = -8 + 8 - 2 - 7 = -9$
Si $a = -5$: $p(-5) = -(-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 - 1 \cdot (-5) - 7 = 125 + 50 + 5 - 7 = 173$

Opérations sur les polynômes

Egalité : Deux polynômes sont dit **égaux** s'ils sont de même degré et si tous leurs coefficients de rang i correspondants sont égaux.

Somme : On additionne deux polynômes en regroupant les termes semblables, même puissance de l'indéterminée, et en les additionnant (équivalent à réduire la somme des deux polynômes).

Opposé : On obtient l'opposé d'un polynôme en changeant le signe de chacun de ses termes. (Cela revient à le multiplier par -1.)

Différence : On soustrait un polynôme d'un autre polynôme en y additionnant son opposé.

Produit : On multiplie deux polynômes en multipliant chaque monôme du premier par chaque monôme du second et on réduit la somme de monômes obtenue. (On applique à plusieurs reprises la distributivité.)

Exemples

Soit les polynômes $p(x) = 2x^2 - 4x + 6$ *et* $q(x) = x^2 + 3x - 5$.

1) Egalité :
$p(x) = 2x^2 - 4x + 6 = 6 - 4x + 2x^2 = -4x + 6 + 2x^2 = 2(x^2 - 2x + 3) = \dots$

2) Somme :
$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) + (x^2 + 3x - 5) \\ &= (2x^2 + x^2) + (-4x + 3x) + (6 - 5) \\ &= 3x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

3) Opposé :
$-p(x) = -1 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = -2x^2 + 4x - 6$

4) Différence :

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) - (x^2 + 3x - 5) \\ &= (2x^2 - 4x + 6) + (-x^2 - 3x + 5) \\ &= (2x^2 - x^2) + (-4x - 3x) + (6 + 5) \\ &= x^2 - 7x + 11 \end{aligned}$$

5) Produit :

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (2x^2 - 4x + 6) \cdot (x^2 + 3x - 5) \\ &= 2x^2 \cdot (x^2 + 3x - 5) + (-4x) \cdot (x^2 + 3x - 5) + 6 \cdot (x^2 + 3x - 5) \\ &= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-5) + \\ &\quad (-4x) \cdot x^2 + (-4x) \cdot 3x + (-4x) \cdot (-5) + \\ &\quad 6 \cdot x^2 + 6 \cdot 3x + 6 \cdot (-5) \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 4x^3 - 12x^2 + 20x + 6x^2 + 18x - 30 \\ &= 2x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 38x - 30 \end{aligned}$$

On peut remarquer que : $4 = deg(p(x) \cdot q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x)) = 2 + 2$.

Formule des degrés

Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes. On a la formule suivante :

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

Cette formule se démontre facilement en utilisant la définition du produit de deux polynômes.

1.4.3 Factorisation d'un polynôme

La **factorisation** ou **décomposition en facteurs** consiste à trouver, pour un polynôme $p(x)$ de degré supérieur ou égal à 2 donné, un produit de polynômes de degré supérieur à 0 qui lui soit égal et dont les facteurs ne peuvent plus être décomposés.

La factorisation est le processus inverse du *développement*. Ainsi, pour contrôler si une factorisation est correcte, il suffit de développer le produit obtenu et voir s'il correspond au polynôme de départ.

Exemple

Le polynôme $x^2 - 9$ *peut se décomposer ainsi :* $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

On donne ci-dessous quelques procédés permettant d'effectuer cette transformation très importante et parfois difficile. D'autres technique seront données dans la suite du cours.

Mise en évidence

On repère d'abord dans la somme de termes à décomposer le facteur qui est commun à tous les termes de la somme et on utilise ensuite la distributivité pour écrire un produit.

Exemples

1) $x^2 - 8x = x(x-8) \longrightarrow$ *On a mis* x *en évidence.*

2) $6ax + 6a = 6a(x+1) \longrightarrow$ *On a mis* $6a$ *en évidence (ne pas oublier le* $+1$ *dans la parenthèse).*

3) $a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y) \longrightarrow$ *Le facteur* $x+y$ *est commun aux deux termes de la somme.*

4) $-12x^3y + 24x^2y^2 + 6xy^3 = 6xy(-2x^2 + 4xy + y^2)$

Utilisation des identités remarquables

On peut utiliser les identités remarquables vues au paragraphe (1.3.4) pour factoriser un polynôme.

Exemples

1) $9x^2 - 25y^2 = (3x-5y)(3x+5y)$

2) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

3) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a-2b)^3$

Décomposition d'un trinôme du second degré

Essayons de déterminer α et β de manière à pouvoir écrire :

$$x^2 + 7x + 12 = (x+\alpha)(x+\beta)$$

La forme réduite du membre de droite de cette égalité est égale à

$$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

Pour que les deux membres soient égaux, il faut donc que

$$\alpha + \beta = 7 \qquad \alpha\beta = 12$$

Ces deux égalités sont vraies si $\alpha = 3$ et $\beta = 4$. On obtient ainsi la décomposition du trinôme du second degré donné en un produit de deux facteurs du premier degré :

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

La décomposition d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est 1 est ainsi ramenée à la recherche de deux nombres dont
– *la somme est égale au coefficient de rang* 1,
– *le produit est égal au coefficient de rang* 0.

Méthode des groupements

Elle consiste à former plusieurs groupes de termes (dans les exemples les plus courants 2 groupes), de telle manière que l'on puisse
– *soit utiliser une identité remarquable,*
– *soit mettre en évidence un facteur commun aux différents groupes.*

Exemples

1)
$$\begin{array}{rcll} x^2-2xy+y^2-1 &=& (x^2-2xy+y^2)-1 & \textit{ass. addition}\\ &=& (x-y)^2-1 & \textit{identité remarquable}\\ &=& [(x-y)+1][(x-y)-1] & \textit{identité remarquable}\\ &=& (x-y+1)(x-y-1) & \textit{ass. addition}\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rcll} ax+bx-ay-by &=& (ax-ay)+(bx-by) & \textit{ass. et comm. addition}\\ &=& a(x-y)+b(x-y) & \textit{mise en évidence}\\ &=& (x-y)(a+b) & \textit{mise en évidence}\end{array}$$

Méthode de factorisation

Pour décomposer un polynôme, il faut souvent appliquer plusieurs des méthodes décrites ci-dessus. On procède dans l'ordre suivant :

1. mise en évidence des facteurs communs à tous les termes,
2. utilisation d'une identité remarquable,
3. méthode de décomposition pour les trinômes du second degré,
4. méthode des groupements.

Exemples

1)
$$\begin{array}{rcll} 36x^2-100 &=& 4(9x^2-25) & \textit{mise en évidence}\\ &=& 4(3x-5)(3x+5) & \textit{identité remarquable}\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rcl} 5a^2-5b^2-5a^2c^2+5b^2c^2 &=& 5[(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)]\\ &=& 5(a^2-b^2)(1-c^2)\\ &=& 5(a-b)(a+b)(1-c)(1+c)\end{array}$$

1.5 Fractions rationnelles

Définition 1.13
On appelle **fraction rationnelle** le quotient de deux polynômes en une indéterminée, $p(x)$ et $q(x)$:
$$\frac{p(x)}{q(x)}$$
où $q(x)$ n'est pas le polynôme nul ($q(x) \neq 0$).
$p(x)$ est appelé le **numérateur** de la fraction et $q(x)$ le **dénominateur**.

Exemple

$\dfrac{2x}{5x+1}$, $\dfrac{8x^2-3x+2}{-3x+5}$, $\dfrac{1}{x^5-2x^3+2}$ *sont des fractions rationnelles.*

Pour travailler avec ces fractions rationnelles, il est nécessaires de définir des opérations entre ces fractions. Ces dernières devront être des prolongements des définitions des opérations sur les polynômes, et donc concorder avec celles-ci, car tout polynôme $p(x) \neq 0$ peut être vu comme la fraction rationnelle : $\dfrac{p(x)}{1}$. La même remarque est valable pour les nombres réels.

1.5.1 Opérations sur les fractions rationnelles

Convention d'écriture : Dans ce paragraphe, les lettres A, B, C et D représenteront des polynômes (en une indéterminée). En particulier, on pourrait voir ces lettres comme représentant des nombres réels (qui sont des polynômes de degré 0) et retrouver ainsi les opérations décrites au paragraphe (1.3.1).

Simplification d'une fraction rationnelle

On **simplifie** une fraction rationnelle en remplaçant dans le numérateur et le dénominateur un facteur (polynôme) qui leur est commun par 1 ($\equiv$ on divise le numérateur et le dénominateur par un même facteur).

$$\boxed{\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A \cdot 1}{B \cdot 1} = \frac{A}{B}}$$

Une fraction rationnelle simplifiée au maximum est dans sa forme **irréductible**.

Remarque

Pour simplifier une fraction rationnelle, on *factorise* d'abord son numérateur et son dénominateur, puis on simplifie par les facteurs communs.

Exemples

1) $\dfrac{21}{14} = \dfrac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \dfrac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2}$

On a simplifié la fraction $\frac{21}{14}$ par 7.

2) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{(x-2) \cdot 1}{(x+1) \cdot 1} = \dfrac{x-2}{x+1}$

On a simplifié la fraction par $x - 1$.

3) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^3 + x^2 - 6x} = \dfrac{(x+3)^2}{x(x^2 + x - 6)} = \dfrac{(x+3)^2}{x(x+3)(x-2)} = \dfrac{x+3}{x(x-2)}$

4) $\dfrac{3x^2 - 3}{12x + 12} = \dfrac{3(x^2 - 1)}{12(x+1)} = \dfrac{1 \cdot (x+1)(x-1)}{4(x+1)} = \dfrac{x-1}{4}$

Amplification d'une fraction rationnelle

On **amplifie** une fraction rationnelle en multipliant son numérateur **et** son dénominateur par un même polynôme (non nul).

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}}$$

C'est donc la transformation inverse de la simplification.

Deux fractions rationnelles sont alors **équivalentes** si on peut passer de l'une à l'autre par simplifications et/ou amplifications.

Exemples

1) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \dfrac{28}{35}$

On a amplifié $\frac{4}{5}$ par 7

2) $\dfrac{x-2}{x-5} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$

On a amplifié la fraction par $x-1$. Il suffit de simplifier la fraction du milieu par $x-1$ pour obtenir l'égalité.

Somme de deux fractions rationnelles

Pour additionner deux fractions rationnelles, on procède de la manière suivante :

1) déterminer un **multiple commun** aux dénominateurs des deux fractions $\longrightarrow$ un polynôme qu'on peut obtenir par multiplication à partir des dénominateurs des deux fractions,
2) amplifier les deux fractions pour obtenir aux dénominateurs le polynôme déterminé en 1 $\longrightarrow$ on dit qu'on met les fractions *au même dénominateur*,
3) additionner les numérateurs en conservant le dénominateur commun.

$$\boxed{\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}}$$

Cette méthode fonctionne aussi quand on veut additionner un polynôme et une fraction rationnelle. Il suffit d'écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme $\frac{p(x)}{1}$ et d'appliquer la méthode ci-dessus.

Remarque

Le dénominateur "préféré" (parce qu'il rend les calculs plus simples !) est le **multiple commun** des deux dénominateurs du *plus petit degré possible*.
On l'appelle le **ppmc** des deux dénominateurs.

Exemples

1) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} = \dfrac{9+10}{12} = \dfrac{19}{12}$

Dénominateur commun : 12 $\longrightarrow$ ppmc de 4 et 6.

2) $\dfrac{a^2-a}{a+1} + \dfrac{a-2}{a+1} = \dfrac{a^2-a+a-2}{a+1} = \dfrac{a^2-2}{a+1}$

Addition directe car les deux fractions sont déjà au même dénominateur.

3) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{-7}{x+2} = \dfrac{2(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \dfrac{(-7)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{2x+4-7x+21}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{-5x+25}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{(-5)(x-5)}{(x-3)(x+2)}$

Dénominateur commun : $(x-3)(x+2)$ $\longrightarrow$ produit de $x-3$ et $x+2$.

4) $\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{-7}{x+2}=\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{(-7)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{2-7x+21}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{-7x+23}{(x-3)(x+2)}$

Dénominateur commun : $(x-3)(x+2)\longrightarrow$ *ppmc de* $(x-3)(x+2)$ *et* $x+2$.

Opposé d'une fraction rationnelle

L'**opposé** d'une fraction rationnelle s'obtient en prenant l'opposé soit de son numérateur, soit de son dénominateur.

$$\boxed{-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}}$$

Exemples

1) $-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-3}{4}=\dfrac{3}{-4}$

est l'opposé de $\frac{3}{4}$.

2) $-\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-1}=\dfrac{x^2-3x+2}{-x^2+1}$

est l'opposé de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Différence de deux fractions rationnelles

Pour **soustraire** une fraction rationnelle d'une première fraction rationnelle, on additionne à la première l'**opposé** de la seconde.

$$\boxed{\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{B\cdot(-C)}{B\cdot D}=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}}$$

Exemples

1) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{-1}{2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{-2}{4}=\dfrac{3-2}{4}=\dfrac{1}{4}$

2) $\dfrac{a^2-a}{a+1}-\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{a^2-a}{a+1}+\dfrac{(-1)(a-2)}{a+1}=\dfrac{a^2-a-a+2}{a+1}=\dfrac{a^2-2a+2}{a+1}$

Produit de deux fractions rationnelles

Pour **multiplier** deux fractions rationnelles, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Pour multiplier un polynôme par une fraction rationnelle, il suffit, comme pour l'addition, d'écrire le polynôme $p(x)$ sous la forme $\frac{p(x)}{1}$ et d'appliquer la règle ci-dessus.

Exemples

1) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$

2) $\dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x+1)} = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x+1}$

Inverse d'une fraction rationnelle

L'**inverse** d'une fraction rationnelle est obtenue en inversant son numérateur et son dénominateur (si le numérateur et le dénominateur sont différents de zéro).

$$\boxed{\frac{A}{B} \xrightarrow{\text{inverse}} \frac{B}{A}}$$

Exemples

1) $\dfrac{3}{4}$ *est l'inverse de* $\dfrac{4}{3}$.

2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ *est l'inverse de la fraction rationnelle* $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Quotient de deux fractions rationnelles

Pour **diviser** une fraction rationnelle par une seconde fraction rationnelle, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\boxed{\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}}$$

Exemples

1) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \dfrac{21}{20}$

2) $\dfrac{\frac{x-3}{x+1}}{\frac{x-2}{x+1}} = \dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

1.6 Symbole de sommation

Définition 1.14
Le **symbole de sommation**, noté à l'aide de la lettre grec Σ, s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes.

Soit n termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La somme de ces n termes s'écrit de la manière suivante à l'aide du symbole de sommation :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

On appelle k l'**indice de la somme**. Il permet de décrire la manière dont on somme les éléments.
Le nombre se trouvant à droite de l'égalité sous le symbole de sommation est la valeur de départ de l'indice de sommation, ici 1, et le nombre au-dessus du symbole la valeur finale de l'indice, ici n. La somme porte sur toutes les valeurs de k comprises entre ces deux bornes (bornes comprises).

Le symbole de sommation permet donc d'écrire des sommes d'un nombre important de termes de manière précise et condensée sans utiliser les points de suspension.

L'indice de sommation peut être utilisé pour décrire les termes de la somme de manière directe et les bornes sur l'indice de sommation peuvent avoir d'autre valeurs que 1 et n.

Par exemple, la somme des puissance de 2 comprises entre 6 et 27 peut s'écrire

$$\sum_{k=6}^{27} 2^k$$

au lieu de $2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{26} + 2^{27}$.
Donnons d'autres exemples pour bien comprendre cette notation.

Exemples

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} k = 3+4+5+6+7+8 = 33$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k^2-1) = (1^2-1) + (2^2-1) + (3^2-1) + (4^2-1) = 0+3+8+15 = 26$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-1) = 0+3+8+15+\ldots+(n^2-1)$

5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} (k-1)^3 = (2-1)^3 + (3-1)^3 + (4-1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

Proposition 1.3
Soient $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$; $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Le symbole de sommation possède les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \cdot x_k = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = n \cdot a$

Ces propriétés du symbole de sommation découlent directement de l'associativité et de la commutativité de l'addition ainsi que de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

1.7 Principe de récurrence

Nous allons décrire ci-après un principe qui nous permettra de démontrer certaines relations utiles pour la progression du cours.

Proposition 1.4 (Principe de récurrence)
Soit $\mathbf{P}(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :

1. $\mathbf{P}(0)$ est vraie (ancrage) ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ implique $\mathbf{P}(n+1)$ (hérédité).

Alors $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse d'hérédité signifie que si $\mathbf{P}(n)$ est vraie alors $\mathbf{P}(n+1)$ l'est aussi. Dans ces conditions, on comprend bien que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n. En effet, $\mathbf{P}(0)$ est vraie par l'hypothèse d'ancrage, donc $\mathbf{P}(1)$ l'est par hérédité, donc $\mathbf{P}(2)$ aussi pour la même raison, etc.

Exemple

A l'aide du principe de récurrence, nous allons démontrer la relation :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *Cette propriété dépend donc de n et pourrait être désignée par* $\mathbf{P}(n)$, *pour reprendre la notation proposé ci-dessus. On procède en deux étapes :*

1. Ancrage *: La formule est vraie pour n = 1 :*

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow OK.$$

Cette égalité est vraie et la relation est donc vraie pour $n = 1$ *(autrement dit :* $\mathbf{P}(1)$ *est vérifiée).*

2. Hérédité *On suppose que la formule est vraie pour n quelconque. On montre alors qu'elle est vraie pour n+1.*

Hypothèse : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Conclusion : $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

On doit donc montrer la seconde égalité en s'appuyant sur la première. Pour cela, on part du terme de gauche de la seconde égalité et par une suite d'égalités on essaie d'obtenir le terme de droite :

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{Hyp:=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver l'hérédité de notre formule : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

La formule :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

est donc vraie pour tout nombre naturel positif n *par le principe de récurrence.*

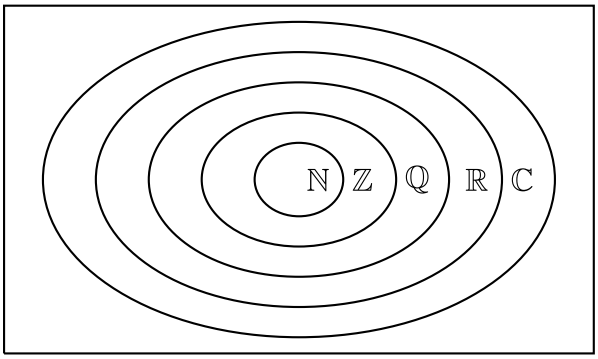
Remarque

Cette formule est à connaître par coeur !

1.8 Exercices

1) Placer chacun des nombres suivants dans la bonne "plage" (ne reporter que la lettre correspondante) :

$a = 0$ $\quad b = -1,2$
$c = \frac{5}{2}$ $\quad d = \frac{0}{5}$
$e = 3,\overline{48}$ $\quad f = \pi$
$g = \sqrt{2}$ $\quad h = \sqrt{36}$
$i = \sqrt{-1}$ $\quad j = \sqrt[3]{2}$
$k = \frac{-12}{0}$ $\quad l = \sqrt[3]{-8}$
$m = 2,999$ $\quad n = 2,999\ldots$



2) Ecrire en notation scientifique :

a) $14'000'000$ b) $1,004$ c) $0,000004$
d) $0,00081$ e) 143 f) $23,090$

3) Indiquer la décomposition en facteurs premiers de $14'520$, $10'725$ et $9'126$; déterminer ensuite leur *pgdc* et *ppmc*.

4) Supprimer les parenthèses inutiles :

a) $\left(\dfrac{3}{x}\right) + 2 + (4 \cdot 3) - 1$ b) $(4 \cdot x) + 5 \cdot (2 + x)$
c) $(x+2) \cdot (x-1) + (3 \cdot x) - (x+2)$ d) $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

5) Simplifier les quotients suivants :

a) $\dfrac{55}{33}$ b) $\dfrac{24+18}{6}$ c) $\dfrac{24+18}{7}$ d) $\dfrac{8+12}{4+28}$

6) Additionner les fractions suivantes et simplifier :

a) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{4}{2} + \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{6}{8+4} + \dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4}$
e) $\dfrac{3}{11} + \dfrac{4}{7}$ f) $\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{18}$ g) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{32}$ h) $\dfrac{4}{9} + \dfrac{11}{12}$
i) $\dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{2}$ j) $\dfrac{6}{7} + \dfrac{9}{14} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{11}{21}$ k) $\dfrac{7}{8} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{19}{24} + \dfrac{5}{6}$
l) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{3}$ m) $\dfrac{7}{16} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{6}$ n) $\dfrac{70}{84} + \dfrac{45}{54} + \dfrac{20}{45} + \dfrac{49}{56}$
o) $\dfrac{54}{72} + \dfrac{140}{336} + \dfrac{65}{117} + \dfrac{119}{189}$ p) $\dfrac{\frac{2}{3} + 2}{\frac{2}{9} - \frac{4}{3}}$ q) $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{2}}$

7) Effectuer les multiplications suivantes :

a) $\dfrac{495}{125}\cdot\dfrac{475}{304}\cdot\dfrac{352}{405}\cdot\dfrac{45}{363}$

b) $\dfrac{161}{368}\cdot\dfrac{676}{343}\cdot\dfrac{648}{624}\cdot\dfrac{686}{819}$

c) $\dfrac{833}{279}\cdot\dfrac{192}{289}\cdot\dfrac{527}{882}\cdot\dfrac{216}{128}$

d) $\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{10}\right)\cdot\left(\dfrac{7}{11}+\dfrac{7}{4}\right)$

8) Effectuer les divisions suivantes :

a) $\dfrac{3}{24}\div\dfrac{15}{8}$

b) $\dfrac{12}{91}\div\dfrac{12}{13}$

c) $\dfrac{60}{39}\div\dfrac{30}{13}$

d) $\dfrac{3600}{4225}\div\dfrac{2772}{4433}$

e) $\dfrac{9251}{5819}\div\dfrac{783}{621}$

f) $\dfrac{9}{11}\div\dfrac{7}{132}$

9) Effectuer les calculs suivants :

a) $\dfrac{\frac{111}{105}-\frac{90}{175}}{\frac{36}{140}+\frac{49}{245}}\cdot\dfrac{\frac{14}{21}}{\frac{66}{72}-\frac{45}{360}}=\ldots$

b) $\dfrac{\frac{25}{16}-\frac{16}{25}}{\frac{5}{4}+\frac{4}{5}}=\ldots$

c) $\dfrac{1}{5-\frac{24}{\frac{21}{4}}}=\ldots$

d) $\dfrac{\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{13}{14}\cdot\frac{21}{39}}}=\ldots$

e) $\dfrac{\frac{\frac{225}{21}\cdot\frac{616}{33}}{\frac{163}{3}-\frac{10}{3}}}{\frac{100}{3}-\frac{100}{17}}=\ldots$

f) $\dfrac{\frac{10}{11}+\frac{10}{9}}{2+\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1-\frac{4}{11}}{\frac{48}{5}+\frac{472}{55}}=\ldots$

g) $\dfrac{\frac{53}{8}-\frac{125}{40}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\div\dfrac{\frac{35}{3}}{\frac{5}{3}}=\ldots$

h) $\dfrac{\frac{203}{343}+\frac{294}{2401}}{\frac{799}{1071}-\frac{418}{1197}}\div\dfrac{\frac{255}{285}-\frac{252}{513}}{\frac{1173}{1058}-\frac{812}{1334}}=\ldots$

i) $\dfrac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{\frac{14}{13}\cdot\frac{26}{7}}{4}}}=\ldots$

j) $3+\dfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{17}{8}+\frac{15}{40}}}=\ldots$

10) Effectuer les opérations suivantes sans machine et donner les résultats sous forme de puissances entières positives. ($m,n\in\mathbb{N}_+^*$ et $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$)

a) $3^4\cdot 3^7$

b) $2^5\cdot 7^5$

c) $(3^2)^4$

d) $5^3\cdot 5^3$

e) 2^7+2^7

f) $3^8+3^8+3^8$

g) $4^3\cdot 8^5$

h) $3^6\cdot 2^9$

i) $5\cdot 25^6$

j) $9\cdot(3^5)^3$

k) $(9\cdot 3^5)^3$

l) $4^{12}\div 4^3$

m) $9^7\div 9^3$

n) $8^6\div 4^5$

o) $a^6\cdot a^5$

p) $b^3\cdot c^3$

q) $(8^m)^4$

r) $a^8\div a^2$

s) $a\cdot b^5\cdot(a\cdot b)^5$

t) $2(ab^6)\cdot(3a^2b)$

u) $2(ab^6)^3\cdot(3a^2b)$

v) $(2ab^6)^3\cdot(3a^2b)$

w) $2^m\cdot 2^n$

x) $2^m\div 2^n$ (3 cas)

11) Effectuer les opérations suivantes sans machine et donner les résultats sous forme de puissance entières positives. ($m, n, p \in \mathbb{N}_+^*$ et $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$)

a) $2x^n y^3 \cdot 5xy^n z^5$
b) $x^2 y(3x^n y^{2n} z^{p+3})^2$
c) $[(x^2 y) \cdot (3x^n y^{2n} z^{p+3})]^2$
d) $(-ab^n)^4$
e) $(-a)^n$ (2 cas)
f) $3a^m b^n (c^m b^5)^3$
g) $((2a^m)^3 a^4)^2$
h) $(-2x^5 y^6) \cdot (x^2 \div y^3)$
i) $(-2x^5 y^6)^3 \cdot (x^2 \div y^3)^2$
j) $(x^{n+3} x^n) \div x^{n+1}$
k) $a^{8m} \div (a^{3m} \div a^m)$
l) $(a^{8m} \div a^{3m}) \div a^m$

12) Calculer mentalement : 32^2, 28^2, $21 \cdot 19$, 35^2, 65^2.

13) Quel terme faut-il ajouter aux binômes suivants pour les transformer en carrés parfaits ?

a) $x^2 + 6x$
b) $4a^2 b^4 + 9$
c) $16a^4 - 8a^2 y^2$
d) $x^2 + bx$
e) $4b^4 + 9z^{12}$
f) $4a^2 b^4 - ab^2$

14) Développer et réduire le plus possible. Indiquer le degré du polynôme obtenu.

a) $-xx^3 x^2 + 2x^6 + 8x^3 - 3xx^2$
b) $(x - 2) \cdot 3x$
c) $(x^2 - 3)(x^2 + 4)$
d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

15) Compléter :

a) $2a(a + b) - 3b(a - b) =$
b) $1 - (x - 1) + 2(3x - 1) =$
c) $(x + 2)(x + 7) =$
d) $(x - 6)(x + 8) =$
e) $(3x + 2)^2 =$
f) $(5x^2 - 2)^2 =$
g) $(a^4 - 3a)^2 =$
h) $(-7a^2 b + 3ab^3 c)^2 =$
i) $((a + b) - (c + d))^2 =$
j) $(5x - 7xy + 3y)^2 =$
k) $(a^3 b^4 + c) \cdot (a^3 b^4 - c) =$
l) $(x^2 - 5x + 1)^2 =$
m) $(a + a^3) \cdot (a - a^3) \cdot (a^2 + a^6) =$
n) $(x^4 - 1) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) =$

16) A l'aide du triangle de Pascal établir la formule générale de $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que le nombre de grilles différentes possibles au jeu de la Loterie à numéros est donné par le coefficient de $a^6 b^{39}$ du développement de $(a + b)^{45}$.

Plus généralement, le nombre de sous-ensemble de k objets choisis parmi n est donné par le coefficient de $a^k b^{n-k}$ du développement de $(a + b)^n$.

Montrer que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n objet est 2^n.

17) Mettre en évidence le facteur commun :

a) $21st + 7t^2$
b) $5m + 15mn$
c) $22x - 33xy$
d) $6ab - 12b + 6bc$
e) $2ab + 4b^2 + 6bc$
f) $15a^2 b - 10ab + 5a$
g) $15x^2 y - 5xy + 10xy^2$
h) $16x^2 yz + 24xyz^2$
i) $a(c + d) + b(c + d)$
j) $a(x - y) - (x - y)$
k) $r(a + 2ab) - s(a + 2ab)$
l) $x(x + y) - xy - y^2$

18) Décomposer en produits de facteurs irréductibles :

a) $y^3z^3 - 3yz$ b) $1 - 8z + 16z^2$ c) $4x^2 - 9y^2$
d) $9x^3 - 36x$ e) $xy^2 + 2xy + x$ f) $5y^3 - 5y$
g) $x^2 + 3x + 2$ h) $y^2 + 15y + 56$ i) $y^2 - 15y + 56$
j) $x^2 - 2x - 35$ k) $2x^2 + 14x + 24$ l) $5z^2 + 15z - 50$
m) $x^2 + xy + 2x + 2y$ n) $12xy - 16x + 27y - 36$ o) $8x^2 - 4xy - 6x + 3y$
p) $3x^2y^2 - 54x^2 - 9x^2y$ q) $36b^2 - 100$ r) $b^3 - bc^2$

19) Décomposer en produits de facteurs irréductibles :

a) $7a + 7ab - 7a^2$ b) $4a^2 - 1$ c) $a^3 - 8$
d) $x(a - b) + 3(a - b)$ e) $a^3 - 3a^2 + 27 - 9a$ f) $x^2 + 5x + 6$
g) $a^3 - a + 2a^2 - 2$ h) $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1)$ i) $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
j) $(-a - b)^3 + 4(a + b)$ k) $1 - x^2y^2$ l) $a^4 + 1 - 2a^2$
m) $a^3 + a^2 + 1 + a$ n) $2a^3 - 6a^2 + 6a - 2$ o) $a^2 + 2ab - x^2 + b^2$
p) $x^3 + x^2 - 6x$ q) $a^6 - b^6$ r) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
s) $2a^2 - 4a - 6$ t) $a^2 + 1 - b^2 - 2a$ u) $ax^8 - a$
v) $2a + 2b - (a + b)^2$ w) $2x^2 - 7x + 3$ x) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$

20) Ecrire l'inverse des expressions suivantes :

a) x b) $x - 2$ c) $3x$ d) $\dfrac{1}{x^3}$
e) $\dfrac{3}{x}$ f) $\dfrac{5}{y^2 + 1}$ g) $\dfrac{1}{\frac{1}{x+1}}$ h) 0

21) Simplifier :

a) $\dfrac{84m^3n^2p}{35m^4np^2}$ b) $\dfrac{5a + 5b}{7a + 7b}$ c) $\dfrac{a + ab}{2ab}$ d) $\dfrac{(a - b)^2}{b - a}$
e) $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x + 7}$ f) $\dfrac{4a^2 - 9}{10a - 15}$ g) $\dfrac{5x^2 + 5xy}{3x^2 - 3y^2}$ h) $\dfrac{8a^2b - 16ab^2}{12a^2x - 48b^2x}$

22) Simplifier le plus possible et effectuer :

a) $\dfrac{x}{x + 1} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2}$ b) $\dfrac{x - 3}{10} \cdot \dfrac{15}{x - 3}$
c) $7 \cdot \dfrac{x + y}{14}$ d) $(x + 5) \cdot \dfrac{x}{x^2 + 10x + 25}$
e) $\dfrac{2b^3}{5} \div \dfrac{b^2}{20}$ f) $-\dfrac{x^2}{6} \div \dfrac{x}{2}$
g) $\dfrac{e - 1}{e + 2} \div \dfrac{1}{(e + 2)^2}$ h) $\dfrac{7x + 7y}{x} \div 7$

23) Effectuer et simplifier, s'il y a lieu :

a) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}$

b) $\dfrac{a}{3}-\dfrac{2a}{5}+a$

c) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{a}{2}$

d) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

e) $\dfrac{4}{3x}+\dfrac{1}{x}$

f) $\dfrac{2a}{3}+\dfrac{4a}{3}$

g) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

h) $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}$

i) $\dfrac{1}{3a}-\dfrac{1}{4a}$

j) $\dfrac{1}{x-1}-1$

k) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}$

l) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

m) $\dfrac{2}{a+2}+\dfrac{1}{2-a}-\dfrac{4}{4-a^2}$

n) $\dfrac{3x-2y}{2}-\dfrac{4y+2x}{5}+\dfrac{22y-9x}{15}$

o) $\dfrac{6}{x(3x-2)}+\dfrac{5}{3x-2}-\dfrac{2}{x^2}$

p) $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$

24) Effectuer et simplifier, s'il y a lieu :

a) $\dfrac{4x}{3x-4}+\dfrac{8}{3x^2-4x}+\dfrac{2}{x}$

b) $\dfrac{12x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x^2+x}+\dfrac{5}{x}$

c) $\dfrac{3a+2b}{a}+\dfrac{2a^2-2b^2}{ab}-\dfrac{2a+3b}{b}$

d) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}-\dfrac{3a^2}{a^3+b^3}+\dfrac{a}{a^2-ab+b^2}$

e) $\dfrac{x(1+y)}{x^n}+\dfrac{x-y}{x^{n-1}}-\dfrac{1}{x^{n-2}}$

f) $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{xy}{x^3+y^3}$

g) $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}-\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}$

h) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}$

i) $\dfrac{2x+6}{x^2+6x+9}+\dfrac{5x}{x^2-9}+\dfrac{7}{x-3}$

j) $\dfrac{3x}{2x-5}-\dfrac{x}{2x+5}-\dfrac{4x}{4x^2-25}$

k) $\dfrac{16x}{2x+8}+\dfrac{5}{x^2+x-12}-\dfrac{x-4}{x-3}$

l) $\dfrac{3-6x}{4x^2-1}-\dfrac{2+5x}{4x^2+4x+1}$

m) $\dfrac{4x^2-4x}{x^2+x-2}-\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-4x}$

n) $\dfrac{81-54x+9x^2}{3x^2-15x+18}-\dfrac{2x^2-6x+4}{4x^2-8x+4}$

o) $\dfrac{\frac{1}{x+2}-3}{\frac{4}{x}-x}$

p) $\dfrac{\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x+3}}$

25) Simplifier le plus possible et effectuer :

a) $\dfrac{3(a^2-b^2)}{5bc}\cdot\dfrac{10c}{9(a+b)}$

b) $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(a+\dfrac{ax}{a-x}\right)$

c) $\dfrac{a^2-4x^2}{a^2+4ax}\div\dfrac{a^2-2ax}{ax+4x^2}$

d) $\dfrac{(27x^3-8y^6)(x-4y)}{2x(3x-2y^2)}$

e) $\dfrac{3a^2b^2-6b^2c}{a^4-4a^2c+4c^2}$

f) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}\div\dfrac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2}$

26) Simplifier :

a) $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}}$

b) $\dfrac{x+y+\frac{y^2}{x}}{x+y+\frac{x^2}{y}}$

c) $\dfrac{a-1+\frac{8}{a-8}}{a-2+\frac{4}{a-8}}$

d) $\dfrac{1-x+x^2-\frac{x^3}{x+1}}{1+\frac{1}{x^2-1}}$

e) $\dfrac{\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}}{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}$

f) $\dfrac{x-a}{x-\frac{(x-a)(x-b)}{x+a}}$

g) $\dfrac{1}{1+\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}}}$

h) $\dfrac{abc}{bc+ac-ab}-\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}-\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$

i) $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$

j) $\left(\dfrac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}\div\dfrac{1}{a+\frac{1}{b}}\right)-\dfrac{1}{b(abc+a+c)}$

27) Lequel de ces calculs est correct ?

a) $6+3\cdot 2=9\cdot 2=18$ <u>ou</u> $6+3\cdot 2=6+6=12$

b) $4+5\cdot(6+3)=4+45=49$ <u>ou</u> $4+5\cdot(6+3)=9\cdot 9=81$

c) $13-4+5=9+5=14$ <u>ou</u> $13-4+5=13-9=4$

d) $2+10\cdot 17-7=12\cdot 10=120$ <u>ou</u> $2+10\cdot 17-7=2+170-7=165$

e) $6+\frac{10}{2}=\frac{16}{2}=8$ <u>ou</u> $6+\frac{10}{2}=6+5=11$

f) $5\cdot 2+9-4(2+5)=19-28=-9$ <u>ou</u> $5\cdot 2+9-4(2+5)=55-28=27$

28) Ecrire les expressions suivantes en termes algébriques :

a) l'entier suivant le nombre entier n
b) le triple du nombre n
c) le double de l'entier précédant le nombre entier n
d) le produit de deux nombres entiers consécutifs
e) un nombre pair
f) une puissance de 2
g) l'inverse de x
h) l'opposé de x
i) le double du carré de l'inverse de l'opposé de l'entier précédant le quadruple du nombre entier n

29) Associer la bonne description aux expressions algébriques :

$x+y$	est un produit
x^2-y^2	est le double du carré d'une somme
$2(x+y)^2$	est le carré du double d'une somme
$(x-y)^2$	est la somme des carrés
xy	est le carré d'une somme
$(x+y)^2$	est une somme
$(x-y)(x+y)$	est le carré d'une différence
$2xy$	est la différence des carrés
$(2(x+y))^2$	est un double produit
x^2+y^2	est le produit d'une somme par une différence

30) Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$ b) $\dfrac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$ c) $\dfrac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$ d) $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

31) On donne les valeurs de $x_1,\ldots,x_7$ et $n_1,\ldots,n_7$ dans le tableau ci-dessous.

Indice i	Valeur de x_i	Valeur de n_i
1	0	1
2	1	1
3	2	2
4	3	5
5	4	7
6	5	8
7	6	2

Avec des données ci-dessus, calculez les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} x_i$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} n_k$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i \sum_{j=1}^{4} x_j$

32) Démontrer :

a) $1+4+9+\ldots+n^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2$

c) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

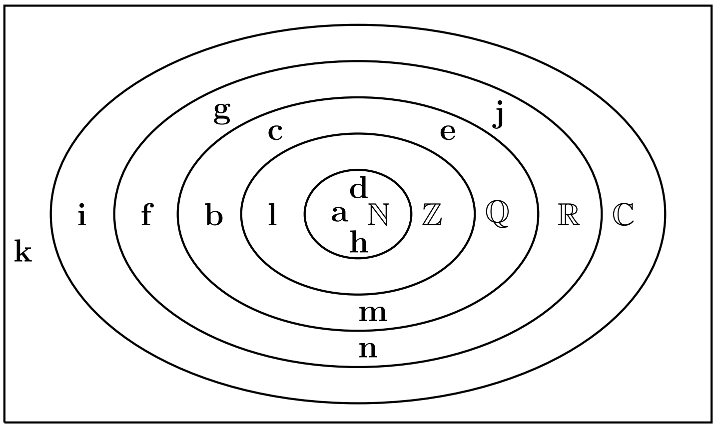
e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)-4}{(k+1)(k+2)}=\frac{n^2}{n+2}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{n}{3n+1}$

g) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 $\forall n \in \mathbb{N}$.

h) $7^{n+1}+2$ est divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.9 Solutions des exercices

1) 

2) i) $1,4 \cdot 10^7$ j) $1,004 \cdot 10^0$ k) $4 \cdot 10^{-6}$
l) $8,1 \cdot 10^{-4}$ m) $1,43 \cdot 10^2$ n) $2,3090 \cdot 10^1$

3) $14'520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$, $10'725 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$, $9126 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13^2$

$pgdc = 3$, $ppmc = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$

4) a) $\dfrac{3}{x} + 2 + 4 \cdot 3 - 1$ b) $4 \cdot x + 5 \cdot (2 + x)$
c) $(x+2) \cdot (x-1) + 3 \cdot x - (x+2)$ d) $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

5) a) $\dfrac{5}{3}$ b) 7 c) 6 d) $\dfrac{5}{8}$

6) a) $\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{8}{3}$ c) 2 d) $\dfrac{13}{12}$ e) $\dfrac{65}{77}$ f) $\dfrac{5}{9}$
g) $\dfrac{19}{32}$ h) $\dfrac{49}{36}$ i) $\dfrac{4}{7}$ j) $\dfrac{113}{42}$ k) $\dfrac{13}{4}$ l) $\dfrac{59}{30}$
m) $\dfrac{91}{48}$ n) $\dfrac{215}{72}$ o) $\dfrac{127}{54}$ p) $-\dfrac{12}{5}$ q) $\dfrac{57}{115}$

7) a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) 2 d) $\dfrac{7}{4}$

8) a) $\dfrac{1}{15}$ b) $\dfrac{1}{7}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{124}{91}$
e) $\dfrac{29}{23}$ f) $\dfrac{108}{7}$

9) a) 1 b) $\dfrac{9}{20}$ c) $\dfrac{7}{3}$ d) 2 e) $\dfrac{1}{7}$ f) $\dfrac{1}{33}$
g) 3 h) $\dfrac{513}{230}$ i) $\dfrac{2}{7}$ j) $\dfrac{41}{12}$

10) a) 3^{11} b) 14^5 c) 3^8 d) 5^6 e) 2^8 f) 3^9
g) 2^{21} h) $6^6 \cdot 2^3$ i) 5^{13} j) 3^{17} k) 3^{21} l) 2^{18}
m) 3^8 n) 2^8 o) a^{11} p) $(b \cdot c)^3$ q) 2^{12m} r) a^6
s) $a^6 \cdot b^{10}$ t) $6a^3b^7$ u) $6a^5b^{19}$ v) $24a^5b^{19}$ w) 2^{m+n}
x) $\begin{cases} 2^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ 1 \div 2^{n-m} & \text{si } m < n \end{cases}$

11) a) $10x^{n+1}y^{n+3}z^5$ b) $9x^{2n+2}y^{4n+1}z^{2p+6}$ c) $9x^{2n+4}y^{4n+2}z^{2p+6}$
d) a^4b^{4n} e) $\begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ f) $3a^mb^{n+15}c^{3m}$
g) $64a^{6m+8}$ h) $-2x^7y^3$ i) $-8x^{19}y^{12}$
j) x^{n+2} k) a^{6m} l) a^{4m}

12) $32^2 = 1024$, $28^2 = 784$, $21 \cdot 19 = 399$, $35^2 = 1225$, $65^2 = 4225$

13) a) $x^2 + 6x + \mathbf{9}$ b) $4a^2b^4 + 9 + \mathbf{12ab^2}$ c) $16a^4 - 8a^2y^2 + \mathbf{y^4}$
d) $x^2 + bx + \mathbf{\frac{b^2}{4}}$ e) $4b^4 + 9z^{12} + \mathbf{12b^2z^6}$ f) $4a^2b^4 - ab^2 + \mathbf{\frac{1}{16}}$

14) a) $x^6 + 5x^3$, deg$= 6$ b) $3x^2 - 6x$, deg$= 2$
c) $x^4 + x^2 - 12$, deg$= 4$ d) $x^3 - 1$, deg$= 3$

15) a) $2a^2 - ab + 3b^2$ b) $5x$
c) $x^2 + 9x + 14$ d) $x^2 + 2x - 48$
e) $9x^2 + 12x + 4$ f) $25x^4 - 20x^2 + 4$
g) $a^8 - 6a^5 + 9a^2$ h) $49a^4b^2 - 42a^3b^4c + 9a^2b^6c^2$
i) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd$
j) $49x^2y^2 - 70x^2y + 25x^2 + 30xy - 42xy^2 + 9y^2$
k) $a^6b^8 - c^2$ l) $x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 10x + 1$
m) $a^4 - a^{12}$ n) $x^8 - 2x^4 + 1$

17) a) $7t(3s + t)$ b) $5m(1 + 3n)$ c) $11x(2 - 3y)$
d) $6b(a - 2 + c)$ e) $2b(a + 2b + 3c)$ f) $5a(3ab - 2b + 1)$
g) $5xy(3x - 1 + 2y)$ h) $8xyz(2x + 3z)$ i) $(a + b)(c + d)$
j) $(a - 1)(x - y)$ k) $a(1 + 2b)(r - s)$ l) $(x + y)(x - y)$

18) a) $yz(y^2z^2-3)$ b) $(1-4z)^2$ c) $(2x+3y)(2x-3y)$
d) $9x(x+2)(x-2)$ e) $x(y+1)^2$ f) $5y(y+1)(y-1)$
g) $(x+1)(x+2)$ h) $(y+7)(y+8)$ i) $(y-7)(y-8)$
j) $(x-7)(x+5)$ k) $2(x+3)(x+4)$ l) $5(z+5)(z-2)$
m) $(x+y)(x+2)$ n) $(4x+9)(3y-4)$ o) $(4x-3)(2x-y)$
p) $3x^2(y-6)(y+3)$ q) $4(3b+5)(3b-5)$ r) $b(b+c)(b-c)$

19) a) $7a\cdot(b-a+1)$ b) $(2a+1)\cdot(2a-1)$ c) $(a-2)\cdot(a^2+2a+4)$
d) $(x+3)\cdot(a-b)$ e) $(a-3)^2(a+3)$ f) $(x+3)\cdot(x+2)$
g) $(a+2)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$ h) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$
i) $(a+b)^2\cdot(a-b)^2$ j) $(a+b)\cdot(2+a+b)\cdot(2-a-b)$
k) $(1+xy)\cdot(1-xy)$ l) $(a+1)^2\cdot(a-1)^2$ m) $(a+1)\cdot(a^2+1)$
n) $2(a-1)^3$ o) $(a+b+x)\cdot(a+b-x)$ p) $x\cdot(x+3)\cdot(x-2)$
q) $(a+b)\cdot(a-b)\cdot(a^2-ab+b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)$ r) $(x+y)^2\cdot(x-y)^2$
s) $2\cdot(a-3)\cdot(a+1)$ t) $(a+b-1)\cdot(a-b-1)$
u) $a\cdot(x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ v) $(a+b)\cdot(2-a-b)$
w) $(2x-1)(x-3)$ x) $(a+b)^2\cdot(a-b)^2$

20) a) $\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}$ c) $\dfrac{1}{3x}$ d) x^3
e) $\dfrac{x}{3}$ f) $\dfrac{y^2+1}{5}$ g) $\dfrac{1}{x+1}$ h) $--$

21) a) $\dfrac{12n}{5mp}$ b) $\dfrac{5}{7}$ c) $\dfrac{1+b}{2b}$ d) $b-a$
e) $x-3$ f) $\dfrac{2a+3}{5}$ g) $\dfrac{5x}{3(x-y)}$ h) $\dfrac{2ab}{3x(a+2b)}$

22) a) $\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{x+y}{2}$ d) $\dfrac{x}{x+5}$
e) $8b$ f) $-\dfrac{x}{3}$ g) $(e-1)(e+2)$ h) $\dfrac{x+y}{x}$

23) a) $\dfrac{5a}{6}$ b) $\dfrac{14a}{15}$ c) $\dfrac{(2+a)(2-a)}{2a}$ d) $\dfrac{a+b}{ab}$
e) $\dfrac{7}{3x}$ f) $2a$ g) $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$ h) y
i) $\dfrac{1}{12a}$ j) $\dfrac{2-x}{x-1}$ k) $\dfrac{5x}{(x+2)(x-3)}$ l) $\dfrac{1}{b-a}$

m) $\dfrac{1}{a+2}$ n) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y$ o) $\dfrac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}$ p) $\dfrac{2x-1}{x}$

24) a) $\dfrac{2(2x+3)}{3x-4}$ b) $\dfrac{2(3x+1)}{x}$ c) 0 d) $\dfrac{b-a}{a^2-ab+b^2}$

e) $\dfrac{1}{x^{n-1}}$ f) $\dfrac{2x^2}{x^3+y^3}$ g) $-\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$ h) $\dfrac{1}{x-2}$

i) $\dfrac{14x+15}{(x+3)(x-3)}$ j) $\dfrac{4x(x+4)}{(2x-5)(2x+5)}$

k) $\dfrac{7x^2-24x+21}{(x+4)(x-3)}$ l) $\dfrac{-11x-5}{(2x+1)^2}$

m) $\dfrac{4x^2-x-5}{x(x+2)}$ n) $\dfrac{5x^2-20x+14}{2(x-2)(x-1)}$

o) $\dfrac{x(3x+5)}{(x+2)^2(x-2)}$ p) $\dfrac{2x^2+7x+15}{x^2+10x+7}$

25) a) $\dfrac{2(a-b)}{3b}$ b) $\dfrac{a^2(a-b)}{x}$ c) $\dfrac{x(a+2x)}{a^2}$

d) $\dfrac{(x-4y)(9x^2+6xy^2+4y^4)}{2x}$ e) $\dfrac{3b^2}{a^2-2c}$ f) $\dfrac{1}{a^2-b^2}$

26) a) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ b) $\dfrac{y}{x}$ c) $\dfrac{a^2-9a+16}{a^2-10a+20}$ d) $\dfrac{x-1}{x^2}$

e) 1 f) $\dfrac{x^2-a^2}{2ax+bx-ab}$ g) $\dfrac{1+a^2}{1+a}$ h) 1

i) a j) 1

28) a) $n+1$ b) $3n$ c) $2(n-1)$ d) $n\cdot(n+1)$

e) $2n$ f) 2^n g) $\dfrac{1}{x}$ h) $-x$

i) $2\left(\dfrac{1}{1-4n}\right)^2$

29)

$x+y \longrightarrow$ est une somme
$x^2-y^2 \longrightarrow$ est la différence des carrés
$2(x+y)^2 \longrightarrow$ est le double du carré d'une somme
$(x-y)^2 \longrightarrow$ est le carré d'une différence
$xy \longrightarrow$ est un produit
$(x+y)^2 \longrightarrow$ est le carré d'une somme
$(x-y)(x+y) \longrightarrow$ est le produit d'une somme par une différence
$2xy \longrightarrow$ est un double produit
$(2(x+y))^2 \longrightarrow$ est le carré du double d'une somme
$x^2+y^2 \longrightarrow$ est la somme des carrés

30) a) $\dfrac{t+25+10\sqrt{t}}{t-25}$ b) $\dfrac{t+16-8\sqrt{t}}{t-16}$

c) $(9x+4y)\cdot(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})$ d) $(4x+y)\cdot(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$

31) a) 10 b) 24 c) 20 d) 54

Chapitre 2

Equations

2.1 Généralités

Définition 2.1
Une **équation** est une *égalité* dont l'un ou les deux membres sont des expressions littérales contenant une ou plusieurs lettres et des nombres.

Une lettre utilisée dans l'écriture d'une équation est une **inconnue** (ou une variable) dès le moment où on s'intéresse à en déterminer la valeur pour que l'égalité soit vérifiée. La ou les inconnues sont généralement désignées par les lettres x, y ou z.

Exemple

1) $\underbrace{x^2 - 5}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{4x}_{\text{membre de droite}}$ *: équation à une inconnue x.*

2) $4y - 1 = x$: équation à deux inconnues x et y si on cherche à déterminer leur valeur.

3) $x + y = b$: équation à deux inconnues x et y si on cherche à déterminer leur valeur et la lettre b représente une valeur fixe.

Définition 2.2
Pour les définitions suivantes, on considère le cas d'une équation en une inconnue notée x.

1) Un nombre a qui vérifie l'égalité quand il est substitué à l'inconnue x est appelé **solution** ou **racine** de l'équation. On dit alors que *a vérifie* ou *satisfait* l'équation.
2) Une équation est **résolue** lorsqu'on a déterminé toutes ses solutions. La recherche de ses solutions se nomme la **résolution** de l'équation (on dira généralement "résoudre une équation").
3) Toutes les solutions d'une équation forme l'**ensemble des solutions**, généralement noté S. On énumérera parfois ces solutions en écrivant $x_1 = \ldots$, $x_2 = \ldots$, $x_3 = \ldots$, $\ldots$

Ces définitions peuvent s'étendre aux cas d'équations à plusieurs inconnues.

Exemple

5 est solution de l'équation $x^2 - 5 = 4x$ *car* $5^2 - 5 = 20$ *et* $4 \cdot 5 = 20$.

Une autre solution de cette équation est -1 *car* $(-1)^2 - 5 = -4$ *et* $4 \cdot (-1) = -4$.

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{-1; 5\}$.

Définition 2.3
Deux équations **équivalentes** sont deux équations qui ont exactement le même ensemble de solutions.

Exemples

1) *Les équations* $x - 5 = 8 - x$ *et* $5x = 32,5$ *sont équivalentes. Leur ensemble de solutions est* $S = \left\{\frac{13}{2}\right\}$.
2) *Les équations* $10 - 2y = y^2 + y$ *et* $y^2 + 3y - 10 = 0$ *sont équivalentes. Leur ensemble de solutions est* $S = \{-5; 2\}$.
3) *Les équations* $5x = 15$ *et* $5x^2 = 15x$ *ne sont pas équivalentes car* 0 *est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première.*

Règles d'équivalence

Les règles suivantes permettent de transformer une équation en une équation équivalente :

- permuter les deux membres de l'équation,
- effectuer du calcul littéral dans l'un ou l'autre de ses membres,
- additionner (ou soustraire) un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux **deux** membres de l'équation,
- multiplier (ou diviser) les **deux** membres de l'équation par un même nombre non nul.

Dans la pratique, on utilisera souvent une suite de transformations équivalentes sur l'équation à résoudre afin d'obtenir une équation équivalente où l'ensemble des solutions est plus facile à déterminer.

Exemple

Pour résoudre l'équation $4(x + 2) = 9x - 12 + x$, *on peut procéder comme suit :*

$$\begin{array}{rcl|l}
4(x+2) & = & 9x - 12 + x & \textit{calcul littéral (CL)} \\
4x + 8 & = & 10x - 12 & +12 \textit{ (ajouter } 12 \textit{ aux deux membres)} \\
4x + 20 & = & 10x & -4x \textit{ (soustraire } 4x \textit{ aux deux membres)} \\
20 & = & 6x & \textit{permuter les deux membres} \\
6x & = & 20 & \div 6 \textit{ (diviser les deux membres par } 6\textit{)} \\
x & = & \frac{10}{3} &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de toutes ces équations équivalentes (en particulier de l'équation de départ) est donc : $S = \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

Remarques

Attention ! Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une équation par l'inconnue ou par un polynôme, on peut obtenir une équation non équivalente à la première. On peut supprimer ou ajouter des solutions.

- Si on multiplie les deux membres de l'équation $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$ par le polynôme $x - 2$, on trouve l'équation $x = 2$. La deuxième équation admet comme ensemble de solutions $S = \{2\}$ et la première $S = \emptyset \rightarrow$ En substituant 2 à x dans la première équation, on obtient une division par 0. On a donc ajouté la solution égale à 2.
- Si on divise les deux membres de l'équation $x^2 = x$ par le monôme x, on trouve l'équations $x = 1$. La deuxième équation a comme ensemble de solutions $S = \{1\}$ et la première $S = \{0; 1\}$. On a perdu une solution égale à 0.

Dans la pratique, on se permettra tout de même de réaliser ces transformations dans certaines résolutions mais il sera alors nécessaire de **tester les solutions** obtenues dans l'équation de départ (en substituant ces solutions à l'inconnue, voir exemple au paragraphe *à complter*).

Définition 2.4
On appelle **zéros** ou **racines** d'un polynôme $p(x)$ les solutions de l'équation : $p(x) = 0$.

Si le nombre réel a est un zéro du polynôme $p(x)$ alors $p(a) = 0$.

Exemple

2 est un zéro du polynôme $p(x) = x^2 - 4$ *car* 2 *est solution de l'équation* $x^2 - 4 = 0$. *De plus,* $p(2) = 2^2 - 4 = 0$.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne traiterons que des équations à **une** inconnue. On désignera cette inconnue par la lettre x.

2.2 Equations du premier degré

Définition 2.5
Une **équation du premier degré** à une inconnue est une équation équivalente (qui peut être mise sous la forme) à l'équation :

$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Remarque

Dans une équation du premier degré, l'inconnue apparaît seulement à la puissance 1. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $3x - 2 = 0$

2) $4x - 3 = 8x - 7 + 2x - 1$

Solution

L'équation (2.1) possède une **unique** solution : $x = -\dfrac{b}{a}$.

Une équation du premier degré est rarement donnée sous la forme (2.1) et sa solution ne peut donc pas être donnée immédiatement comme ci-dessus. On utilisera alors les règles d'équivalence pour résoudre une telle équation.

2.2.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation du premier degré :

1. réduire les polynômes figurant dans chacun des deux membres,

2. "passer" les termes en x dans un des membres et les termes constants dans l'autre en utilisant la règle d'addition $\to$ obtenir une équation de la forme $ax = b$,

3. isoler (on dit aussi expliciter) x en divisant les deux membres par $a \to$ obtenir $x = \ldots$.

Il arrive qu'une, ou plusieurs, de ces étapes soient inutiles ou que d'autres méthodes soient plus avantageuses, selon les cas.

Exemple

Résoudre : $4x + 2 - (1 - x) = 3x + 4 - x$.

$$\begin{array}{rcl|l} 4x + 2 - (1 - x) & = & 3x + 4 - x & \textit{CL (réduire les deux polynômes)} \\ 5x + 1 & = & 2x + 4 & -1 \\ 5x & = & 2x + 3 & -2x \\ 3x & = & 3 & \div 3 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{1\}$.

2.3 Equations du deuxième degré

Définition 2.6
Une **équation du deuxième degré** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Remarque

Dans une équation du deuxième degré, l'inconnue apparaît à la puissance 2 et éventuellement à la puissance 1. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

2) $4(x-2)^2 = 2x - 1$

2.3.1 Résolution par factorisation

Proposition 2.1
Soit $p(x)$ un polynôme et $a(x)$, $b(x)$, ..., $m(x)$ des polynômes tels que $p(x) = a(x) \cdot b(x) \cdot \ldots \cdot m(x)$: une **factorisation** de $p(x)$.
L'ensemble des solutions de l'équation

$$p(x) = 0 \qquad \text{ou (équivalent)} \qquad a(x) \cdot b(x) \cdot \ldots \cdot m(x) = 0$$

est égal à la réunion des ensembles de solutions des équations :

$$\begin{aligned} a(x) &= 0, \\ b(x) &= 0, \\ &\vdots \\ m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Cette proposition découle immédiatement du fait qu'un produit de plusieurs facteurs est nul si et seulement si au moins un de ces facteurs est nul.

En se fondant sur cette proposition, on peut résoudre certaines équations du deuxième degré en **devinant une factorisation** du membre de droite ou de gauche de l'équation (un polynôme de degré 2) si le membre de gauche, respectivement de droite, est *égal à* 0. On utilise les techniques vues au chapitre (1.4.3) pour déterminer une factorisation : mise en évidence, identité remarquable, ...

Exemples

1) Résoudre : $x^2 + 5x = 0$.

En mettant x *en évidence, on obtient l'équation équivalente :*

$$x(x+5) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

* $x_1 = 0$
* $x + 5 = 0 \longrightarrow x_2 = -5$

En conséquence : $S = \{0; -5\}$

2) Résoudre : $x^2 - 2x - 24 = 0$.

En devinant une factorisation du membre de gauche, on obtient l'équation équivalente :

$$(x+4)(x-6) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

* $x + 4 = 0 \longrightarrow x_1 = -4$
* $x - 6 = 0 \longrightarrow x_2 = 6$

En conséquence : $S = \{-4; 6\}$

3) Résoudre : $x^2 = 3$.

Cette équation est équivalente à l'équation $x^2 - 3 = 0$. *En utilisant une identité remarquable, on devine une factorisation du membre de gauche :*

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

D'où les 2 équations à résoudre :

$*$ $x + \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x_1 = -\sqrt{3}$

$*$ $x - \sqrt{3} = 0 \longrightarrow x_2 = \sqrt{3}$

En conséquence : $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Remarque

Attention ! L'équation de l'exemple 3) possède deux solutions : $\pm\sqrt{3}$. Ce résultat est vrai pour toutes les équations du type $x^2 = a$ avec $a > 0$, qui admettent comme solutions les nombres $\pm\sqrt{a}$. Il faut prendre garde à ne pas oublier la solution $-\sqrt{a}$! ! !

2.3.2 Résolution à l'aide d'une formule

Proposition 2.2
Soit l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de cette équation le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le nombre de solutions de l'équation dépend du signe de Δ :

- si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes : $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$,

- si $\Delta = 0$: une solution double : $\boxed{x_1 = \frac{-b}{2a}}$,

- si $\Delta < 0$: pas de solution réelle ($S = \emptyset$).

Démonstration. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On transforme le membre de gauche par une suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{=0} + \frac{c}{a}\right) \\
&\overset{id.\ rem.}{=} a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Comme $a \neq 0$, l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

est équivalente à l'équation de départ. La suite de la résolution dépend du signe de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Le dénominateur, $4a^2$, est toujours positif et le signe du numérateur, $\Delta = b^2-4ac$, dépend des valeurs de a, b et c.

Si $\Delta > 0$: il y a deux nombres dont le carré est $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

* Première solution : $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
* Seconde solution : $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$: le membre de droite de l'équation vaut 0.

* Une solution double : $x + \dfrac{b}{2a} = 0 \longrightarrow x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$: le membre de droite de l'équation est négatif : $\frac{b^2-4ac}{4a^2} < 0$.

* Pas de solution réelle : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < 0$.

□

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation du deuxième degré :

> **1.** réduire les polynômes figurant dans chacun des deux membres,
>
> **2.** "passer" tous les termes en x dans un des membres en utilisant la règle d'addition $\rightarrow$ obtenir une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$,
>
> **3.** appliquer la formule de résolution ou deviner une factorisation pour obtenir la ou les solutions.

Exemple

Résoudre : $2\cdot(x-3)^2 = x^2-3\cdot(3x-5)+1$.

$$\begin{array}{rcl|l} 2\cdot(x-3)^2 & = & x^2-3\cdot(3x-5)+1 & \textit{CL (réduire les deux polynômes)} \\ 2x^2-12x+18 & = & x^2-9x+16 & -(x^2-9x+16) \\ x^2-3x+2 & = & 0 & \end{array}$$

On applique la formule de résolution des équations du deuxième degré avec $a=1$, $b=-3$ *et* $c=2$.

- *Calcul du discriminant :* $\Delta = (-3)^2-4\cdot1\cdot2 = 1$.
- $\Delta > 0$ *: 2 solutions distinctes :*
  * $x_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = 2$
  * $x_2 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = 1$
- *Ensemble des solutions :* $S = \{1;2\}$.

2.3.3 Factorisation d'un polynôme de degré 2

Il est possible de factoriser directement un polynôme de degré 2 si on connaît ses zéros, sans devoir tâtonner.

Proposition 2.3
Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$ et le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation $p(x) = 0$.

Si $\Delta > 0$: le polynôme $p(x)$ possède deux zéros distincts x_1 et x_2 et on peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Si $\Delta = 0$: le polynôme $p(x)$ possède un zéro double x_1 et on peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)^2}$$

Si $\Delta < 0$: le polynôme $p(x)$ ne possède pas de zéro et on ne peut pas le décomposer en un produit de deux facteurs du premier degré.

Remarque

Attention ! Lorsqu'on utilise cette proposition pour factoriser un polynôme de degré 2, il ne faut pas oublier le **coefficient dominant** comme premier facteur ! ! !

Démonstration. Soit $p(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$. On considère ici uniquement le cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. La démonstration des autres cas est laissée au lecteur.
Lors de la démonstration de la formule de résolution des équations du deuxième degré, on a vu que $ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Comme $\Delta > 0$, on peut utiliser les identités remarquables et obtenir :

$$\begin{aligned} a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a \cdot \left[\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \end{aligned}$$

□

Exemple

Le polynôme de degré 2, $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$, possède deux zéros : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -3$. On peut donc écrire la factorisation :

$$p(x) = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$$

2.3.4 Formules de Viète

Théorème 2.4
Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du deuxième degré avec $a \neq 0$ qui admet deux zéros distincts x_1 et x_2 alors :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}} \qquad \textbf{Formules de Viète}$$

Démonstration. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ un polynôme du deuxième degré avec deux zéros distincts x_1 et x_2. On peut écrire que

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{array}{cccccl} - & x^2 & : & a & = & a \qquad\qquad , \\ - & x & : & b & = & -a \cdot (x_1 + x_2) \quad (1), \\ - & 1 & : & c & = & a \cdot x_1x_2 \qquad\quad (2). \end{array}$$

De l'équation (1), on tire que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et, de l'équation (2), que $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. □

On pourra utiliser ces formules de Viète pour deviner les zéros d'un polynôme du deuxième degré et ainsi déterminer une factorisation de ce polynôme.

Exemple

Les racines de $x^2 - 5x + 6$ sont, d'après les formules de Viète, deux nombres dont la somme est $-\dfrac{-5}{1} = 5$ et le produit $\dfrac{6}{1} = 6$. En tâtonnant, on trouve que ces deux nombres sont 2 et 3.
On peut donc écrire que : $x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = (x - 2) \cdot (x - 3)$.

2.4 Equations bicarrées

Il existe un type particulier d'équations de degré différent de 2 qu'on peut résoudre à l'aide de la formule vue au paragraphe précédent.

Définition 2.7
Une **équation bicarrée** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{2.3}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemples

1) $4x^6 + 2x^3 - 6 = 0$ *: équation bicarrée avec $n = 3$.*

2) $-2x^{10} - 7x^5 + \frac{4}{5} = 0$ *: équation bicarrée avec $n = 5$.*

2.4.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation bicarrée (équation 2.3) :

1. poser $t = x^n$ et substituer $\rightarrow$ on obtient l'équation du deuxième degré $at^2 + bt + c = 0$,

2. trouver les solutions t_1 et t_2 (si elles existent) de cette équation à l'aide de la formule de résolution ou d'une factorisation,

3. résoudre les équations $x^n = t_1$ et $x^n = t_2$ (inconnue : x).

Exemple

Résoudre : $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$. *On reconnaît une équation bicarrée avec* $n = 2$. *On pose alors* $t = x^2$ *et on substitue pour obtenir :*

$$4t^2 + 11t - 3 = 0$$

On peut résoudre cette équation à l'aide de la formule de résolution des équations du second degré avec $a = 4$, $b = 11$ *et* $c = -3$.

– *Calcul du discriminant :* $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 169 = 13^2$.
– $\Delta > 0$ *: 2 solutions distinctes :*
  ∗ $t_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-11 + 13}{8} = \dfrac{1}{4}$
  ∗ $t_2 = \dfrac{-11 - \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-11 - 13}{8} = -3$

Pour la dernière étape, on utilise la relation entre x *et* t *pour poser les équations :*

∗ $x^2 = t_1 \longrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4}$. *Deux solutions :* $x_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ *et* $x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$

∗ $x^2 = t_2 \longrightarrow x^2 = -3$. *Pas de solution : un nombre élevé au carré ne peut pas être négatif.*

L'ensemble des solutions est : $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$.

2.5 Equations polynomiales

Définition 2.8
Une **équation polynomiale** de degré n à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$p(x) = 0 \tag{2.4}$$

où $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$).

Remarque

Dans une équation polynomiale, l'inconnue apparaît élevée à une ou plusieurs puissances. La puissance la plus élevée nous donne, en principe, le degré du polynôme $p(x)$. On utilisera ces caractéristiques pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $2x^3 - 4x + 2 = 0$ *: équation polynomiale de degré* 3.

2) $8x^4 - 3x^2 + 2 = -7x^5 + 9x^3 - 2x$ *: équation polynomiale de degré* 5.

3) $5x^3 - 2x^2 - x + 1 = 5x^3 - 3$ *: équation polynomiale de degré* 2.

2.5.1 Division euclidienne

Rappel

La *division euclidienne* d'un nombre naturel a par un nombre naturel b a été étudiée à l'école secondaire. Par exemple, pour diviser 535 par 6, on suit le schéma suivant :

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 5\;3\;5 & \;\;6 \\ \cline{3-3}
\ominus & \underline{4\;8\;\;} & 8\;9 \\
 & 5\;5 & \\
\ominus & \underline{5\;4} & \\
 & 1 &
\end{array}
$$

où 89 est le *quotient* de la division et 1 le *reste*. Plus généralement, pour a et b, on obtient :

$$a = b \cdot q + r$$

où a est appelé le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste* qui doit être le plus petit nombre positif ou nul possible.
A partir de la "même" idée, on va pouvoir diviser deux polynômes en faisant apparaître un reste et un quotient.

Définition 2.9
Diviser un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$ à l'aide d'une **division euclidienne** revient à chercher des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

avec $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$.
On appelle $p(x)$ le **dividende**, $d(x)$ le **diviseur**, $q(x)$ le **quotient** et $r(x)$ le **reste**.

Pour réaliser cette division, nous allons utiliser l'**algorithme de division** ci-dessous illustré par un exemple.

Pour diviser $p(x) = 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3$ par le polynôme $d(x) = 2x^2 - 1$, on part du tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
6x^4 & + & 4x^3 & - & 7x^2 & \qquad & +\;3 & 2x^2 - 1 \\ \cline{8-8}
 & & & & & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}
$$

On place à gauche le dividende en **laissant un espace vide** pour les puissances de x "absentes" dans le polynôme et à droite le diviseur.

On suit ensuite les pas de l'algorithme :

1) Déterminer le monôme $m(x)$ par lequel il faut multiplier le terme de plus haut degré du diviseur, ici $2x^2$, pour obtenir le terme de plus haut degré du dividende, ici $6x^4$ $\longrightarrow$ Réponse : $m(x) = 3x^2$.

2) Reporter $m(x)$ dans la partie réservée au quotient (sous le diviseur).

3) Multiplier $d(x)$ par $m(x)$ et reporter le résultat sous le dividende en respectant les puissances de x $\longrightarrow$ Produit : $3x^2 \cdot (2x^2 - 1) = 6x^4 - 3x^2$.

4) Soustraire ce produit du dividende pour trouver un polynôme $s(x)$ $\longrightarrow$ Différence : $s(x) = (6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3) - (6x^4 - 3x^2) = 4x^3 - 4x^2 + 3$.

5) **- Si deg**$(s(x)) <$ **deg**$(d(x))$ **:** stop !
   - Sinon : recommencer en 1 en prenant $s(x)$ comme "nouveau" dividende.

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6x^4 & +\ 4x^3 & -\ 7x^2 & & +\ 3 & 2x^2 - 1 \\ \cline{7-7}
\ominus & 6x^4 & & -\ 3x^2 & & & 3x^2 + 2x - 2 \\ \cline{2-4}
 & & 4x^3 & -\ 4x^2 & & +\ 3 & \\
\ominus & & 4x^3 & & -\ 2x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -\ 4x^2 & +\ 2x & +\ 3 & \\
\ominus & & & -\ 4x^2 & & +\ 2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2x & +\ 1 &
\end{array}
$$

La dernière ligne de gauche fournit le reste et la ligne sous le diviseur le quotient. On a ainsi :

$$\underbrace{6x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3}_{\text{dividende}} = \underbrace{(2x^2 - 1)}_{\text{diviseur}} \cdot \underbrace{(3x^2 + 2x - 2)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(2x + 1)}_{\text{reste}}$$

Définition 2.10
Un polynôme $p(x)$ est dit **divisible** par un polynôme $d(x)$ si le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ vaut zéro.

Remarque

Si le polynôme $p(x)$ est divisible par le polynôme $d(x)$, il existe un polynôme $q(x)$ tel que :

$$p(x) = d(x) \cdot q(x)$$

On peut donc écrire $p(x)$ comme le produit de 2 polynôme. On obtient alors une *factorisation* de $p(x)$.

Proposition 2.5
Si $p(x)$ est un polynôme de degré n et $d(x)$ un polynôme de degré m, le quotient de la division de $p(x)$ par $d(x)$ est un polynôme de degré $n - m$ et le reste un polynôme de degré inférieur à m.

Il découle de cette proposition que le reste de la division d'un polynôme de degré quelconque par un polynôme de degré 1 est de degré 0, donc un **nombre réel**.

Théorème 2.6
Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par le polynôme $x - a$ vaut $p(a)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si $q(x)$ est le quotient et r (un nombre réel !) le reste de la division de $p(x)$ par $x - a$, on a :

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

En remplaçant x par a, on obtient $p(a) = \underbrace{(a - a)}_{=0} \cdot q(a) + r = r$. □

Il découle du théorème précédent et de la définition de la divisibilité le théorème suivant :

Théorème 2.7
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes

1. a est une solution de l'équation $p(x) = 0$,
2. a est une racine de $p(x)$,
3. $p(x)$ est divisible par $x - a$.

avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple

Divisons $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ par $d(x) = x - 2$ à l'aide de l'algorithme de division.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 3x^3 & + & 2x^2 & - & x + 2 & & x - 2 \\ \cline{10-10}
\ominus & \underline{x^4} & \underline{-} & \underline{2x^3} & & & & & & x^3 - x^2 - 1 \\
 & & - & x^3 & + & 2x^2 & - & x + 2 & & \\
 & \ominus & \underline{-} & \underline{x^3} & \underline{+} & \underline{2x^2} & & & & \\
 & & & & & & - & x + 2 & & \\
 & & & & & \ominus & \underline{-} & \underline{x + 2} & & \\
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

On obtient alors :

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (x^3 - x^2 - 1)$$

Ainsi, $p(x)$ est divisible par $x - 2$ car le reste est nul. 2 est donc une racine de $p(x)$, ce qu'on peut facilement vérifier : $p(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$.

2.5.2 Schéma de Horner

Le **schéma de Horner** s'avère souvent très utile lorsqu'on désire :
– diviser un polynôme $p(x)$ par le polynôme $x - a$,
– évaluer un polynôme $p(x)$ en a.
avec $a \in \mathbb{R}$.

Nous allons illustrer l'utilisation de ce schéma de Horner par un exemple.

On désire diviser le polynôme $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ par le polynôme $d(x) = x - 2$. On pourrait utiliser l'algorithme de division et trouver que :

$$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = (x - 2) \cdot (2x^3 + x^2 - 5) - 6 \tag{2.5}$$

On peut également partir du tableau suivant (schéma de Horner) :

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -2 & -5 & 4 & \\ & & & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du polynôme, y compris ceux valant 0 ! Le 2 de la deuxième ligne du tableau est le zéro du diviseur $d(x) = x - 2$.

On construit ensuite, en partant du coin inférieur gauche, le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -2 & -5 & 4 & \\ & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \\ & 4 & 2 & 0 & -10 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -5 & \| \; -6 & \end{array}$$

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $q(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ et le reste $r = -6$. On retrouve donc bien l'équation (2.5).

De plus, la valeur de $p(x)$ en 2 est égale au reste $r = -6$ donnée par le schéma de Horner : $p(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -6$.

2.5.3 Principe de résolution

Pour les équations de degrés 3 et 4, il existe des formules du même type que celles que nous avons rencontrées pour le degré 2. Elles sont cependant relativement compliquées et on ne les utilisera pas dans ce cours. En 1826, Abel, mathématicien norvégien, a montré qu'une équation du cinquième degré ou plus ne peut se résoudre par radicaux (pas de solutions générales comme pour les équations du second degré).

Dans ce cours, nous allons utiliser une technique qui permet de résoudre un *petit nombre* d'équations polynomiales de degré supérieur à 2 et qui se base sur les techniques de division de polynômes.

Soit $p(x)$ un polynôme de degré supérieur à 2. Marche à suivre pour résoudre l'équation $p(x) = 0$:

1. chercher par tâtonnement une solution, a, de l'équation,

2. diviser le polynôme $p(x)$ par le binôme $x - a$, $\longrightarrow$ on obtient une polynôme $q(x)$ tel que $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$,

3. **- si deg**$(q(x)) > 2$ **:** recommencer en 1 en considérant l'équation $q(x) = 0$,

- si deg$(q(x)) \leqslant 2$ **:** résoudre l'équation $q(x) = 0$ à l'aide des techniques vues dans les chapitres précédents.

Remarques

1) Pour résoudre une équation polynomiale quelconque, il faut, avant de pouvoir débuter la procédure décrite ci-dessus, se ramener à une équation équivalente avec un des deux membres égal à zéro.

2) La solution a obtenue par tâtonnement est une racine de $p(x)$ car $p(a) = 0$.
3) D'une manière générale, on cherche tout d'abord des racines entières proches de zéro en testant dans l'ordre les nombres : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
4) Le degré de $q(x)$ est strictement inférieur à celui de $p(x)$ ce qui permet de "simplifier" le problème (on ne peut pas itérer les opérations sans fin).

Exemple

Résoudre : $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Essais successifs pour découvrir une solution :

– $x = 0 \longrightarrow 0^3 + 0^2 - 4 \cdot 0 - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: Non*
– $x = 1 \longrightarrow 1^3 + 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: Non*
– $x = -1 \longrightarrow (-1)^3 + (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 \stackrel{?}{=} 0$ *: O.K*

$\Rightarrow x_1 = -1$ *est solution de l'équation.*

On divise alors le polynôme x^3+x^2-4x-4 *par le binôme* $x+1$ *à l'aide du schéma de Horner.*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & -4 & \\ & -1 & 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & \| \; 0 & \end{array}$$

On obtient l'égalité $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x^2 - 4)$.

On résout alors l'équation $x^2-4 = 0$. *Cette équation est une équation du deuxième degré qu'on peut résoudre par factorisation en utilisant une identité remarquable. On trouve l'équation équivalente*

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

qui admet comme solution $x_2 = 2$ *et* $x_3 = -2$.

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est : $S = \{-2; -1; 2\}$.

2.5.4 Factorisation d'un polynôme de degré supérieur à 2

Définition 2.11

Rappel : **factoriser** un polynôme de degré n consiste à écrire ce polynôme sous forme d'un produit de polynômes de degré plus petit que n.

Un polynôme est dit **irréductible** s'il ne peut pas être écrit comme un produit de deux polynôme de degré $\geqslant 1$.

Exemples

1) Le polynôme $x^2 + 4$ *est irréductible.*

2) Le polynôme $x^2 - 4$ *n'est pas irréductible, car* $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

Théorème 2.8

Les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif.

Ainsi, tout polynôme peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

Pour factoriser un polynôme $p(x)$ de degré n avec $n > 2$ sous cette forme, on va procéder comme si on voulait résoudre l'équation $p(x) = 0$:

1. trouver une racine a de $p(x)$,

2. diviser $p(x)$ par $x - a$ pour obtenir

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

ce qui permet d'effectuer une étape de la factorisation complète du polynôme,

3. factoriser $q(x)$ en partant de 1 si $\deg(q(x)) = n - 1 > 2$ ou en utilisant les résultats de la section (2.3.3) si $\deg(q(x)) = 2$.

Remarques

1) Cette méthode ne permet pas de trouver la factorisation d'un polynôme $p(x)$ qui n'admet pas de polynôme de degré 1 dans sa factorisation. Ainsi, elle n'est pas utilisable pour le polynôme suivant qui se factorise pourtant facilement à l'aide d'une identité remarquable : $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$.
2) Cette procédure a une fin car le degré du quotient est toujours inférieur de 1 au degré du polynôme de départ (dividende).

Théorème 2.9
Un polynôme de degré n a au plus n zéros.

En se basant sur ce théorème et sur la procédure de factorisation ci-dessus, on peut, comme pour les polynômes de degré 2, donner immédiatement la factorisation d'un polynôme $p(x)$ de degré n si on connaît exactement les n zéros de celui-ci (donc l'ensemble de ses zéros d'après le théorème).

Proposition 2.10
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n zéros de ce polynôme. On peut écrire :

$$\boxed{p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

Remarque

Attention ! Lorsqu'on utilise cette proposition pour factoriser un polynôme de degré n, il ne faut pas oublier le **coefficient dominant** comme premier facteur !!!

Exemple

Soit le polynôme $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$. *Ses* 3 *zéros sont :* $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ *et* $x_3 = \frac{1}{3}$.
Une factorisation de ce polynôme en un produit de facteurs irréductibles est :

$$p(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - \frac{1}{3})$$

Les zéros dans la proposition ci-dessus ne sont pas nécessairement tous différents. Par exemple, $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ se factorise

$$p(x) = (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-1)$$

Si un facteur $x - a$ apparaît m fois, alors a est un **zéro de multiplicité** m du polynôme $p(x)$. Dans l'exemple ci-dessus, 1 est un zéro de multiplicité 2, et -3 un zéro de multiplicité 1.
A l'inverse, si a est un zéro de $p(x)$ de multiplicité m, alors $p(x)$ admet le facteur $(x-a)^m$ dans sa factorisation.

Le théorème suivant permet de "deviner" plus facilement un zéro de certains polynôme qu'en testant tous les nombres entiers proche de zéro.

Théorème 2.11
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers.

1) Si a est un zéro entier de $p(x)$, alors a est un diviseur de a_0.
2) Si $a = \frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $p(x)$, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de a_0 et v un diviseur de a_n

Exemple

Déterminer les zéros rationnels de $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.
Les zéros entiers possibles sont ± 1, ± 2, *car les diviseurs de* 2 *sont* ± 1 *et* ± 2.
Les zéros rationnels possibles sont ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, *car les diviseurs de* 3 *sont* ± 1 *et* ± 3 *et les diviseurs de* 2 *sont* ± 1 *et* ± 2.
On obtient ici les trois zéros du polynôme car $p(1) = 0$, $p(-2) = 0$ *et* $p(\frac{1}{3}) = 0$.

2.6 Equations rationnelles

Définition 2.12
Une **équation rationnelle** à une inconnue est une équation équivalente à l'équation :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \tag{2.6}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes.

Remarque

Dans une équation rationnelle, l'inconnue apparaît au dénominateur d'une (ou plusieurs) fractions. On utilisera cette caractéristique pour identifier une telle équation.

Exemples

1) $\dfrac{3x-2}{4-x} = 0$

2) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3x}$

3) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{x-1} = -\dfrac{39}{x(x-1)}$

Solutions

Les solutions de l'équation (2.6) sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$ qui ne sont pas solution de l'équation $q(x) = 0$. L'ensemble des solutions est donc donné par : $S = \{a \in \mathbb{R} \mid p(a) = 0 \text{ et } q(a) \neq 0\}$.

Une équation rationnelle est rarement donnée sous la forme (2.6). Il faudrait donc trouver, par une suite d'opérations, une équation équivalente de la forme souhaitée pour pouvoir "calculer" ses solutions comme proposé ci-dessus. Dans la pratique, on procédera généralement un peu différemment.

2.6.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation rationnelle :

1. déterminer le polynôme *de plus petit degré possible* multiple de chaque dénominateur $\longrightarrow$ on appelle ce polynôme le "*ppmc*" des dénominateurs,

2. multiplier chaque membre de l'équation par ce "*ppmc*" et simplifier $\longrightarrow$ **les dénominateurs "disparaissent"**,

3. résoudre l'équation ainsi obtenue,

4. **vérifier** les solutions obtenues dans l'équation de départ !

Remarque

Attention ! Le fait de multiplier les deux membres d'une équation par un polynôme peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemples

1. *Le "ppmc" des polynômes* $x^3 \cdot (x-2)$ *et* $x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$ *est le polynôme* $x^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$.

   Pour construire ce "ppmc", on multiplie chacun des facteurs différents apparaissant dans les polynômes initiaux. Si un même facteur élevé à différentes puissances est présent dans plusieurs polynômes, on ne considère que la puissance la plus grande pour la construction du "ppmc".

2. *Résoudre :* $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{2}{5x-10}$.

   On détermine d'abord le "ppmc" des dénominateurs qui est le polynôme $5 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$. *Ensuite, on procède comme décrit ci-dessus :*

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} & = & \frac{2}{5x-10} & \cdot 5(x-2)(x+2) \text{ \textit{(multiplier par}} \\
 & & & \text{\textit{le "ppmc")}} \\
\frac{5(x-2)(x+2)}{x-2} - \frac{3 \cdot 5(x-2)(x+2)}{x+2} & = & \frac{2 \cdot 5(x-2)(x+2)}{5x-10} & \text{\textit{simplifier}} \\
5(x+2) - 3 \cdot 5(x-2) & = & 2(x+2) & \text{\textit{CL}} \\
-10x + 40 & = & 2x + 4 & -40
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} -10x & = & 2x-36 & -2x \\ -12x & = & -36 & \div(-12) \\ x & = & 3 & \end{array}$$

Important ! *Il faut maintenant vérifier la solution obtenue en substituant* 3 *à* x *dans l'équation de départ.*

Vérification

$$* \quad \underbrace{\frac{1}{3-2} - \frac{3}{3+2}}_{=\frac{2}{5}} \stackrel{?}{=} \frac{2}{5} \longrightarrow O.K.$$

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S = \{3\}$.

2.7 Equations irrationnelles

Définition 2.13

Une **équation irrationnelle** à une inconnue est une équation où l'inconnue figure sous un radical $\sqrt[n]{\ldots}$.

Exemples

1) $\sqrt{3x-2} = 8$

2) $\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0$

3) $\sqrt[3]{4x-3} = \sqrt[6]{5x^2-7x+2} + 23x - 4$

2.7.1 Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre une équation irrationnelle :

1. isoler un radical $\sqrt[n]{\ldots}$ dans un des membres de l'équation à l'aide des règles d'équivalence,
2. élever les deux membres de l'équation à la puissance $n \longrightarrow$ le radical isolé disparaît,
3. *répéter les points* 1 *et* 2 *afin de faire disparaître l'ensemble des radicaux,*
4. résoudre l'équation à une inconnue obtenue,
5. **vérifier** les solutions obtenues dans l'équation de départ !

Remarque

Attention ! Le fait d'élever à la puissance n les deux membres d'une équation peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. C'est pourquoi il est nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemple

Résoudre : $\sqrt{x+5}+x-1=0$.

$$\begin{array}{rcl|l} \sqrt{x+5}+x-1 & = & 0 & -(x-1) \text{ (isoler le radical)} \\ \sqrt{x+5} & = & -x+1 & (\ldots)^2 \text{ (élever au carré)} \\ x+5 & = & (-x+1)^2 & \text{développer} \\ x+5 & = & x^2-2x+1 & -(x+5) \\ 0 & = & x^2-3x-4 & \end{array}$$

On résout alors l'équation du deuxième degré $x^2-3x-4=0$ *à l'aide de la formule de résolution avec* $a=1$, $b=-3$ *et* $c=-4$.

- *Calcul du discriminant :* $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25=5^2$.
- $\Delta>0$ *: 2 solutions distinctes :*
  - $\ast$ $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{3+5}{2}=4$
  - $\ast$ $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{3-5}{2}=-1$

Important ! *Il faut maintenant vérifier les solutions obtenues en les substituant à* x *dans l'équation de départ.*

<u>*Vérification*</u>

$\ast$ $\underbrace{\sqrt{4+5}}_{=3}+4-1\stackrel{?}{=}0\longrightarrow$ *Non*

$\ast$ $\underbrace{\sqrt{-1+5}}_{=2}+(-1)-1\stackrel{?}{=}0\longrightarrow$ *O.K.*

L'ensemble des solutions, après vérification, est : $S=\{-1\}$.

2.8 Exercices

1) Dans chacune des formules physiques suivantes, exprimer chaque lettre au moyen des autres.

a) $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ c) $x = \dfrac{1}{2}at^2 + x_0$ d) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

2) Résoudre les équations suivantes.

a) $10x - 38 + 5x = 20x - 18 + 4x - 11$ b) $4x + 7 + 20x - 17 = 24x - 10$

c) $-x + 8 = -1 + 2x$ d) $x - 10 = -9 + 3x$

e) $4x + 12 - (1 - x) = 5x + 2$ f) $4x + 12 - (1 - x) = 5x + 11$

g) $4x + 3 = 2(7x - 1)$ h) $7(x + 2) - x = 2(x - 1)$

i) $4x - (x + 3) = 5 - (1 - 3x)$ j) $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

k) $(5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$ l) $\dfrac{3 - x}{2} = \dfrac{9 + 7x}{6}$

m) $\dfrac{x - 1}{5} = \dfrac{3x + 2}{20}$ n) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{6} - x = 18$

o) $11 - \dfrac{x}{3} = 1 + \dfrac{x}{12}$ p) $\dfrac{1}{5}x + 2 = 3 - \dfrac{2}{7}x$

3) Résoudre les équations suivantes.

a) $(x - 2)(x + 3) = 0$ b) $(3x - 1)(3 - 4x) = 0$

c) $x(2x + 7) = 0$ d) $(2x + 1)^2 = 0$

e) $x^2 + 4x = 0$ f) $x = 3x^2$

g) $x^2 - 9 = 0$ h) $(x - 2)^2 = 9$

i) $(x + 5)^2 = -5$ j) $1 - (4x + 11)^2 = 0$

4) Résoudre les équations suivantes.

a) $3x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $2x^2 - x - 1 = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$ d) $x(x + \sqrt{2}) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$

e) $x^2 - (3 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ f) $x^2 - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})x = 6\sqrt{3}$

g) $x(x + \sqrt{5}) = 2x$ h) $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$

i) $x^3 + 6x^2 + 5x = 0$ j) $x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$

5) Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{x-3}{x-5}=5$

b) $\dfrac{x-3}{x-5}=0$

c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{2x+1}$

e) $\dfrac{x-5}{x-3}-\dfrac{x-7}{x-1}=\dfrac{1}{2x-2}$

f) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=1$

g) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{8}{x^2-1}$

h) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}=0$

i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{9}$

j) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{x^2-1}=1$

6) Résoudre les équations suivantes.

a) $2+\sqrt[3]{1-5t}=0$

b) $\sqrt[4]{2x^2-1}=x$

c) $\sqrt{7-x}+5=x$

d) $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

e) $x=4+\sqrt{4x-19}$

f) $x+\sqrt{5x+19}=-1$

g) $\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3x}$

h) $\sqrt{11+8x}+1=\sqrt{9+4x}$

i) $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x-5}$

j) $\sqrt{1+4\sqrt{x}}=\sqrt{x}+1$

2.9 Solutions des exercices

2) a) $S=\{-1\}$ b) $S=\mathbb{R}$ c) $S=\{3\}$ d) $S=\{-\frac{1}{2}\}$
e) $S=\emptyset$ f) $S=\mathbb{R}$ g) $S=\{\frac{1}{2}\}$ h) $S=\{-4\}$
i) $S=\emptyset$ j) $S=\{-\frac{24}{29}\}$ k) $S=\{\frac{7}{31}\}$ l) $S=\{0\}$
m) $S=\{6\}$ n) $S=\{54\}$ o) $S=\{24\}$ p) $S=\{\frac{35}{17}\}$

3) a) $S=\{-3;2\}$ b) $S=\{\frac{1}{3};\frac{3}{4}\}$ c) $S=\{-\frac{7}{2};0\}$ d) $S=\{-0,5\}$
e) $S=\{-4;0\}$ f) $S=\{0;\frac{1}{3}\}$ g) $S=\{-3;3\}$ h) $S=\{-1;5\}$
i) $S=\emptyset$ j) $S=\{-\frac{5}{2};-3\}$

4) a) $S=\{\frac{-7\pm\sqrt{85}}{6}\}$ b) $S=\{-\frac{1}{2};1\}$ c) $S=\emptyset$
d) $S=\emptyset$ e) $S=\emptyset$ f) $S=\{\frac{-3+2\sqrt{3}\pm\sqrt{21+12\sqrt{3}}}{2}\}$
g) $S=\{0;2-\sqrt{5}\}$ h) $S=\{0\}$ i) $S=\{-5;-1;0\}$
j) $S=\{-2;0;3\}$

5) a) $S=\{\frac{11}{2}\}$ b) $S=\{3\}$ c) $S=\{3\}$ d) $S=\{-5\}$
e) $S=\{\frac{29}{7}\}$ f) $S=\emptyset$ g) $S=\emptyset$ h) $S=\{-3;0\}$
i) $S=\{-\frac{3}{4};3\}$ j) $S=\{0;5\}$

6) a) $S=\{\frac{9}{5}\}$ b) $S=\{1\}$ c) $S=\{6\}$ d) $S=\{6\}$
e) $S=\{5;7\}$ f) $S=\{-3\}$ g) $S=\{-1\}$ h) $S=\{-\frac{5}{4}\}$
i) $S=\{3\}$ j) $S=\{0;4\}$

Chapitre 3

Déterminants

3.1 Déterminants d'ordre 2

Définition 3.1
On appelle **déterminant d'ordre 2**, et on note

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

le nombre $a_1b_2 - a_2b_1$.

Exemple

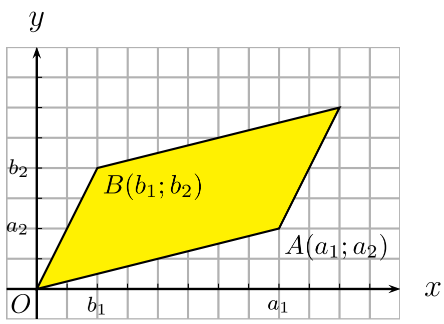
1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 18$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -18$

3.1.1 Aire d'un parallélogramme

On peut utiliser un déterminant d'ordre 2 pour calculer l'aire d'un parallélogramme. Considérons un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, et deux points A et B de coordonnées $(a_1; a_2)$ et $(b_1; b_2)$. L'aire du parallélogramme construit sur OAB (voir le dessin ci-dessous) vaut exactement :

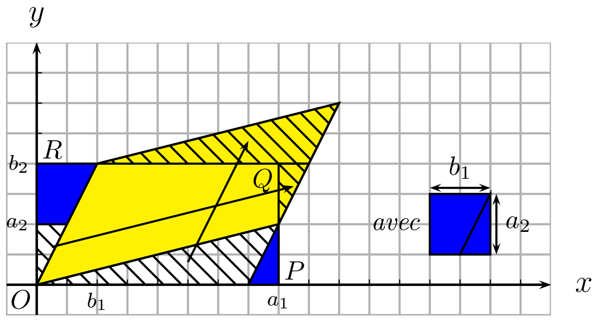
$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$



Démonstration. On peut se convaincre de ce résultat en remarquant que a_1b_2 est l'aire d'un rectangle de largeur a_1 et de hauteur b_2 auquel on soustrait a_2b_1 qui est l'aire d'un rectangle de hauteur a_2 et de largeur b_1.

Or, sur le dessin ci-dessous, en déplaçant les parties hachurées du rectangle $OPQR$ (d'aire a_1b_2) et en éliminant les deux parties foncées (d'aire totale a_2b_1), on retrouve le parallélogramme de départ dont l'aire vaut donc bien $a_1b_2 - a_2b_1$.

On peut également se persuader de ceci en utilisant du papier et des ciseaux.



□

Remarques

– On constate qu'en inversant les deux colonnes du déterminant, on trouve le résultat opposé. Le déterminant peut donc être interprété comme une aire **signée**.
– On peut facilement voir que le déterminant est nul si les trois points O, A et B sont alignés.

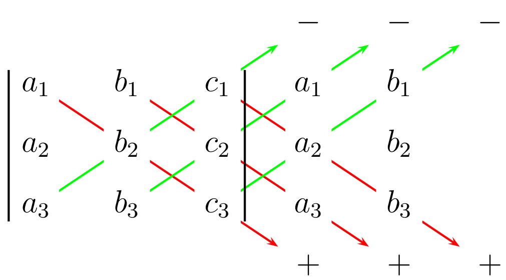
3.2 Déterminants d'ordre 3

Définition 3.2
On appelle **déterminant d'ordre 3**, et on note

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

le nombre $a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

Pour calculer un tel déterminant, on utilise le tableau suivant :



On effectue le produit des éléments sur les diagonales puis on somme ces produits ; les diagonales descendantes sont affectées du signe +, les diagonales montantes du signe −. Ce procédé est appelé **règle de Sarrus**.

Remarque

Attention ! La règle de Sarrus ne marche que pour des déterminants d'ordre trois.

Exemple

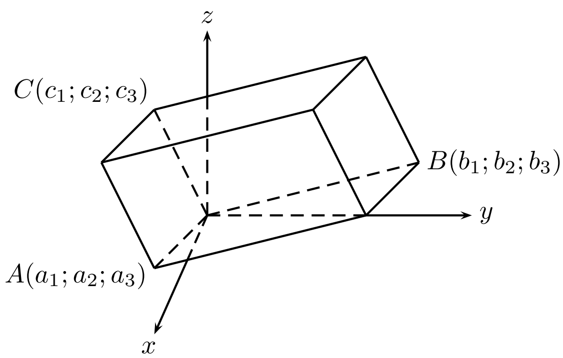
La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *est donnée par*

$$\begin{array}{ccc|cc c} & & & - & - & - \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 2 & \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & \\ -3 & 1 & 0 & -3 & 1 & \\ & & & + & + & + \end{array} = 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 4\cdot(-3) + (-4)\cdot 2\cdot 1 - (-3)\cdot 0\cdot(-4) - 1\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 2 = -36$$

3.2.1 Volume d'un parallélépipède

On peut utiliser un déterminant d'ordre 3 pour calculer le volume d'un parallélépipède. Considérons celui représenté ci-dessous et construit sur le tétraèdre $OABC$. Son volume peut s'exprimer en fonction des coordonnées des points $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ et $C(c_1; c_2; c_3)$. Il est donné par le déterminant d'ordre 3 :

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



3.3 Quelques propriétés des déterminants

Définition 3.3
Le **transposé** d'un déterminant D est un déterminant D' obtenu en permutant, dans D, chaque colonne avec la ligne de même rang (première ligne avec première colonne, ...). Une colonne ou une ligne d'un déterminant est appelée une **rangée**.

Exemple

Le déterminant transposé de $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *est le déterminant* $D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Remarque

Si D' est le transposé de D, D est le transposé de D'.

Voici quelques propriétés des déterminants particulièrement utiles. Elles s'appliquent aux déterminants de tous les ordres, mais nous utiliserons des déterminants d'ordre trois pour illustrer notre propos.

Propriétés

Soit a_i, b_i et c_i $(i = 1, 2, 3)$ des nombres réels.

1. Deux déterminants transposés sont égaux.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2. Si l'on permute deux rangées parallèles d'un déterminant D, la valeur du déterminant obtenu est l'opposée de celle de D.

   Exemple : $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

3. Si un déterminant a une rangée formée uniquement de zéros, alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

4. Si on multiplie tous les éléments d'une rangée par un nombre λ, alors la valeur du déterminant est multiplié par λ.

   Exemple : $\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5. Si deux rangées parallèles d'un déterminant sont proportionnelles (donc éventuellement identiques), alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & \alpha a_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha a_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$

6. Si on ajoute aux éléments d'une même rangée d'un déterminant une combinaison linéaire des éléments correspondants de rangées parallèles, alors le déterminant ne change pas de valeur.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

7. (*Corollaire des propriétés* 3 *et* 6) Si les éléments d'une rangée d'un déterminant peuvent être obtenus par une combinaison linéaire des éléments correspondants de rangées parallèles, alors il est nul.

   Exemple : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma a_1 + \delta a_2 & \gamma b_1 + \delta b_2 & \gamma c_1 + \delta c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{avec } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$

3.4 Déterminants d'ordre n

Définition 3.4
On appelle **déterminant d'ordre** n, et on note sous la forme d'un tableau de n lignes et n colonnes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

le nombre

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1}$$

où
- a_{ij} est l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne,
- M_{ij} est le **mineur** de l'élément a_{ij} défini comme le déterminant obtenu en supprimant dans le tableau représentant le nombre D les rangées (lignes et colonnes) qui contiennent a_{ij},
- A_{ij} est le **cofacteur** de l'élément a_{ij} qui est défini par : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Un déterminant d'ordre n est donc égal à la somme des produits des éléments de la première colonne par les cofacteurs correspondants. On dit dans ce cas que le déterminant est **développé** par rapport à la première colonne.

Proposition 3.1
Un déterminant d'ordre n peut être développé par rapport à n'importe quelle rangée et est donc égal à la somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs correspondants.

En développant par rapport à la i-ème ligne, on obtient :

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

En développant par rapport à la j-ème colonne, on obtient :

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Remarque

Pour un déterminant d'ordre n, les cofacteurs obtenus sont d'ordre $n-1$. On peut calculer ces derniers en utilisant la même définition. Le processus de calcul est donc itératif jusqu'au moment où on obtient des déterminants d'ordre 2 qu'on peut facilement calculer.

Exemples

1) Soit $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Le cofacteur de a_{21} *est :*

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Le cofacteur de a_{13} *est :*

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2) Calculer la valeur de $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Important ! *Pour réduire au maximum le nombre de calculs (et donc l'effort), on va toujours choisir de développer un déterminant selon la rangée comportant le plus de* 0 *possible : ici la troisième colonne.*

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad -3 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1) \cdot (-5 - 4 + 6) - 3 \cdot (3 - 8 + 2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

3.5 Exercices

1) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

2) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 9 & 1 & 16 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

3) Vérifier :

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & -5 \\ -2 & -10 & -14 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -17 \\ 3 & -9 & 51 \\ -8 & 24 & -101 \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 75 & 83 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 21 & 43 \\ 0 & 2 & 75 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & a'' & a \\ b' & b'' & b \\ c' & c'' & c \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

4) Exprimer D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 à l'aide de D_1 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ b & b' & b'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

5) Exprimer D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 à l'aide de D_1 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & b_1 \\ -c_2 & a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

6) Vérifier :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 8 & -5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 14 & 16 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 16 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

7) Résoudre en utilisant les propriétés des déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

8) Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3.6 Solutions des exercices

1) a) 5 b) -1 c) 0 d) 47
e) -1 f) 2 g) -14 h) 0

2) a) -70 b) -88 c) 30 d) 12
e) 1 f) -20 g) -6 h) 178

4) $D_2 = -D_1$ $D_3 = -D_1$ $D_4 = D_1$ $D_5 = -D_1$ $D_6 = D_1$

5) $D_2 = \lambda D_1$ $D_3 = \lambda^2 D_1$ $D_4 = 4D_1$ $D_5 = D_1$ $D_6 = D_1$

7) a) $S = \{a; b\}$ b) $S = \{a; b\}$ c) $S = \{1; a\}$

8) a) -61 b) 0 c) -20

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Généralités

4.1.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition 4.1
Une **équation linéaire à deux inconnues** x et y est une condition pour $(x; y)$ du type :

$$ax + by = c$$

où a, b, c sont des nombres réels.

Tout couple $(x; y)$ qui vérifie $ax + by = c$ est une solution de l'équation.

Il existe une infinité de *couples solutions*. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble de ces couples définit une **droite**.

Exemple

L'équation

$$2x - 3y = -6$$

est une équation linéaire à deux inconnues. Quelques couples solutions de cette équation :

$$(3; 4),\ (0; 2),\ (-3; 0),\ (15; 12),\ (-6; -2),\ \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{3}\right),\ \ldots$$

On peut vérifier l'égalité si on substitue 3 *à* x *et* 4 *à* y *:* $2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -6$ *; de même pour les autres couples de solutions.*

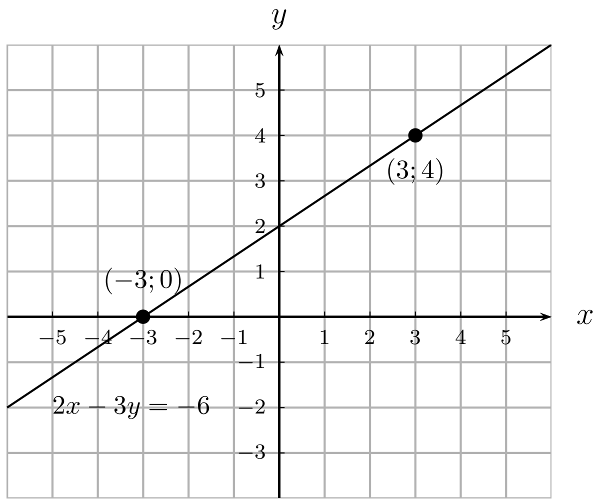
Pour déterminer un couple de solutions, on peut isoler y *par des transformations équivalentes :*

$$\begin{array}{rcl|l} 2x - 3y & = & -6 & -2x \\ -3y & = & -2x - 6 & \div(-3) \\ y & = & \frac{2}{3}x + 2 & \end{array}$$

puis choisir une valeur pour x*, par exemple* 3*, et obtenir la valeur de* y *correspondante en substituant* 3 *à* x *dans l'équation ci-dessus :* $y = \frac{2}{3} \cdot 3 + 2 = 4 \longrightarrow$ *on obtient le couple solution* $(3; 4)$*.*

Pour dessiner la droite représentant l'ensemble des solutions de l'équation linéaire à deux inconnues $2x - 3y = -6$ (cas général $ax + by = c$), on peut procéder comme suit :

1)	déterminer deux couples de solutions $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ de l'équation,
2)	reporter dans le plan muni d'un système d'axes (orthonormés) les points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$,
3)	tracer la droite passant par ces deux points.



Remarque

Une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$ peut être mise sous la forme (voir l'exemple) :

$$y = mx + h$$

où m et h sont deux nombres réels. Cette équation s'appelle aussi *équation réduite* de la droite formée par l'ensemble des solutions. On appelle :
– m la **pente** de la droite,
– h l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Nous reviendrons sur cette équation plus en détails dans la suite du cours.

Définition 4.2
Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est une condition pour $(x; y)$ (ou de manière plus générale $(x_1; x_2)$) du type :

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \textbf{et} \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels.

On convient, le plus souvent, de noter ce système comme suit :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Une **solution** du système (4.1) est un couple de nombres réels $(x; y)$ qui vérifie les deux équations du système simultanément.
Résoudre un système d'équations signifie trouver toutes les solutions de celui-ci.

Exemple

Le système

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

est un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui admet comme solution unique le couple $(2;3)$*. Comme pour les équations à une inconnue, on donne l'ensemble de solutions sous la forme :* $S = \{(2;3)\}$

4.1.2 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Définition 4.3
Une **équation linéaire à trois inconnues** x, y et z est une condition pour (x, y, z) du type :

$$ax + by + cz = d$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

Tout triplet $(x; y; z)$ qui vérifie $ax + by + cz = d$ est une solution de l'équation.

Il existe une infinité de *triplets solutions*. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'ensemble de ces triplets définit un **plan**.

Un **système de trois équations à trois inconnues** est une condition pour $(x; y; z)$ du type :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4.2}$$

où a_i, b_i, c_i et d_i $(i = 1, 2, 3)$ sont des nombres réels.

Une **solution** du système (4.2) est un triplet de nombres réels $(x; y; z)$ qui vérifie les trois équations du système simultanément.

Exemple

Le système

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = -10 \\ x + 2y + 3z = 26 \\ -3x - 4y + 2z = 5 \end{cases}$$

est un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui admet comme solution unique le triplet $(-1; 3; 7)$*. On note :* $S = \{(-1; 3; 7)\}$

4.1.3 Systèmes de m équations linéaires à n inconnues

Définition 4.4
Une **équation linéaire à n inconnues** x_1, x_2, ..., x_n est une condition du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{4.3}$$

où a_1, ..., a_n et b sont des nombres réels. On peut remarquer que tous les x_i sont à la puissance 1, si ce n'était pas le cas, l'équation ne serait pas linéaire.

Un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ est une condition composée de m équations du type (4.3).

Une **solution** d'un tel système est un n-uplets de nombres réels $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ qui vérifie les m équations simultanément.

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & = & 23 \\ -3x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & & & = & 56 \\ & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 65 \end{array}\right.$$

est un système de trois équations linéaires à quatre inconnues.

4.1.4 Systèmes équivalents

Deux systèmes sont **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions. Pour résoudre un système, on va transformer le système original en un système équivalent dont les solutions peuvent être déterminées de manière simple.

Règles d'équivalence

Les règles suivantes permettent de transformer un système d'équations en un système équivalent :

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre réel non nul,
- additionner un multiple d'une équation à une autre équation.

4.2 Méthodes de résolution

Dans cette partie, nous allons décrire quatre méthodes de résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. On précisera à chaque fois si l'idée de la méthode peut s'appliquer à d'autre types de systèmes.

On cherchera donc à résoudre le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \tag{4.4}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels.

4.2.1 Graphiquement

Note : cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de 2 équations à 2 inconnues.

Idée : La solution du système est l'intersection des ensembles de solutions de chaque équation. Comme l'ensemble des solutions de chaque équation correspond à une droite, la solution du système correspond au point d'intersection de ces deux droites.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

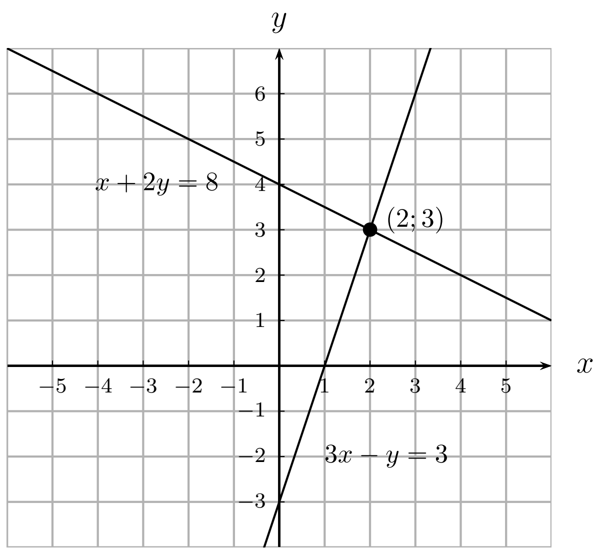
1) déterminer deux couples de solutions de la première équation et deux couples de solutions de la seconde équation,
2) reporter dans un système d'axes (orthonormés) les points correspondant à ces solutions,
3) tracer les deux droites passant par ces points représentant respectivement les solutions de la première et de la seconde équation,
4) lire sur la représentation graphique les coordonnées du ou des (infinité) points d'intersection $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Exemple

Résoudre graphiquement le système : $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 3 \\ x & + & 2y & = & 8 \end{array} \right.$

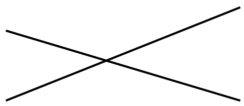
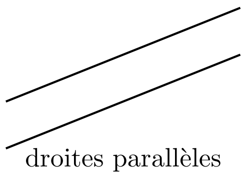
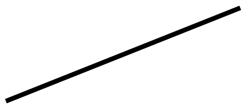
– 2 *couples solutions de* $3x - y = 3$ *:* $(0; -3)$ *et* $(1, 0)$.
– 2 *couples solutions de* $x + 2y = 8$ *:* $(0; 4)$ *et* $(8, 0)$.

Résolution graphique :



Ensemble de solutions : $S = \{(2; 3)\}$

Comme le graphique de toute équation linéaire $ax + by = c$ est une droite, tout système de deux équations de ce type correspond à *exactement un* des trois cas énumérés dans le tableau ci-dessous.

Graphique	**Nombre de solutions**	**Coefficients des équations**	**Classification**
 droites sécantes	**UNE** seule solution	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	système déterminé
 droites parallèles	**AUCUNE** solution	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	système impossible
 droites confondues	**IINFINITE** de solutions (mais $S \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	système indéterminé

Remarques

1. On note $S = \emptyset$ lorsqu'un système n'admet pas de solution. Par exemple, le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

n'a pas de solution, car les deux équations sont contradictoires (droites parallèles).

2. Avoir une infinité de couples solutions, ne signifie pas que tous les couples de nombres réels sont solutions. Par exemple, le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array} \right. \tag{4.5}$$

a une infinité de solutions (droites confondues). Pour exprimer l'ensemble des solutions, on peut **choisir** la valeur d'une variable arbitrairement, et la valeur de la seconde variable sera déterminée d'après la valeur de la première. On peut choisir ici :

$$x = \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et y est alors déterminée par :

$$y = 1 - \lambda$$

λ n'est pas une inconnue, mais un **paramètre**, c'est-à-dire une valeur que l'on peut choisir arbitrairement.

On note l'ensemble de solutions ainsi : $S = \{(\lambda, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4.2.2 Par substitution

Note : cette méthode peut s'appliquer à l'ensemble des systèmes d'équations.

Idée : isoler une des inconnues dans une des équations puis remplacer cette inconnue par la valeur trouvée dans les autres équations.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

1) expliciter (isoler) y dans la première équation $\longrightarrow$ y est exprimé en fonction de x,
2) remplacer (=*substituer*) y, dans la seconde équation, par son expression en fonction de x trouvé en 1 $\longrightarrow$ on obtient *une* équation à *une* inconnue, x,
3) résoudre l'équation obtenue en 2 $\longrightarrow$ valeur(s) pour x,
4) substituer la (ou les) valeur(s) de x trouvée(s) en 3 dans l'équation de l'étape 1 pour trouver les valeurs correspondantes de y $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Remarques

1. A l'étape 1, on peut choisir d'isoler x au lieu d'y. On modifie alors la procédure pour être cohérent avec ce choix.
2. A l'étape 1, on peut choisir la seconde équation au lieu de la première.
3. Il n'y pas de règle pour savoir quelle équation et quelle inconnue choisir à l'étape 1. On effectuera cependant le choix qui "demandera" le moins de calculs et d'efforts.

Exemple

Résoudre par substitution le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 5 \\ 3x & + & 6y & = & -12 \end{array}\right.$

On exprime y en fonction de x dans la première équation. On écrira souvent ceci de la manière suivante.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & y & = & 5 & \longrightarrow \quad y = 5 - 4x \quad (1) \\ 3x & + & 6y & = & -12 & \qquad\quad \hookleftarrow \end{array}\right.$$

On remplace alors y par $5-4x$ dans la deuxième équation. On obtient l'équation à une inconnue $3x + 6\underbrace{(5-4x)}_{=y} = -12$, qu'on résout :

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 6(5-4x) & = & -12 & \textit{CL (réduire les deux polynômes)} \\ -21x + 30 & = & -12 & -30 \\ -21x & = & -42 & \div(-21) \\ x & = & 2 & \end{array}$$

On remplace ensuite x par 2 dans (1) : $y = 5 - 4 \cdot 2 = -3$.

Pour vérifier la solution obtenue, on remplace x par 2 et y par -3 dans chaque équation du système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 4\cdot 2 & + & (-3) & \stackrel{?}{=} & 5 & \textit{O.K.} \\ 3\cdot 2 & + & 6\cdot(-3) & \stackrel{?}{=} & -12 & \textit{O.K.} \end{array}\right.$$

Ensemble de solutions : $S = \{(2;-3)\}$.

4.2.3 Par combinaisons linéaires

Note : cette méthode peut s'appliquer à l'ensemble des systèmes d'équations linéaires.

Idée : on somme un multiple de la première équation avec un multiple de la seconde de façon à obtenir une nouvelle équation où au moins une inconnue a été éliminée.

Principe de résolution

Marche à suivre pour résoudre le système (4.4) :

1) choisir x comme inconnue à éliminer,
2) multiplier chaque équation par un facteur "convenablement choisi" de manière à ce que x soit multiplié, dans chacune des équations, par des nombres *opposés*,
3) additionner les deux équations (=*combinaison linéaire*) $\longrightarrow$ on obtient une équation à une inconnue y,
4) résoudre l'équation obtenue en 3 $\longrightarrow$ valeur(s) pour y,
5) recommencer en 1 en choisissant y comme inconnue à éliminer $\longrightarrow$ solution(s) du système.

Exemple

Résoudre par combinaisons linéaires le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 27 \\ 5x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 27 \\ 5x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-2) \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array}$$

Multiplication des membres de la 1ère équation par 5 et ceux de la 2ème par (-2)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 10x & + & 15y & = & 135 & \\ -10x & + & 4y & = & -2 & \oplus \end{array}\right.$$

Addition membre à membre des deux équations

$$19y = 133$$

Résolution de l'équation à une inconnue y $(\div 19)$

$$y = 7$$

Multiplication des membres de la 1ère équation par 2 et ceux de la 2ème par 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 6y & = & 54 & \\ 15x & - & 6y & = & 3 & \oplus \end{array}\right.$$

Addition membre à membre des deux équations

$$19x = 57$$

Résolution de l'équation à une inconnue x $(\div 19)$

$$x = 3$$

Pour vérifier la solution obtenue, on remplace x par 3 et y par 7 dans chaque équation du système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2\cdot 3 & + & 3\cdot 7 & \stackrel{?}{=} & 27 & \textit{O.K.} \\ 5\cdot 3 & - & 2\cdot 7 & \stackrel{?}{=} & 1 & \textit{O.K.} \end{array}\right.$$

Ensemble de solutions : $S = \{(3;7)\}$.

Remarques

1. On combinera parfois les méthodes de résolution par substitution et par combinaison linéaire.
2. Dans un système d'équations, on dit qu'une équation est **indépendante** si elle ne peut pas être obtenue en combinant d'autre équations du système.

   Dans un système d'équations,
   – il n'y a pas de solution quand il y a plus d'équations indépendantes que d'inconnues,
   – il y a une infinité de solutions quand il y a plus d'inconnues que d'équations indépendantes.
3. Soient n_i le nombre d'inconnues et n_e le nombre d'équations indépendantes d'un système. Le nombre $n = n_i - n_e$ est appelé **nombre de degrés de liberté**.

   Le nombre de degrés de liberté nous indique le nombre d'inconnues dont on pourra choisir la valeur. Par exemple, pour le système (4.5), on a $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté (on a donc pu choisir la valeur de l'inconnue x).

4.2.4 Par les formules de Cramer

Note : cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues et aux systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues.

Idée : on applique des formules qui donnent directement les solutions.

Théorème 4.1
Soit le système d'équations linéaires : $\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right.$

On appelle $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ le déterminant principal de ce système.
– Si $D \neq 0$, ce système admet pour solution unique le couple $(x; y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad \textbf{Formules de Cramer} \tag{4.6}$$

– Si $D = 0$, ce système peut ne pas avoir de solution ou une infinité de solutions.

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'isoler y dans l'équation $a_1x + b_1y = c_1$, puis de le substituer dans l'équation suivante. En isolant x, on trouve la première égalité du théorème ; on agit de manière analogue pour trouver la seconde formule.

Exemples

1) *Résoudre le système :* $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & -6 \\ 2x & + & 2y & = & 7 \end{array}\right.$.

Le déterminant principal du système est :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 10$$

Ce système admet donc une solution unique déterminée à l'aide des formules de Cramer :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(-6)\cdot 2 - 7\cdot(-1)}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4\cdot 7 - 2\cdot(-6)}{10} = \frac{40}{10} = 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions : $S = \{(-\frac{1}{2}; 4)\}$.

2) *Résoudre et discuter le système :*

$$\begin{cases} m^2x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{cases}$$

dans lequel m *est un paramètre réel.*

Le déterminant principal du système est :

$$D = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Il s'annule pour $m = 1$ *ou* $m = -1$.

a) ***Si*** $D \neq 0$, *c'est-à-dire si* $m \neq 1$ *et* $m \neq -1$, *le système admet une solution unique :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{-2}{m+1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ 1 & 2m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{2(m^2+m+1)}{m+1}$$

Ensemble des solutions : $S = \{(\frac{-2}{m+1}; \frac{2(m^2+m+1)}{m+1}) \mid m \in \mathbb{R}, m \neq 1, -1\}$.

b) ***Si*** $m = 1$, *le système est :* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Il admet une infinité de solutions de la forme $(\lambda; 2-\lambda)$. *Ensemble des solutions :* $S = \{(\lambda; 2-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *l'ensemble de ces solutions forme une droite.*

c) ***Si*** $m = -1$, *le système est :* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Il n'admet aucune solution. Ensemble des solutions : $S = \emptyset$.

Théorème 4.2

Soit le système $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$.

On appelle $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ le déterminant principal de ce système.

– **Si** $D \neq 0$, ce système admet pour solution unique le triplet $(x; y; z)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D} \tag{4.7}$$

Formules de Cramer

– **Si** $D = 0$, ce système peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 2 \\ & - & 4y & + & z & = & 0 \\ 4x & & & + & z & = & 6 \end{array} \right.$

Le déterminant principal du système est

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 0 - 0 - 0 - 0 = -4$$

Ce système admet donc une solution unique déterminée à l'aide des formules de Cramer :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8 + 6 + 0 - 0 - 0 - 0}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 8 + 0 - 0 - 12 - 0}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-48 + 0 + 0 - (-32) - 0 - 0}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions : $S = \{(\frac{1}{2}; 1; 4)\}$.

4.3 Systèmes linéaires homogènes

Définition 4.5
Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & 0 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & 0 \end{array} \right.$$

sont appelés **systèmes linéaires homogènes** à deux, respectivement trois inconnues.

Le couple $(0; 0)$ (respectivement le triplet $(0; 0; 0)$) est solution de tout système homogène d'ordre deux (respectivement d'ordre trois). C'est l'unique solution d'un tel système si et seulement si le déterminant principal est non nul.

4.4 Exercices

1) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 6y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} = 18 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 21 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{15} = 4 \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{10} = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 14 \\ -\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = 16 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 9x - 5y = 38 \\ 24x - 25y = 148 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{3} = 8 \\ \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

2) Résoudre et discuter les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + m(m-1)y = 2m^2 \\ x - (m^2-1)y = m(1-m) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2mx - (m+2)y = 3m \\ 2(m-1)x - my = 3(m-1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = m \\ mx + (m+1)y = (m-1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} (m+1)^2x + (m^2-1)y = m+1 \\ (m-1)^2x + (m^2-1)y = (m-1)^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m-3)x + my = 5 \\ mx + (m-4)y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y = 5m+1 \\ (m+1)x + (m+4)y = -8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y + 5m + 10 = 0 \\ (m+5)x + (3m+9)y - 10 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = (m+1)(m-1)^2 \\ (m-1)x + (m+1)y = (m-1)(m+1)^2 \end{cases}$

3) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + 8y + 3z = -31 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - 6z = 9 \\ x - y + 4z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 4x + y - 4z = -6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 5y - 3z = 3 \\ 5x + 12y - 8z = 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + z = -1 \\ 3x + 6y + 5z = 2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 6x - 2y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 4x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$

4) Résoudre et discuter les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m - 2 \\ x + y + mz = 2 - m \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$

5) Résoudre les systèmes homogènes suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 11x - 4y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 8y + 4z = 0 \\ 5x + 10y + 5z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 21z = 0 \end{cases}$

6) Résoudre et discuter les systèmes homogènes suivants :

a) $\begin{cases} (m^2 + 1)x - (m + 1)y = 0 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m - 5)x + (2m + 1)y = 0 \\ (3m + 5)x + (m - 7)y = 0 \end{cases}$

4.5 Solutions des exercices

Remarque : on indique ci-dessous uniquement l'ensembles des solutions des différentes équations sous la forme $\{\ldots\}$ sans la mention du $S = \ldots$.

1) a) $\{(-\frac{1}{2}; 4)\}$ b) $\{(3; \frac{3}{2})\}$ c) $\emptyset$
d) $\{(60; 36)\}$ e) $\{(12; 0)\}$ f) $\{(14,4; 36,8)\}$
g) $\{(\lambda; \frac{2-\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ h) $\{(2; -4)\}$ i) $\{(24; 0)\}$

2) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

a) Si $m \neq 1$ et $m \neq -\dfrac{1}{2}$: $\left\{(\frac{m^2(m+3)}{2m+1}; \frac{m(3m-1)}{(m-1)(2m+1)})\right\}$,
Si $m = 1$ ou $m = -\frac{1}{2}$: $\emptyset$.

b) Si $m \neq 2$: $\left\{(\frac{3}{2}; 0)\right\}$,
Si $m = 2$: $\left\{(\lambda; \frac{2\lambda-3}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Si $m \neq -\frac{1}{3}$: $\left\{(\frac{3m-1}{3m+1}; \frac{-1}{3m+1})\right\}$,
Si $m = -\frac{1}{3}$: $\emptyset$.

d) Si $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$: $\left\{(\frac{3-m}{4}; \frac{m-1}{4})\right\}$
Si $m = -1$: $\{(1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
Si $m = 0$: $\{(\lambda; \lambda - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
Si $m = 1$: $\left\{(\frac{1}{2}; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

e) Si $m \neq \frac{12}{7}$: $\left\{(\frac{3m-20}{12-7m}; \frac{3m+6}{7m-12})\right\}$,
Si $m = \frac{12}{7}$: $\emptyset$.

f) Si $m \neq -\frac{3}{2}$: $\left\{(\frac{5m^2+29m-4}{6m+9}; \frac{-5m^2-14m-17}{6m+9})\right\}$,
Si $m = -\frac{3}{2}$: $\emptyset$.

g) Si $m = -\frac{1}{2}$ et $m \neq -1$: $\left\{(\frac{-5(3m+4)}{2m+1}; \frac{5(m+8)}{2m+1})\right\}$,
Si $m = -\frac{1}{2}$: $\emptyset$,
Si $m = -1$: $\left\{(\lambda; \frac{5-2\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

h) Si $m \neq 0$: $\{(0; m^2 - 1)\}$,
Si $m = 0$: $\{(\lambda; \lambda - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) a) $\{(-2; -5; 2)\}$ b) $\{(-5; -4; 2)\}$
c) $\{(0,5; 1; 4)\}$ d) $\{(\lambda; 1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(9; 4; 1)\}$ f) $\{(8; 7; 1)\}$
g) $\left\{(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})\right\}$ h) $\left\{(\frac{4\lambda+9}{13}; \frac{7\lambda+6}{13}; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
i) $\{(-1 - 2\lambda; \lambda; 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ j) $\emptyset$
k) $\{(\lambda; \mu; -\lambda - \mu + 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ l) $\emptyset$

4) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

   a) Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$: $\{(m; 2; -2)\}$
   Si $m = 1$: $\{(\lambda; \mu; 1 - \lambda - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   Si $m = -2$: $\{(\lambda; 4 + \lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

   b) Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq -1$: $\left\{(\frac{1}{m}; \frac{1}{m}; \frac{1}{m})\right\}$
   Si $m = 0$: $\emptyset$,
   Si $m = 1$: $\{(\lambda; 1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$,
   Si $m = -1$: $\{(\lambda; \lambda; -1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5) a) $\{(0; 0; 0)\}$
   b) $\left\{(\frac{\lambda}{3}; \frac{2\lambda}{3}; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
   c) $\{(-2\lambda - \mu; \lambda; \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   d) $\{(2\lambda; 3\lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

6) Pour tout l'exercice : $m \in \mathbb{R}$.

   a) Si $m \neq 2$ et $m \neq -\frac{1}{3}$: $\{(0; 0)\}$,
   Si $m = 2$: $\left\{(\lambda; \frac{5\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$,
   Si $m = -\frac{1}{3}$: $\left\{(\lambda; \frac{5\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

   b) Si $m \neq 1$ et $m \neq -6$: $\{(0; 0)\}$,
   Si $m = 1$: $\left\{(\lambda; \frac{4\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$,
   Si $m = -6$: $\{(\lambda; -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Chapitre 5

Inéquations

5.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons surtout étudié la résolution d'équations du premier degré (comme l'équation $2x + 3 = 11$), du deuxième degré ou de degré supérieur. Le but de ce chapitre est de résoudre des problèmes du type suivant :

Pour quelles valeurs de x l'expression $2x + 3$ est-elle plus grande que 11 ?

Remplaçons x par 3, 4, 5, 6 et regardons si cette comparaison est vérifiée.

x	$\mathbf{2x + 3 > 11}$	**Conclusion**
3	$9 > 11$	Faux
4	$11 > 11$	Faux
5	$13 > 11$	Vrai
6	$15 > 11$	Vrai

Si un nombre b vérifie la relation lorsqu'on le substitue à x, alors b est une **solution de l'inéquation**.

Définition 5.1
Une **inéquation** est une comparaison semblable à une équation, mais où le symbole d'égalité, =, y est remplacé par un symbole d'inégalité : $>$ (plus grand que), $<$ (plus petit que), $\geqslant$ (plus grand ou égal à) ou $\leqslant$ (plus petit ou égal à).

Exemple

Pour l'inéquation $2x + 3 > 11$, on voit que, grâce au tableau ci-dessus, parmi les nombres 3, 4, 5, 6, seuls 5 et 6 sont solutions de l'inéquation.

En procédant encore à quelques essais, il semble que tous les nombres supérieurs à 4 vérifient cette comparaison. Il y a donc une infinité de solutions à cette inéquation.

Comme pour les équations, **résoudre** une inéquation va signifier trouver *toutes* les solutions de l'inéquation.

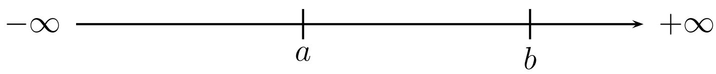
Que faut-il comprendre lorsque qu'on rencontre le signe $\geqslant$, *plus grand ou égal à* ?
– Si la comparaison *plus grand que* est vérifiée, alors l'expression *plus grand ou égal à* l'est aussi.

– Si la comparaison *égal* est vérifiée, alors l'expression *plus grand ou égal à* l'est aussi.
Pour voir la différence entre les symboles $>$ et $\geqslant$, on peut reprendre l'exemple précédent en le modifiant quelque peu :

x	$\mathbf{2x+3 \geqslant 11}$	**Conclusion**
3	$9 \geqslant 11$	Faux
4	$11 \geqslant 11$	Vrai
5	$13 \geqslant 11$	Vrai
6	$15 \geqslant 11$	Vrai

Le nombre 4 est maintenant solution de l'inéquation.

Nous avons déjà vu qu'il est possible de représenter les nombres réels sur une droite allant de moins l'infini ($-\infty$) à plus l'infini ($+\infty$).



Sur la droite réelle, le nombre a est à gauche du nombre b si a est plus petit que b. On voit immédiatement que tous les nombres à gauche de b satisfont l'inéquation $x < b$. La solution d'une inéquation n'est donc pas un nombre, mais un **ensemble** de nombres, qu'on nomme **intervalle** (consulter le chapitre sur les ensembles). Ainsi, la solution de l'inéquation $x < b$ est l'ensemble $S =]-\infty; b[$.

5.2 Quelques propriétés

Comme nous le verrons, les méthodes pour résoudre les inéquations sont semblables à celles utilisées pour résoudre les équations. Les propriétés que nous allons voir sont valables pour tous les types d'inéquations.

Pour énoncer ces propriétés, nous considérerons deux nombres réels a et b ($a, b \in \mathbb{R}$) tel que $a < b$. Des propriétés équivalentes peuvent être données pour $a > b$, $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.

5.2.1 Propriété d'addition

Pour tous les nombres réels a, b et c, avec $a < b$, on a :

$$\boxed{a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c \;\text{ et }\; a - c < b - c}$$

Exemple

On considère les trois nombres 2, 3 *et* 7. *Comme* $2 < 7$, *on a alors que :*

- $2 + 3 < 7 + 3$ *ou* $5 < 10$,
- $2 - 3 < 7 - 3$ *ou* $-1 < 4$.

Cette propriété va nous permettre de passer un terme d'un membre de l'inéquation à l'autre en l'additionnant (ou en le soustrayant) des deux côtés.

On peut ainsi transformer l'inéquation $x + 2 < 0$ en une inéquation équivalente :

$$\begin{array}{rcl|l} x+2 & < & 0 & -2 \text{ \textit{(Soustraire 2 aux deux membres)}} \\ x+2-2 & < & -2 & \text{\textit{Calcul littéral}} \\ x & < & -2 & \text{\textit{Inéquation équivalente}} \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x+2<0$ est donc $S =]-\infty; -2[$.

5.2.2 Propriété de multiplication

Pour tous les nombres réels a, b et c, avec $a<b$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} a<b \text{ et } c>0 \implies a\cdot c<b\cdot c \text{ et } \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \\ a<b \text{ et } c<0 \implies a\cdot c>b\cdot c \text{ et } \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{array}}$$

Exemples

1. *On considère les trois nombres* 2, 5 *et* 7. *Comme* $2<7$, *on a alors que :*
   - $2\cdot 5<7\cdot 5$ *ou* $10<35$,
   - $\dfrac{2}{5}<\dfrac{7}{5}$ *ou* $0,4<1,4$.
2. *On considère les trois nombres* -5, 2 *et* 7. *Comme* $2<7$, *on a alors que :*
   - $2\cdot(-5)>7\cdot(-5)$ *ou* $-10>-35$,
   - $\dfrac{2}{-5}<\dfrac{7}{-5}$ *ou* $-0,4>-1,4$.

Remarque

La dernière propriété est source de beaucoup d'erreurs. Il faut y faire très attention. Si on multiplie (ou divise) une inéquation par un nombre négatif, il faut changer le signe de l'inégalité, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lcl} < & \text{devient} & >, \\ > & \text{devient} & <, \\ \leqslant & \text{devient} & \geqslant, \\ \geqslant & \text{devient} & \leqslant. \end{array}$$

Cette propriété n'a rien de comparable pour les équations.

5.2.3 Propriété d'inversion

Pour tous nombres réels a et b de même signe (donc $a\cdot b>0$), avec $a<b$, on a :

$$\boxed{a<b \text{ et } a\cdot b>0 \implies \frac{1}{a}>\frac{1}{b}}$$

Exemples

1. *On considère les deux nombres* 2 *et* 5*. Comme* $2 < 5$*, on a alors que :*
   - $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ *ou* $0.5 > 0.2$.
2. *On considère les deux nombres* -2 *et* -5*. Comme* $-5 < -2$*, on a alors que :*
   - $\frac{1}{-5} > \frac{1}{-2}$ *ou* $-0.2 > -0.5$.

5.3 Inéquation du premier degré

Définition 5.2
Une **inéquation du premier degré** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$a \cdot x + b > 0$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $2x + 3 > 0$ *est une inéquation du premier degré.*

Dans la suite de ce cours, nous allons travailler sur des exemples pour donner les idées générales de résolution de différents types d'inéquations.

5.3.1 Résolution algébrique

La résolution algébrique d'une inéquation du premier degré est analogue à celle d'une équation du premier degré, cependant il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif.

Exemple 1

A résoudre : $-3x + 4 < 11$.

On peut procéder de la manière suivante en s'inspirant de ce qu'on fait avec une équation du premier degré et en respectant les propriétés énoncées au paragraphe précédant. Le but est d'isoler x d'un côté de l'inéquation.

$$\begin{array}{rcl|l}
-3x+4 & < & 11 & -4 \text{ (Soustraire 4 aux deux membres)} \\
(-3x+4)-4 & < & 11-4 & \text{Réduire} \\
-3x & < & 7 & \div(-3) \text{ (Diviser par } -3\text{, changer le sens de l'inégalité)} \\
\frac{-3x}{-3} & > & \frac{7}{-3} & \text{Simplifier} \\
x & > & -\frac{7}{3} & \text{Inéquation équivalente}
\end{array}$$

L'ensemble des solutions de $-3x + 4 < 11$ est $S = \left]-\frac{3}{7}; +\infty\right[$.

Exemple 2

A résoudre : $-6 < 2x - 4 < 2$.

Un nombre réel est solution de cette inéquation si et seulement s'il est solution des deux inéquations :

a) $-6 < 2x - 4$

b) $2x - 4 < 2$

On résout alors chacune de ces deux inéquations séparément. Pour la première :

$$\begin{array}{rcl|l} -6 & < & 2x-4 & +4 \textit{ (Additionner 4 aux deux membres)} \\ -6+4 & < & (2x-4)+4 & \textit{Réduire} \\ -2 & < & 2x & \div 2 \textit{ (Diviser par 2)} \\ -1 & < & x & \textit{Permuter les termes} \\ x & > & -1 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

Pour la seconde :

$$\begin{array}{rcl|l} 2x-4 & < & 2 & +4 \textit{ (Additionner 4 aux deux membres)} \\ 2x & < & 6 & \div 2 \textit{ (Diviser par 2)} \\ x & < & 3 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

Ainsi, x est solution de l'inéquation de départ si et seulement si on a *à la fois*

$$x > -1 \qquad \text{et} \qquad x < 3,$$

c'est-à-dire $-1 < x < 3$. Ainsi, les solutions de l'inéquation sont tous les nombres appartenant à l'intervalle $]-1;3[$.

En fait, cet intervalle correspond à l'intersection des deux intervalles qui représentent la solution de la première et de la seconde équation : $]-1;3[=]-1;+\infty[\bigcap]-\infty;3[$.

5.3.2 Résolution graphique

Pour résoudre une inéquation du type $ax + b > 0$ (ou avec un autre signe d'inégalité), on peut également observer le graphe de la fonction donnée par $f(x) = ax + b$.

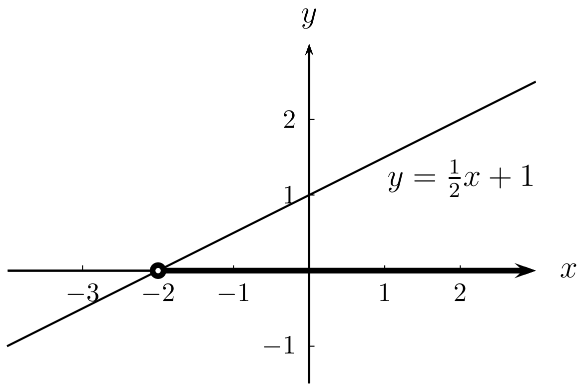
Exemple 3

A résoudre : $\frac{1}{2}x + 1 > 0$.

La fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ coupe l'axe Ox en $x = -2$.

On observant le graphe de f esquissé ci-dessous, on constate que

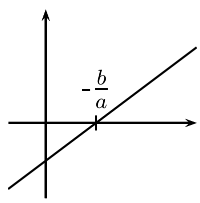
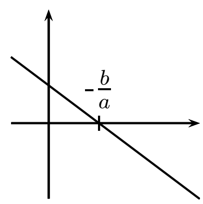
$$\frac{1}{2}x + 1 > 0 \ \text{ si } \ x > -2$$



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-2; +\infty[$.

On peut s'inspirer de l'exemple ci-dessus pour construire un tableau qui résume la résolution graphique des inéquations qui peuvent se ramener à la forme :

$$ax + b > 0 \quad \text{ou} \quad ax + b < 0 \quad (a \neq 0)$$

	$a > 0$			$a < 0$		
Graphe de $f(x) = ax + b$						
Valeur de x		$-\dfrac{b}{a}$			$-\dfrac{b}{a}$	
Signe de $ax + b$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
Solutions de $ax + b > 0$	$\left]-\dfrac{b}{a}; +\infty\right[$			$\left]-\infty; -\dfrac{b}{a}\right[$		
Solutions de $ax + b < 0$	$\left]-\infty; -\dfrac{b}{a}\right[$			$\left]-\dfrac{b}{a}; +\infty\right[$		

Un tableau similaire pourrait être construit pour les inéquations pouvant se ramener à la forme $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b \leqslant 0$ ($a \neq 0$). En fait, il suffit de modifier la forme des intervalles et d'inclure à chaque fois la borne $-\frac{b}{a}$.

5.4 Inéquations de degrés égal ou supérieur à 2

Définition 5.3
Une **inéquation du deuxième degré** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Une **inéquation polynomiale de degré supérieur à 2** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$p(x) > 0$$

où $p(x)$ est un polynôme de degré supérieur à 2 et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $3x^2 + 4 > 0$ *est une inéquation du deuxième degré et l'inéquation* $3x^3 - 2x^2 + x \leqslant 0$ *est une inéquation polynomiale de degré 3.*

5.4.1 Résolution algébrique

La résolution algébrique d'une inéquation du deuxième degré du type $ax^2 + bx + c > 0$ ou de degré supérieur du type $p(x) > 0$ utilise fortement la résolution de l'équation du deuxième degré correspondante $ax^2 + bx + c = 0$ ou, respectivement, de l'équation correspondante $p(x) = 0$. Nous allons à nouveau prendre un exemple pour comprendre comment cela fonctionne.

Exemple 4

A résoudre : $2x^2 - 6x + 4 < 0$.

1) On commence par **résoudre** l'équation correspondante : $2x^2 - 6x + 4 = 0$.

   Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4$ et les deux solutions sont alors données par la formule : $x_{1,2} = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2}$. Après calcul, on trouve que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

2) On peut **factoriser** notre polynôme du deuxième degré et écrire que $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$.

   Au niveau de l'inéquation, on utilise cette factorisation pour passer à une nouvelle inéquation équivalente à la première.

$$\begin{array}{rcl|l} 2x^2 - 6x + 4 & < & 0 & \textit{Factoriser} \\ 2(x-1)(x-2) & < & 0 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

3) On doit maintenant étudier le signe de $2(x-1)(x-2)$ suivant les valeurs de x, afin de déterminer celles qui le rendent positif. Pour déterminer le signe de ce produit, on étudie le signe de chacun de ses facteurs :

   a) Pour 2, on a que $2 > 0$.

   b) Pour $x - 1$, on a trois solutions possibles :
      - $x - 1 > 0$, si $x > 1$,
      - $x - 1 = 0$, si $x = 1$,
      - $x - 1 < 0$, si $x < 1$.

   c) Pour $x - 2$, on a trois solutions possibles :
      - $x - 2 > 0$, si $x > 2$,
      - $x - 2 = 0$, si $x = 2$,

- $x - 2 < 0$, si $x < 2$.

Pour $2(x-1)(x-2)$, on construit un **tableau de signes** :

x		1		2	
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ce tableau de signes a été construit de la manière suivante :

1) Sur la première ligne, on représente les valeurs possibles de x (en fait la droite réelle). On construit une colonne pour chacune des racines et une colonne pour chacun des intervalles compris entre deux racines ou entre l'infini et une racine (première et dernière colonne).

   Important ! Dans la première ligne du tableau, les racines sont classées par ordre croissant.

2) On construit ensuite une ligne pour chacun des facteurs qu'on a déterminés et on étudie le signe de ces derniers. Pour chacune des colonnes construites (pour chaque racine et chaque intervalle), on détermine si le facteur est positif (+), nul (0) ou négatif ($-$) sur ceux-ci.

3) Sur la dernière ligne, on étudie le signe de l'expression de départ : $2(x-1)(x-2)$. Pour cela, on résume chacune des colonnes en utilisant la règle des signes ($+\cdot+=+$, $+\cdot-=-$,... *voir page 12*).

4) On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation proposée a comme solution tous les x tels que $1 < x < 2$. L'ensemble des solutions est donc $S =]1;2[$.

Méthode générale de résolution

Si l'inéquation ne se ramène pas après simplification à une inéquation du premier degré, on suit la démarche suivante :

1. On **regroupe** tous les termes dans le membre de gauche pour que celui de droite soit égal à zéro.
2. On **factorise** (si possible) le membre de gauche en le mettant sous la forme d'un produit (ou d'un quotient).
3. On **étudie le signe** de chacun des facteurs dans un **tableau de signes** (voir les exemples).
4. On **conclut** en observant la dernière ligne du tableau.

Exemple 5

A résoudre : $x^3 \geqslant 4x^2 + x - 4$

Pour résoudre cette inéquation, on suit la démarche proposée ci-dessus.

$$\begin{array}{rcl|l} x^3 & \geqslant & 4x^2+x-4 & -4x^2-x+4 \text{ (Membre de droite = 0)} \\ x^3-4x^2-x+4 & \geqslant & 0 & \textit{Factoriser} \\ (x+1)(x-1)(x-4) & \geqslant & 0 & \textit{Inéquation équivalente} \end{array}$$

On voit immédiatement que les facteurs s'annulent en -1, 1 et 4. On construit le tableau de signes :

x		-1		1		4	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-1)(x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est donné par : $S = [-1;1] \bigcup [4;+\infty[$.

5.4.2 Résolution graphique

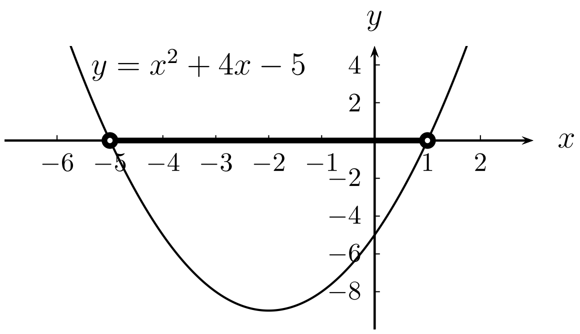
Pour résoudre une équation polynomiale du type $p(x) > 0$ (ou un autre signe d'inégalité) de manière graphique, on résout également l'équation $p(x) = 0$, puis, au lieu de construire la tableau de signes, on observe le graphe de la fonction donnée par $f(x) = p(x)$ afin de déterminer les solutions de l'inéquation.

Exemple 6

A résoudre : $x^2 + 4x - 5 < 0$.

1) On recherche les solutions de l'équation correspondante : $x^2 + 4x - 5 = 0$. On trouve $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$.
2) On réalise une esquisse du graphe de la fonction donnée par $f(x) = x^2 + 4x - 5$ (cas où $a > 0$). Celle-ci est donnée ci-dessous. On l'observant, on constate que :

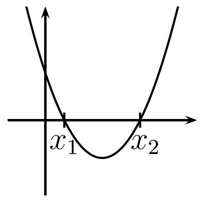
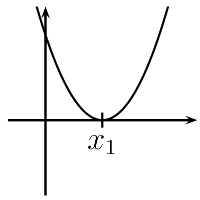
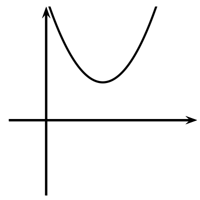
$$x^2 + 4x - 5 < 0 \quad \text{si} \quad -5 < x < 1$$



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-5;1[$.

On peut s'inspirer de l'exemple ci-dessus pour construire un tableau qui résume la résolution graphique des inéquations qui peuvent se ramener à la forme :

$$ax^2 + bx + c > 0 \ \text{ ou } \ ax^2 + bx + c < 0 \quad (\text{avec } a > 0)$$

<table>
<tr><td></td><td colspan="9">$a > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">$\Delta > 0$</td><td colspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>Graphe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$</td><td colspan="5"></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>Valeur de
x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td></td><td>x_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de
$ax^2 + bx + c$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c > 0$</td><td colspan="5">$]-\infty; x_1[\bigcup]x_2; +\infty[$</td><td colspan="3">$\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c < 0$</td><td colspan="5">$]x_1; x_2[$</td><td colspan="4">pas de solution ($S = \emptyset$)</td></tr>
</table>

Un tableau similaire pourrait être construit pour les inéquations pouvant se ramener à la forme $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ ($a > 0$). De même, on pourrait construire ce tableau pour $a < 0$ (laissé au lecteur).

5.5 Inéquations rationnelles

Définition 5.4
Une **inéquation rationnelle** est une inéquation qui peut être ramenée à la forme générale

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0$$

où $p(x)$, $q(x)$ sont des polynômes et le symbole $>$ peut être remplacé par un des symboles $<$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

Exemple

L'inéquation $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2} \leqslant 0$ *est une inéquation rationnelle.*

Exemple 7

A résoudre : $\dfrac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leqslant 0.$

L'expression est déjà factorisée, on peut donc directement établir le tableau de signes.

x		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

La solution de notre problème est donc l'ensemble $S = [-2; -1[\bigcup[3; +\infty[$.

Remarques

1. Le quotient n'est pas défini en $x = 1$ (on a $\frac{1}{0}$). $x = 1$ ne peut donc pas être une solution ! Dans le tableau, lorsque le quotient n'est pas défini, on achure les points ou les intervalles où ceci a lieu (dans la dernière ligne).
2. Le terme $(x^2 + 1)$ est toujours positif, il n'a donc pas d'effet sur le signe du quotient. On pourrait ainsi omettre la ligne correspondante dans le tableau.

Exemple 8

A résoudre : $\dfrac{x+1}{x+3} \leqslant 2$.

Attention ! Une erreur fréquente est de multiplier par $x + 3$. Or, on n'a pas le droit de multiplier l'inégalité par le dénominateur de la fraction s'il contient une variable. En effet, comme la valeur de x est inconnue, on ne sait pas si c'est un nombre positif ou négatif ! On ne sait donc pas si le sens de l'inéquation changera après multiplication. **On ne peut multiplier (ou diviser) les deux côtés d'une inégalité que par des valeurs connues** (des constantes). La résolution correcte est la suivante.

$$\begin{array}{rcl|l}
\dfrac{x+1}{x+3} & \leqslant & 2 & -2 \textit{ (Membre de droite = 0)} \\
\dfrac{x+1}{x+3} - 2 & \leqslant & 0 & \textit{Mettre au même dénominateur} \\
\dfrac{x+1-2(x+3)}{x+3} & \leqslant & 0 & \textit{Réduire} \\
\dfrac{-x-5}{x+3} & \leqslant & 0 & \cdot(-1) \textit{ (Multiplier par } -1\textit{)} \\
\dfrac{x+5}{x+3} & \geqslant & 0 & \textit{Inéquation équivalente}
\end{array}$$

x		-5		-3	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+5}{x+3}$	$+$	0	$-$		$+$

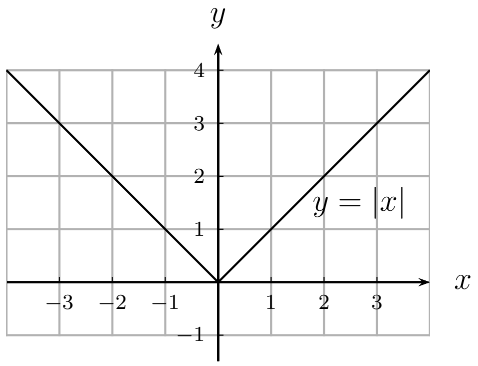
L'ensemble des solutions est donné par $S =]-\infty; -5] \cup]-3; +\infty[$.

Le nombre -5 est inclus puisque le quotient s'annule en -5. Le quotient n'est pas défini en -3 ; ce nombre n'appartient donc pas à l'ensemble des solutions.

5.6 Fonction valeur absolue et fonctions définies par morceaux

Le graphe de la fonction **valeur absolue** donnée par $f(x) = |x|$ est représenté ci-dessous. Cette fonction permet, en langage familier, "d'ôter" le signe d'un nombre, et de le rendre positif.

On constate que ce graphe est formé de deux demi-droites, la demi-droite d'équation $y = -x$ pour les x négatifs et la demi-droite d'équation $y = x$ pour les x positifs.



On peut donner une expression de cette même fonction sans utiliser le symbole *valeur absolue*, $|\ .\ |$, en séparant, dans la définition de f, les x positifs des x négatifs.

Définition 5.5
La fonction **valeur absolue** est définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Exemples

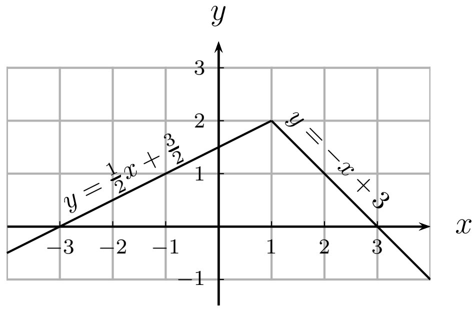
1) $|5| = 5$ *puisque* $5 > 0$.

2) $|-5| = -(-5) = 5$ *puisque* $-5 < 0$

Une fonction donnée de cette façon est dite **définie par morceaux** ou définie par intervalles. On donne ci-dessous 3 exemples de telles fonctions.

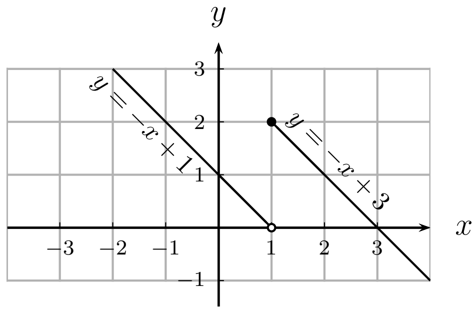
Exemples

1.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

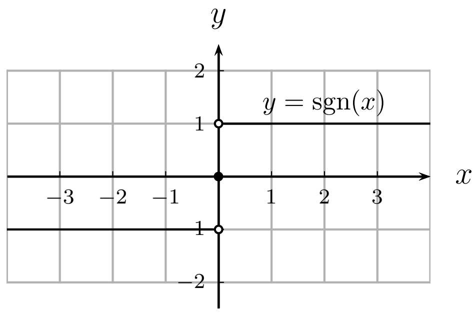
2.



$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction présente un ***saut*** *en* $x = 1$.

3.



La fonction ***signe*** *donnée par* $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ *prend la valeur* 1 *si* x *est positif, la valeur* -1 *si* x *est négatif et la valeur* 0 *si* x *est nul. Elle est définie par morceaux et peut être donnée par l'expression :*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut également utiliser le symbole valeur absolue pour poser une inéquation.

Exemple 9

A résoudre : $|x| < 3$.

Essayons de comprendre ce que veut dire $|x| < 3$.
Si $x > 0$, cela signifie que $x < 3$. Si $x < 0$, cela veut dire que $-x < 3$, donc $x > -3$ (on multiplie par un nombre négatif, le signe de l'inéquation change). On en déduit :

$$|x| < 3 \text{ est équivalent à } -3 < x < 3.$$

De même, pour $|x| > 3$ on a :

$$|x| > 3 \text{ est équivalent à } x < -3 \textbf{ ou } x > 3.$$

On peut généraliser ce qui précède et on obtient, si a et b sont des nombres réels, :

1) $|a| < b$ est équivalent à $-b < a < b$,
2) $|a| > b$ est équivalent à $a < -b$ ou $a > b$.

Chapitre 6

Nombres complexes

6.1 Introduction

Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons décrit les ensembles de nombres suivants :

1. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$, l'ensemble des nombres naturels ;
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$, l'ensemble des nombres entiers ;
3. $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$, l'ensemble des nombres rationnels ;
4. $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Nous avons alors remarqué que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Historiquement, ces ensembles de nombres ont été définis successivement.

Les nombres naturels ont été les premiers à être utilisés. En effet, c'est cet ensemble de nombres qui est utilisé la plupart du temps pour compter. Historiquement, le zéro n'est pas apparu en même temps que les autres nombres. On le rencontre pour la première fois en Inde.

Dans $\mathbb{N}$, l'opposé d'un nombre n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Z}$, cette équation admet une solution : -1. $\mathbb{Z}$ est une extension de $\mathbb{N}$.

Dans $\mathbb{Z}$, l'inverse d'un nombre différent de 1 n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Q}$, une solution existe : $\frac{1}{2}$. $\mathbb{Q}$ est une extension de $\mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré 2 ou, de manière équivalente, la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas mesurable ou l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution. Par contre dans $\mathbb{R}$, cette équation admet 2 solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré -1 ou, de manière équivalente, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

Plus généralement, l'équation $x^2 + a = 0$, avec a un nombre réel positif ($a \in \mathbb{R}_+^*$), n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car il n'existe pas de nombre réel ayant un carré négatif : $x^2 = -a$.

Si on "résolvait" tout de même cette équation, on trouverait :

$$x = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a \cdot (-1)} = \pm \underbrace{\sqrt{a}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \sqrt{-1}$$

Le problème se ramène à la non-connaissance de $\sqrt{-1}$. Si l'on connaissait la valeur de $\sqrt{-1}$, toutes les équations de la forme $x^2 + a = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}$) pourraient alors être résolues. Par contre, la valeur de $\sqrt{-1}$ ne serait évidemment pas un nombre réel.

Ainsi, l'objectif de ce cours est de définir un ensemble de nombres tel que les racines de nombres négatifs soient définies. Nous noterons ce nouvel ensemble $\mathbb{C}$ et nous appellerons ces nouveaux nombres **nombres complexes**. Dans cet ensemble, nous allons introduire un nouveau symbole qui représentera $\sqrt{-1}$:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

On peut montrer que dans $\mathbb{C}$ toute équation polynomiale de degré n admet n solutions (*théorème fondamental de l'algèbre*). De plus, en utilisant cet ensemble, il est possible de déterminer une formule qui permet de résoudre toutes les équations du troisième degré.

6.2 Présentation des nombres complexes sous forme cartésienne

Définition 6.1
On appelle **nombres complexes**, sous forme **cartésienne**, les expressions de la forme

$$\boxed{z = a + bi}$$

où a et b sont des nombres réels et i représente $\sqrt{-1}$.

Le nombre a est appelé **partie réelle** du nombre complexe z, on la note : $a = \mathfrak{Re}(z)$.
Le nombre b est appelé **partie imaginaire** du nombre complexe z, on la note : $b = \mathfrak{Im}(z)$.

Comme on considère que i représente $\sqrt{-1}$, on peut poser que :
- $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
- $i^3 = i^2 i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$
- ...

Ainsi, pour tout nombre naturel n, on a :

$$\boxed{i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i}$$

Remarque

Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ sont égaux se leurs parties réelles et imaginaires sont égales :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

6.2.1 Addition, soustraction, multiplications sous forme cartésienne

Pour additionner ou soustraire deux nombres complexes sous forme cartésienne, pour multiplier un nombre complexe sous forme cartésienne par un scalaire ou pour multiplier deux nombres complexes sous forme cartésienne entre eux, on procède comme s'il s'agissait d'opérations sur les binômes mais en tenant compte que $i^2 = -1$.

- ▷ $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- ▷ $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$
- ▷ $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$
- ▷ $(a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

6.2.2 Division

Pour diviser deux nombres complexes sous forme cartésienne, on amplifie la fraction afin de faire disparaître la partie imaginaire au dénominateur :

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{a+bi}{a'+b'i} \cdot \frac{a'-b'i}{a'-b'i} = \frac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{(a')^2+(b')^2} = \frac{aa'+bb'}{(a')^2+(b')^2} + \frac{a'b-ab'}{(a')^2+(b')^2}i$$

Si le dominateur de la fraction est le nombre complexe $z' = a' + b'i$, on amplifie la fraction par le nombre complexe $\overline{z'} = a' - b'i$.

6.2.3 Nombre complexe conjugué

Définition 6.2
On appelle **nombre complexe conjugué** du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre complexe :

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

Propriétés - nombre complexe conjugué

La notion de nombre complexe conjugué vérifie les propriétés suivantes :

1) La somme de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel :

$$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a \in \mathbb{R}$$

2) Le produit de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel :

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6) $\overline{\overline{z}} = z$
7) $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{\overline{z} - z}{2}i$

Ces propriété sont valables pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6.2.4 Résolution d'équations du deuxième degré

Pour rechercher les racines carrées d'un nombre complexe $z = a+bi$ (il y en a deux !), par exemple pour la résolution d'une équation du deuxième degré, on procède comme suit.

Si on appelle $x + yi$ les racines carrées de z, on peut poser, par définition :

$$(x+yi)^2 = a+bi \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi$$

Comme les parties réelles et imaginaires doivent être égales pour que 2 nombres complexes soient égaux, on peut poser :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{cases}$$

ce qui nous donne un système de deux équations à deux inconnues qu'on résout par substitution en remplaçant y par $\frac{b}{2x}$ dans la première équation. L'équation à résoudre devient

$$x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \qquad \text{ou} \qquad 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

On obtient alors que

$$x^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2+16b^2}}{8} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Comme $a^2 + b^2 > 0$, il y aura deux solutions pour x^2. De plus, comme $a^2 + b^2 > a^2$, une des solutions sera positive, l'autre négative et ne conviendra pas pour x^2. Finalement, on a :

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \qquad \text{et} \qquad y_{1,2} = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

Exemple

Résoudre : $\frac{1}{2}z^2 - 4z + iz + 5 - 10i = 0$
On commence par calculer le discriminant associé à cette équation :

$$\Delta = (-4+i)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5-10i) = 16 - 8i + i^2 - 10 + 20i = 5 + 12i$$

On cherche ensuite les racines carrées $x + yi$ *de* $5 + 12i$*. On peut poser :*

$$(x+yi)^2 = 5+12i \qquad \textit{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2xyi = 5+12i$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 5 \\ 2xy &= 12 \end{cases}$$

En isolant y *dans la deuxième équation et en injectant sa valeur dans la première équation, on doit maintenant résoudre l'équation*

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \qquad \textit{ou} \qquad x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \qquad \textit{ou} \qquad (x^2-9)\cdot(x^2+4) = 0$$

Ainsi $x^2 = 9$ ou $x^2 = -4$ ce qui est impossible. Les deux racines carrées de $5 + 12i$ sont donc

$$x_1 = 3 \;\rightarrow\; y_1 = \frac{6}{3} = 2$$
$$x_2 = -3 \;\rightarrow\; y_2 = \frac{6}{-3} = -2$$

Ainsi, $x + yi = \pm(3 + 2i)$. En utilisant la formule de résolution des équations du deuxième degré, on obtient comme solutions de l'équation de départ

$$z_{1,2} = \frac{-(-4+i) \pm (3+2i)}{1} \qquad \text{ou} \qquad z_1 = 7 + i \text{ et } z_2 = 1 - 3i$$

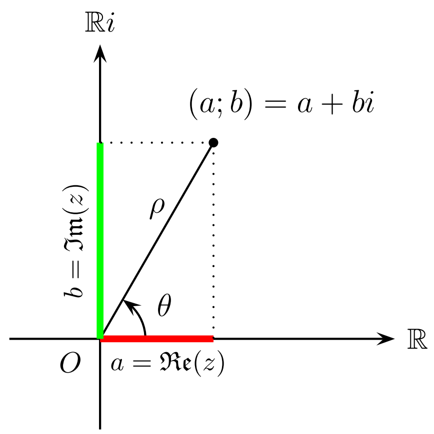
6.3 Présentation des nombres complexes sous forme trigonométriques

6.3.1 Plan de Gauss, module et argument

Dans un plan Oxy (notion définie dans le chapitre "Ensembles"), tout nombre complexe $z = a + bi$ peut être représenté par un point $M(a; b)$ dont l'abscisse est la partie réelle de a et l'ordonnée la partie imaginaire b et, réciproquement, tout point $P(x; y)$ du plan Oxy peut être considéré comme l'image géométrique du nombre complexe $z' = x + yi$.

On introduit ainsi une bijection entre $\mathbb{C}$ et les points du plan.

Définition 6.3
Le plan ainsi défini est appelé **plan complexe** ou **plan de Gauss**.
L'axe des x est appelé **axe des réels**.
L'axe des y est appelé **axe des imaginaires**.



Définition 6.4
Tout nombre complexe $z = a + bi$ peut être repéré dans le plan de Gauss par :

a) la distance, notée ρ ou $|z|$, entre l'origine et le point $M(a; b)$ représentant z :

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

On appelle cette distance le **module** de z.

b) l'angle orienté, noté θ ou $\arg(z)$, entre l'axe des réels et le segment $[OM]$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k \cdot 2\pi \text{ si } a > 0 \\ \text{et} \\ \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi + k \cdot 2\pi \text{ si } a < 0\end{array}}$$

On appelle cet angle l'**argument** de z.

Le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ se note souvent :

$$\boxed{[\rho;\theta]}$$

On appelle cette notation la **forme trigonométrique** de z

On peut passer aisément de la forme trigonométrique, $[\rho;\theta]$, à la forme cartésienne, $a+bi$, d'un nombre complexe z en posant :

$$\begin{array}{rcl} a & = & \rho\cos(\theta) \\ b & = & \rho\sin(\theta) \end{array}$$

ou de manière équivalente :

$$\boxed{z = a + bi = \rho \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot i) = \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) \cdot i}$$

Remarques

1. Si z est un nombre réel, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{z^2}$ est la valeur absolue de z.
2. Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux sous forme cartésienne ou sous forme trigonométrique si :

$$\begin{array}{rcl} a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i & \Longleftrightarrow & a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2 \\ [\rho_1;\theta_1] = [\rho_2;\theta_2] & \Longleftrightarrow & \rho_1 = \rho_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Propriétés - module

Le module vérifie les propriétés suivantes :

1) $|z| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $||z_1| - |z_2|| \leqslant \underbrace{|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|}_{\text{Minkowski}}$
4) $|z| = |\overline{z}|$
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
7) $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$

Ces propriétés sont valables pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Remarque

Les fonctions vérifiant les deux premières propriétés et la propriété de Minkowski sont appelées des **normes**.

6.3.2 Addition, soustraction et multiplication par un scalaire

Cette manière de présenter les nombres complexes n'a aucun intérêt en ce qui concerne ces opérations.
Dans le plan de Gauss, l'addition et la soustraction équivalent à des translations. La multiplication par un scalaire équivaut à une homothétie de centre O et de rapport ce scalaire.

6.3.3 Multiplication

Soient deux nombres complexes $z_1 = [\rho_1; \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2; \theta_2]$. On peut multiplier ces deux nombres complexes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)i) \cdot \rho_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)i) \\ &= \rho_1\rho_2 \cdot [\underbrace{(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + \underbrace{(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}\, i] \\ &= \rho_1\rho_2 \cdot (\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)i) = [\rho_1 \cdot \rho_2; \theta_1 + \theta_2] \end{aligned}$$

On remarque alors que lorsqu'on multiplie des nombres complexes, les *modules* se multiplient et les *arguments* s'additionnent :

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = [\rho_1; \theta_1] \cdot [\rho_2; \theta_2] = [\rho_1 \cdot \rho_2; \theta_1 + \theta_2]}$$

Remarque

Dans le plan de Gauss, la multiplication par $z = [\rho; \theta]$ équivaut à une rotation d'angle θ, suivie d'une homothétie de rapport ρ.

6.3.4 Inversion

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. Pour déterminer l'inverse de ce nombre complexe, on prend l'inverse de son *module* et l'opposé de son *argument* :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}; -\theta\right]}$$

En effet, on a bien que :

$$z \cdot \frac{1}{z} = [\rho; \theta] \cdot \left[\frac{1}{\rho}; -\theta\right] = \left[\rho \cdot \frac{1}{\rho}; \theta + (-\theta)\right] = [1; 0] = 1$$

6.3.5 Division

Soient deux nombres complexes $z_1 = [\rho_1; \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2; \theta_2]$. On peut déterminer le quotient de ces deux nombres complexes de la manière suivante :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = [\rho_1; \theta_1] \cdot \left[\frac{1}{\rho_2}; -\theta_2\right] = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2\right]$$

On remarque alors que lorsqu'on divise deux nombres complexes, les *modules* se divisent et les *arguments* se soustraient :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{[\rho_1; \theta_1]}{[\rho_2; \theta_2]} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2\right]}$$

Remarque

Dans le plan de Gauss, la division par $z = [\rho; \theta]$ équivaut à une rotation d'angle $-\theta$, suivie d'une homothétie de rapport $\frac{1}{\rho}$.

6.3.6 Elévation à une puissance

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. Pour élever le nombre complexe z à la puissance n, z^n, il suffit de le multiplier n fois par lui-même. En effectuant les diverses multiplications successives, on obtient :

$$\boxed{z^n = [\rho; \theta]^n = [\rho^n; n\theta]}$$

On remarque que pour élever un nombre complexe à la puissance n, on élève le *module* à la puissance n et on multiplie l'argument par n.

6.3.7 Extraction des racines n-ièmes

Soit le nombre complexe $z = [\rho; \theta]$. On cherche ici les nombres qui élevés à la puissance n donnent le nombre z. D'après ce qui précède, il faut prendre un nombre complexe dont le module est $\sqrt[n]{\rho}$ et dont l'argument est $\frac{\theta}{n}$. Comme θ est défini à $k \cdot 2\pi$ près, $\frac{\theta}{n}$ sera défini à $\frac{k \cdot 2\pi}{n}$ près. Il y aura donc n modules différents par tour. Ainsi tout nombre complexe possédera n racines n-ièmes **distinctes**.

Les racines n-ièmes de $z = [\rho; \theta]$ sont données par :

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{\rho}; \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right]}$$

avec $0 \leqslant k < n, k \in \mathbb{N}$.

Remarques

1. Comme $\left[1; \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right]^n = [1^n; k \cdot 2\pi] = 1$, on peut en déduire que les racines n-ièmes de $z = [\rho; \theta]$ s'obtiennent en multipliant une des racines n-ièmes de z par les racines n-ièmes de l'unité.
2. Dans le plan de Gauss, les n racines n-ièmes de z sont situées sur un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$. Si on relie ces racines par des segments de droite, elles forment un polygone régulier à n côtés.

6.3.8 Formule de Moivre

Soit un nombre complexe z de module 1. Il peut s'écrire

$$z = [1; \theta] = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$$

Si on l'élève à la puissance n, on obtient

$$z^n = [1; \theta]^n = [1^n; n \cdot \theta] = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)i$$

Proposition 6.1
La formule appelée **formule de Moivre** est l'égalité suivante :

$$\boxed{(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)i}$$

Exemple

Si on applique la formule de Moivre pour $n = 2$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)^2 & = & \cos(2\theta) + \sin(2\theta)i \\ & ou & \\ \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)i - \sin^2(\theta) & = & \cos(2\theta) + \sin(2\theta)i \end{array}$$

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{array}{rcl} \cos(2\theta) & = & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) & = & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{array}$$

qui sont les formules trigonométriques de duplication.

6.4 Exercices

1) Soient les nombres complexes $z_1 = 1 + 4i$ et $z_2 = 5 - i$. Calculer :

a) $z_3 = z_1 + z_2$ b) $z_4 = 3z_1$ c) $z_5 = z_1 \cdot z_2$

d) $z_6 = z_1^2$ e) $z_7 = \dfrac{1}{z_1}$ f) $z_8 = \dfrac{z_1}{z_2}$

2) Soient les nombres complexes $z_1 = 7 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -5 + 2i$, $z_4 = -10 - 3i$, $z_5 = 8$ et $z_6 = 8i$. Calculer :

a) $z_1 - z_3 - z_5$ b) $z_1 z_2 z_3$ c) $z_3^2 + z_4^2$

d) $iz_4 - z_3 z_6$ e) $\mathfrak{Im}(z_4)$ f) $\mathfrak{Re}(z_1^2 z_3)$

g) $\mathfrak{Im}(2z_2 - 3z_3)$ h) $\dfrac{z_1}{z_6}$ i) $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $z' = (z-1)(z-2i)$ soit

a) un nombre réel b) un nombre imaginaire pur

4) Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que $z' = \dfrac{z+2i}{z-2}$ soit

a) un nombre réel b) un nombre imaginaire pur

5) Démontrer les formules :

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{\overline{z} - z}{2} i.$$

6) Résoudre les équations :

a) $z + 2i\overline{z} = 8 + 7i$ b) $(1+i)z + (5-3i)\overline{z} = 20 + 20i$

c) $(2+2i)z - 3\mathfrak{Re}(z) = -18 + 30i$ d) $\mathfrak{Im}(\overline{z}+1) + i \cdot \mathfrak{Re}(-z+2) = -\dfrac{1}{2} - 6i$

7) Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 + i \\ 5x - 3y = -1 + 8i \end{cases}$ b) $\begin{cases} ix - 5y = 13 \\ 2x - 3iy = 13i \end{cases}$

8) Résoudre les équations :

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $6x^2 + (7 - 13i)x - 3 - 7i = 0$

9) Ecrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants donnés sous forme trigonométrique :

a) $z_1 = [2; \pi]$ b) $z_2 = \left[\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{6}\right]$ c) $z_3 = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$

10) Soient $z_1 = \left[2; \frac{\pi}{4}\right]$, $z_2 = \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$, $z_3 = \left[5; \frac{\pi}{6}\right]$ et $z_4 = \left[1; \frac{5\pi}{6}\right]$. Calculer :

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ c) $z_3 \cdot z_4$ d) $\dfrac{z_3}{z_4}$

11) Calculer le module et l'argument des nombres complexes :

a) $z_1 = 4 + 2i$ b) $z_2 = 3 - i$ c) $z_3 = -4 + 2i$

d) $z_4 = -3 - i$ e) $z_5 = z_1 + z_2$ f) $z_6 = z_1 \cdot z_2$

g) $z_7 = z_1^2$ h) $z_8 = \dfrac{1}{z_3}$ i) $z_9 = \dfrac{z_3}{z_4}$

12) Calculer, en utilisant la forme trigonométrique, les produits et les quotients suivants, puis exprimer les résultats sous forme cartésienne.

a) $(1+i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ b) $(1 - \sqrt{3}i)(-4\sqrt{3} + 4i)$ c) $\dfrac{1-i}{1+i}$

d) $\dfrac{4 + 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$ e) $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ f) $\dfrac{3+i}{2+i}$

13) Calculer :

a) $(1-i)^{37}$ b) $\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)^{1000}$ c) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^{21}$

14) Soit $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$.

a) Représenter z^5.

b) Déterminer les nombres entiers n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$.

15) Calculer et construire :

a) les racines carrées de -81.

b) les racines carrées de $16i$.

c) les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

d) les racines cubiques de $-46 + 9i$.

e) les racines sixièmes de $1 + \sqrt{3}i$.

16) Résoudre les équations :

a) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$ b) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

c) $z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1 = 0$ d) $z^6 - (1 + 12i)z^3 - 13 - 9i = 0$

6.5 Solutions des exercices

1) a) $z_3 = 6 + 3i$ b) $z_4 = 3 + 12i$ c) $z_5 = 9 + 19i$

d) $z_6 = -15 + 8i$ e) $z_7 = \dfrac{1}{17} + \dfrac{-4}{17}i$ f) $z_8 = \dfrac{1}{26} + \dfrac{21}{26}i$

2) a) $4 - 7i$ b) $-89 + 53i$ c) $112 + 40i$

d) $19 + 30i$ e) -3 f) 20

g) -4 h) $-\dfrac{5}{8} - \dfrac{7}{8}i$ i) $\dfrac{9}{5} - \dfrac{17}{5}i$

3) a) z' est un réel si $z = a + bi$ est tel que $2ab - 2a - b + 2 = 0$
b) z' est un imaginaire pur si $z = a + bi$ est tel que $(a - \frac{1}{2})^2 - (b - 1)^2 + \frac{3}{4} = 0$

4) a) z' est un réel si $z = a + bi$ est tel que $a - b - 2 = 0$
b) z' est un imaginaire pur si $z = a + bi$ est tel que $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$

6) a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -5i$ c) $z = 12 + 3i$ d) $z = 8 + \dfrac{1}{2}i$

7) a) $x = 1 + i,\ y = 2 - i$ b) $x = 2i,\ y = -3$

8) a) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $x_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}i$

9) a) $z_1 = -2$ b) $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ c) $z_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}i$

10) a) $\left[6; \dfrac{5\pi}{12}\right]$ b) $\left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{\pi}{12}\right]$ c) $[5; \pi]$ d) $\left[5; \dfrac{-2\pi}{3}\right]$

11) Réponses :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
mod.	$\sqrt{20}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{200}$	20	$\frac{\sqrt{20}}{20}$	$\sqrt{2}$
arg.	$0,464$	$-0,322$	$2,678$	$3,463$	$0,142$	$0,142$	$0,927$	$3,605$	$\frac{-\pi}{4}$

12) a) $2\sqrt{2}$ b) $16i$ c) $-i$

d) $2\sqrt{3} + 2i$ e) $0,966 + 0,259i$ f) $1,4 - 0,2i$

13) a) $-262144 + 262144i$ b) $-0,865 - 0,501i$

c) $21200629,67 + 5231678,51i$

14) b) Les multiples de 12.

15) a) $9i$ $\qquad -9i$

b) $2\sqrt{2}(1+i)$ $\qquad -2\sqrt{2}(1+i)$

c) $0,966+0,259i$ $\qquad \dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\qquad -0,259-0,966i$

d) $2+3i$ $\qquad -3,598+0,232i$ $\qquad 1,598-3,232i$

e) $1,105+0,195i$ $\qquad 0,384+1,055i$ $\qquad -0,722+0,860i$

$-1,105-0,195i$ $\qquad -0,384-1,055i$ $\qquad 0,722-0,860i$

16) a) $z_1=-2+i \qquad z_2=-3+i$

b) $z_1=1 \qquad z_2=i \qquad z_3=-i$

c) $z_1=0,951-0,309i \qquad z_2=0,588+0,809i \qquad z_3=-0,588+0,809i$

$z_4=-0,951-0,309i$

d) $z_1=2+i \qquad z_2=-1,87+1,23i \qquad z_3=-0,13-2,23i$

$z_4=0,79+0,79i \qquad z_5=-1,08+0,29i \qquad z_6=0,29-1,08i$